

Capítulo 2

Derivação

2.1 Geometria das Funções Escalares em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Exercício 2.1.1

Para a função escalar $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$, esboce as curvas de nível: $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = 5$ e $f(x, y) = 8$.

Exercício 2.1.2

Para as seguintes funções, esboce os conjuntos de nível c , para os valores de c indicados. Consegue representar o gráfico de cada função?

- a. $f(x, y) = 4 - 3x + 2y$, $c = -2, -1, 0, 1, 2$. b. $f(x, y) = x/y$, $c = -2, -1, 0, 1, 2$.
c. $f(x, y) = y^2 - x^2$, $c = -1, 0, 1$. d. $f(x, y) = y - x^2$, $c = -1, 0, 1$.
e. $f(x, y) = x^2 + xy$, $c = -2, -1, 0, 1, 2$. f. $f(x, y) = (x - 1)(y - 2)$, $c = -1, 0, 1$.

Exercício 2.1.3

Represente algumas superfícies de nível de cada uma das funções seguintes.

- a. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto -x^2 - y^2 - z^2$.
b. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto 4x^2 + y^2 + 9z^2$.
c. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2$.

Exercício 2.1.4

Usando coordenadas polares descreva as curvas de nível da função dada por:

$$f(x, y) = 2xy/(x^2 + y^2) \text{ se } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Exercício 2.1.5

Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada em coordenadas polares por $f(r, \theta) = \cos(2\theta)/r^2$. Represente, no plano cartesiano, algumas curvas de nível de f .

2.2 Derivadas Parciais. Função Derivada. Plano Tangente. Vector Gradiente.

Exercício 2.2.1

Calcule $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$, para:

- a. $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$ b. $f(x, y) = \cos(ye^{xy}) \sin x$
 c. $f(x, y) = e^{xy} \ln(x^2 + y^2)$ d. $f(x, y) = xy/\sqrt{x^2 + y^2}$

Exercício 2.2.2

Determine uma equação do plano tangente à superfície $z = x^2 + y^3$ no ponto $P = (3, 1, 10)$.

Exercício 2.2.3

Determine uma equação do plano tangente ao gráficos das funções seguintes nos pontos indicados.

- a. $f(x, y) = xy$, $P = (0, 0)$ b. $f(x, y) = e^{xy}$, $P = (0, 1)$
 c. $f(x, y) = x \cos x \cos y$, $P = (0, \pi)$ d. $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$, $P = (0, 1)$

Exercício 2.2.4

Calcule a matriz das derivadas parciais das seguintes funções.

- a. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x, y)$ b. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y, x)$
 c. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2)$ d. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$
 e. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (xye^{xy}, x \sin y, 5xy^2)$

Exercício 2.2.5

Para as funções nas alíneas do exercício anterior, calcule $\mathbf{D}f(P)$ para:

- a. $P = (2, 1)$ b. $P = (2, 1)$ c. $P = (1, 2, 0)$ d. $P = (0, \pi/2)$ e. $P = (1, \pi)$

Exercício 2.2.6

Calcule o vector gradiente de cada uma das seguintes funções:

- a. $f(x, y, z) = xe^{(-x^2 - y^2 - z^2)}$ b. $f(x, y, z) = z^2 e^x \cos y$
 c. $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$

2.3 Introdução aos Caminhos e Curvas no Plano e no Espaço.

Exercício 2.3.1

Represente geometricamente as curvas, no plano ou no espaço, que são as imagens dos caminhos seguintes.

- a. $\mathbf{c}(t) = 2 \sin t \mathbf{i} + 4 \cos t \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. b. $\mathbf{c}(t) = (-t, 2t, 1/(t+1))$, $0 \leq t \leq 3$.
 c. $\mathbf{c}(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. d. $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 2$.

Exercício 2.3.2

Calcule o vector velocidade no instante t para cada um dos caminhos seguintes.

- a. $\mathbf{c}(t) = 6t \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}$. b. $\mathbf{c}(t) = (4e^t, 6t^4, \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 2.3.3

Calcule a recta tangente ao caminho $\mathbf{c}$ no instante t indicado.

- a. $\mathbf{c}(t) = \sin 3t \mathbf{i} + \cos 3t \mathbf{j} + 2t^{5/2} \mathbf{k}$, $t = 1$. b. $\mathbf{c}(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t)$, $t = 0$.

Exercício 2.3.4

Calcule um vector tangente, no instante t , a cada um dos caminhos seguintes.

- a. $\mathbf{c}(t) = e^t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$, $t \in \mathbb{R}$. b. $\mathbf{c}(t) = (t \sin t, 4t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 2.3.5

Neste exercício suponha que um partícula se movimenta seguindo a trajectória descrita pelo caminho $\mathbf{c}$ e no instante t_0 sai da trajectória e segue pela tangente ao caminho. Calcule a posição da partícula no instante t_1 , dado.

- a. $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$, $t_0 = 2$, $t_1 = 3$. b. $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$, $t_0 = 1$, $t_1 = 2$.
 c. $\mathbf{c}(t) = (4e^t, 6t^2, \cos t)$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$. d. $\mathbf{c}(t) = (\sin e^t, t, 4 - t^2)$, $t_0 = 1$, $t_1 = 2$.

2.4 Propriedades da Derivada. Regra da Cadeia.

Exercício 2.4.1

Calcule $\frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial y}$ directamente e usando a regra da cadeia.

- a. $w = u \sin(v)$; $u = x^2 + y^2$; $v = xy$. b. $w = e^{uv}$; $u = x \ln(y)$; $v = 2x + y$

Exercício 2.4.2

Use a regra da cadeia para determinar a derivada de $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$, onde

$$f(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}, \quad u(x, y) = e^{-x-y}, \quad v(x, y) = e^{xy}.$$

Exercício 2.4.3

Calcule as derivadas seguintes directamente e usando a regra da cadeia.

- $\frac{\partial r}{\partial u}$, $\frac{\partial r}{\partial v}$ e $\frac{\partial r}{\partial t}$, onde $r = w \cos(z)$; $w = u^2 vt$; $z = ut^2$.
- $\frac{dw}{dt}$, onde $w = x^3 - y^3$; $x = e^{-2t}$; $y = 3t^2$.

Exercício 2.4.4

Verifique a regra da cadeia para a composição $(f \circ \mathbf{c})$ nos seguintes casos:

- $f(x, y) = e^{xy}$, $\mathbf{c}(t) = (3t^2, t^3)$
- $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}$, $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t})$
- $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$, $\mathbf{c}(t) = (t, -t)$

Exercício 2.4.5

Nas alíneas seguintes alíneas determine a expressão das funções compostas h e use a regra da cadeia para calcular as derivadas $\mathbf{D}h$ nos pontos indicados.

- $h(x, y) = (f \circ g)(x, y)$ e $\mathbf{D}h(1, 1)$, onde

$$f(u, v) = (\tan(u-1) - e^u, u^2 - v^2), \quad g(x, y) = (e^{x-y}, x-y).$$

- $h(x, y) = (f \circ g)(x, y)$ e $\mathbf{D}h(0, 0)$, onde

$$f(u, v, w) = (e^{u-w}, \cos(u+v) + \sin(u+v+w)), \quad g(x, y) = (e^x, \cos(y-x), e^{-y}).$$

Exercício 2.4.6

Determine as derivadas $\frac{\partial}{\partial s}(f \circ \mathbf{F})(1, 0)$ e $\frac{\partial}{\partial t}(f \circ \mathbf{F})(1, 0)$, onde $f(u, v) = \cos u \sin v$ e $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por $\mathbf{F}(s, t) = (\cos(t^2 s), \ln \sqrt{1 + s^2})$.

Exercício 2.4.7

Resolva os seguintes exercícios.

- A areia vaza de um recipiente por um orifício à taxa de $6\text{cm}^3/\text{min}$. Ao vazar, a areia vai formando um cone circular recto cujo raio da base aumenta à razão de $0,25\text{cm}/\text{min}$. Se, no instante em que já vazaram 40cm^3 , o raio é 15cm , determine a taxa de crescimento da altura do cone. (*nota*: deve usar a regra da cadeia para resolver este problema)

- b. Suponha que dentro de um aquário, a temperatura da água é dada por $T = x^2 e^y - xy^3$. Se um peixe nadar segundo a trajectória descrita pelo caminho $\mathbf{c}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}$ determine a taxa de variação instantânea da temperatura em cada instante, $dT/dt(t)$, a que estará sujeito o peixe:
- pela regra da cadeia.
 - por derivação directa da composição $(T \circ \mathbf{c})(t)$.
- c. Considere que a temperatura num ponto (x, y, z) é dada por $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Se uma partícula se move segundo a hélice circular parametrizada por $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, determine:
- $T(t)$.
 - $T'(t)$ através da regra da cadeia.
 - uma aproximação para a temperatura a que está sujeita a partícula no instante $t = \pi/2 + 0.001$.

Exercício 2.4.8

Seja $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (e^{x+y}, e^{x-y})$. Considere-se $\mathbf{c}$ um caminho tal que $\mathbf{c}(0) = (0, 0)$ e $\mathbf{c}'(0) = (1, 1)$. Indique o vector tangente a $(\mathbf{F} \circ \mathbf{c})(t)$ no instante $t = 0$.

Exercício 2.4.9

Suponha que $u = f(x, y)$ e $v = g(x, y)$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad u_y = -v_x.$$

Se $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, mostre que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

2.5 Gradiente e Derivada Direccional.**Exercício 2.5.1**

Calcule o vector gradiente da função f no ponto P . Calcule ainda a derivada direccional de f em P na direcção do vector $\mathbf{u}$:

- $f(x, y) = 9x^2 + 4y^2$, $P = (2, 3)$, $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.
- $f(x, y, z) = yz^3 - 2x^2$, $P = (2, -3, 1)$; $\mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{i} + \sqrt{3} \mathbf{j}$.
- $f(x, y, z) = xy^2 e^z$, $P = (2, -1, 0)$; $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
- $f(x, y) = x^3 - 2x^2 y + xy^2 + 1$, $P = (1, 2)$; $\mathbf{u} = 3 \mathbf{i} + 4 \mathbf{j}$.

Exercício 2.5.2

Para cada uma das alíneas do exercício anterior, determine um vector unitário com o sentido do maior crescimento da função f e determine a taxa de variação nesse sentido. Proceda de igual modo para o sentido de maior decrescimento.

Exercício 2.5.3

Determine a derivada direccional de f no ponto P e segundo a direcção indicada.

- $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $P = (3, 5)$, na direcção da bissectriz dos quadrantes pares.
- $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, $P = (1, 1, 3)$, na direcção que vai do ponto P ao ponto $Q = (5, 5, 15)$.
- $f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$, $P = (0, 0)$, na direcção que faz um ângulo de 30° (no sentido directo) com a horizontal.

Exercício 2.5.4

Mostre que a derivada da função $f(x, y) = y^2/x$, calculada num qualquer ponto da elipse de equação $2x^2 + y^2 = k$ ($k > 0$), é igual a 0.

Exercício 2.5.5

Determine o ângulo entre os gradientes da função $f(x, y) = \ln(y/x)$ nos pontos $P = (1/2, 1/4)$ e $Q = (1, 1)$.

Exercício 2.5.6

Determine equações do plano tangente e da recta normal às seguintes superfícies em $\mathbb{R}^3$, no ponto P , dado:

- $9x^2 - 4y^2 - 25z^2 = 40$, $P = (4, 1, -2)$;
- $z = x^2 - y^2$, $P = (1, 1, 0)$;
- $z = \ln(xy)$, $P = (1/2, 2, 0)$;
- $xyz - 4xz^3 + y^3 = 10$, $P = (-1, 2, 1)$.

Exercício 2.5.7

Uma chapa de metal está situada num plano- xy , de modo que a temperatura T em (x, y) é inversamente proporcional à origem. A temperatura em $P(3, 4)$ é de 100°C .

- Encontre a taxa de variação de T em P na direcção $\mathbf{i} + \mathbf{j}$
- A partir de P , em que sentido aumenta mais rapidamente a temperatura? E em que sentido decresce mais rapidamente?
- Em que direcção a taxa de variação de T é 0?

2.6 Exercícios Variados

Exercício 2.6.1

Considere o movimento de uma partícula segundo a curva, no plano, parametrizada por

$$\mathbf{c}(t) = e^t \cos t \, \mathbf{i} + e^t \sin t \, \mathbf{j}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mostre que o vector tangente a $\mathbf{c}$ em cada instante t , faz com $\mathbf{c}(t)$ um ângulo constante e igual a $\pi/4$.

Exercício 2.6.2

Dada uma função diferenciável f , de uma variável real, e $z(x, y) = f\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$, mostre que

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Exercício 2.6.3

Considere uma corda de um violino com um certo comprimento. Considere um ponto x , da corda quando esta está na horizontal. O deslocamento vertical, no instante t , do ponto x é dado por $u(x, y) = \sin(x - 6t) + \sin(x + 6t)$. Calcule a velocidade da corda em $x = 1$ no instante $t = 1/3$.

Exercício 2.6.4

No instante $t = 0$ é lançada uma partícula a partir do ponto $P = (1, 1, 1)$ na superfície de equação $S: x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$, segundo a direcção normal a S , e com a velocidade de 10 ms^{-1} . Calcule o instante em que a partícula atinge a esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 103$.

Exercício 2.6.5

Suponha que um insecto se encontra num ambiente tóxico e que o nível de toxicidade é dado pela função $T(x, y) = 2x^2 - 4y^2$, onde (x, y) é a posição do insecto segundo um referencial. Se o insecto estiver na posição $(-1, 2)$, em que sentido se deve movimentar de modo a que o nível de toxicidade diminua mais rapidamente?

Exercício 2.6.6

- Determine a taxa de variação instantânea de $f(x, y, z) = e^{xy} \sin(xyz)$, no ponto $P = (0, 1, 1)$ e na direcção do vector $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.
- Seja $h(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$. Suponha-se que a altura de uma montanha, no ponto (x, y) , é dada pela função h . A partir do ponto $P = (1, 0)$, determine a direcção na qual se deve seguir de modo a escalar o mais rapidamente possível.

Exercício 2.6.7

O que está errado no seguinte raciocínio?

“Suponha-se que $w = f(x, y)$ e $y = x^2$. Então, pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x} + 2x \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Assim, $2x \frac{\partial w}{\partial y} = 0$ e, portanto, $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$.”

Exercício 2.6.8

Usando a regra da cadeia determine uma fórmula para:

a. $\frac{d}{dt} \left(e^{f(t)g(t)} \right)$ b. $\frac{d}{dt} \left(f(t)^{g(t)} \right)$

Exercício 2.6.9

Verifique a regra da cadeia para $f \circ \mathbf{c}$.

a. $f(x, y, z) = \frac{\ln(1 + x^2 + 2z^2)}{1 + y^2}$, $\mathbf{c}(t) = (t, 1 - t^2, \cos t)$

b. $f(x, y) = \frac{x^2}{2 + \cos y}$, $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t})$

Exercício 2.6.10

Suponha que f é uma função diferenciável de uma variável real. Seja $u = g(x, y)$ definida por

$$u = g(x, y) = xy f\left(\frac{x+y}{xy}\right).$$

Mostre que a função u satisfaz a equação às derivadas parciais

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = G(x, y) u,$$

e determine a função G .

Exercício 2.6.11

Seja F uma função de uma variável real e seja f uma função de duas variáveis reais, ambas diferenciáveis. Mostre que

$$\nabla (F \circ f)(x, y) \parallel \nabla f(x, y), \quad \forall (x, y)$$