Capítulo 1

Vectores e Geometria Analítica

1.1 Vectores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Exercício 1.1.1
Determine um vector unitário que tenha a mesma direcção e sentido que o vector $\mathbf{u}$ e outro que que tenha sentido contrário a $\mathbf{u}$ para:

a. $\mathbf{u} = -8\,\mathbf{i} + 15\,\mathbf{j}$. b. $\mathbf{u} = 2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}$. c. $\mathbf{u} = 5\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$. d. $\mathbf{u} = -\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} - 5\,\mathbf{k}$.

Exercício 1.1.2
Determine um vector:

a. de norma 4 e mesmo sentido de $\mathbf{u} = [2, 5]$.

b. de norma 6 e sentido oposto a $\mathbf{v} = 4\,\mathbf{i} - 7\,\mathbf{j}$.

Exercício 1.1.3
Mostre graficamente que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$. Em que condições se verifica a igualdade?

Exercício 1.1.4
Mostre que:

a. todo o ponto da recta dada parametricamente por $\mathbf{v}(t) = (1, -1, 2) + t(2, 3, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, está contido no plano $5x - 3y = z + 6$.

b. existe um ponto contido simultaneamente no plano $2x - z = 3y + 2$ e na recta parametrizada por $\mathbf{u}(t) = (2, -2, -1) + t(1, 1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 1.1.5
Determine, caso existam, os pontos de intersecção das rectas:

a. $\mathbf{u}(t) = (t + 4, 4t + 5, t - 2)$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}(s) = (2s + 3, s + 1, 2s - 3)$, $s \in \mathbb{R}$.

b. $\mathbf{u}(t) = (3t + 2)\,\mathbf{i} + (t - 1)\,\mathbf{j} + (6t + 1)\,\mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}(s) = (3s - 1, s - 2, s)$, $s \in \mathbb{R}$.

1.2 Produto interno. Produto externo. Produto triplo escalar.

Exercício 1.2.1
Calcule $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ e $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ para:

a. $\mathbf{u} = 15\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \pi\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

b. $\mathbf{u} = 2\,\mathbf{j} - \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$.

c. $\mathbf{u} = 5\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

d. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} - 7\,\mathbf{k}$.

Exercício 1.2.2
Determine o ângulo formado pelos vectores nas alíneas do exercício anterior.

Exercício 1.2.3
Calcule $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, sendo $\mathbf{u} = \sqrt{3}\,\mathbf{i} - 315\,\mathbf{j} + 22\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$.

Exercício 1.2.4
Determine os valores de b para os quais o vector $\mathbf{u} = 2\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}$ é ortogonal a:

a. $\mathbf{v} = -3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

b. $\mathbf{v} = \mathbf{k}$.

Exercício 1.2.5
Mostre que

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Sugestão: considere o produto interno dos vectores $\mathbf{u} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \sin\alpha\,\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \cos\beta\,\mathbf{i} + \sin\beta\,\mathbf{j}$.

Exercício 1.2.6
Determine $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ para:

a. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

b. $\mathbf{u} = 3\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$.

Exercício 1.2.7
Determine vectores unitários perpendiculares aos vectores:

a. $\mathbf{u} = 7\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j} + 9\,\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -5\,\mathbf{i} + 9\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}$.

b. $\mathbf{u} = 2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -4\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j} - 6\,\mathbf{k}$.

Exercício 1.2.8
Para os vectores $\mathbf{u} = 2\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, verifique as seguintes propriedades do produto externo.

a. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

b. $(k\,\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (k\,\mathbf{v}), \quad k \in \mathbb{R}$.

c. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$.

d. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

e. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$.

f. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$.

g. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} + (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} + (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = 0$.

Exercício 1.2.9
Determine a área do triângulo de vértices: $A = (0,0,0)$, $B = (1,1,1)$ e $C = (0,-2,3)$.

Exercício 1.2.10
Determine uma equação do plano que contém a recta $r: \ (-1,1,2) + t\,(3,2,4),\ t \in \mathbb{R}$, e é perpendicular ao plano $\pi: \ 2x + y - 3z + 4 = 0$.

Exercício 1.2.11
Determine uma equação do plano que:

a. é paralelo à recta $r: \ (1,-1,0) + t\,(3,2,-2),\ t \in \mathbb{R}$ e contém os pontos $A = (3,2,-1)$ e $B = (1,-1,2)$.

b. contém as rectas paralelas, $r_1: \ (0,1,-2) + t\,(2,3,-1)$, $r_2: \ (2,-1,0) + t\,(2,3,-1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 1.2.12
Calcule a distância do ponto A ao plano π:

a. $A = (1,1,-5) \quad \pi: \ 12x + 13y + 5z + 2 = 0$

b. $A = (2,1,-1) \quad \pi: \ x - 2y + 2z + 5 = 0$

Exercício 1.2.13
Calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, para:

a. $\mathbf{u} = 7\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j} + 9\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = -5\,\mathbf{i} + 9\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = -2\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

b. $\mathbf{u} = 2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = -4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} - 6\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = -\,\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

Exercício 1.2.14
Calcule o volume do paralelipípedo definido por $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, para:

a. $\mathbf{u} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k},\ \mathbf{v} = 5\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{k},\ \mathbf{w} = \mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

b. $\mathbf{u} = \mathbf{i},\ \mathbf{v} = 3\,\mathbf{j} - \mathbf{k},\ \mathbf{w} = 4\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

1.3 Coordenadas polares, cilíndricas e esféricas.

Exercício 1.3.1
Os pontos seguintes estão representados no sistema de coordenadas polares. Represente-os em coordenadas cartesianas.

a. $A = (1, \pi/6)$ b. $B = (2, \pi/3)$ c. $C = (2, -\pi/3)$

d. $D = (2, 7\pi/3)$ e. $E = (0, \pi/4)$

Exercício 1.3.2
Os pontos seguintes estão representados no sistema de coordenadas cartesianas. Represente-os em coordenadas cilíndricas e esféricas.

a. $A = (0, 3, 4)$ b. $B = (-1, 0, 1)$ c. $C = (-\sqrt{2}, 1, 0)$

d. $D = (-2\sqrt{3}, -2, 3)$ e. $E = (0, 0, 0)$

Exercício 1.3.3
Os pontos seguintes estão representados no sistema de coordenadas cilíndricas. Represente-os em coordenadas cartesianas e esféricas.

a. $A = (1, \pi/4, 1)$ b. $B = (3, \pi/6, -4)$ c. $C = (0, \pi/4, 1)$

d. $D = (2, \pi/2, -1)$ e. $E = (2, -\pi/2, 1)$

Exercício 1.3.4
Os pontos seguintes estão representados no sistema de coordenadas esféricas. Represente-os em coordenadas cartesianas e cilíndricas.

a. $A = (1, \pi/2, \pi)$ b. $B = (2, -\pi/2, -\pi)$ c. $C = (2, -\pi/2, \pi/6)$

d. $D = (1, \pi, -\pi/6)$ e. $E = (0, \pi/8, \pi/35)$

Exercício 1.3.5
Reescreva as equações seguintes em coordenadas cartesianas e identifique as respectivas curvas.

a. $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$ b. $r = \dfrac{12}{2 + 6\cos\theta}$ c. $r = \dfrac{12}{6 + 2\sin\theta}$

Exercício 1.3.6
Nas seguintes alíneas estão representadas curvas em coordenadas polares. Determine a intersecção das curvas.

a. $C_1:\ r = 1+\cos\theta,\quad C_2:\ r=\cos\theta-1$

b. $C_1:\ r=\sin 2\theta,\quad C_2:\ r=1$

c. $C_1:\ r=\cos\theta,\quad C_2:\ r=\cos 2\theta$

d. $C_1:\ r=\sin\theta,\quad C_2:\ r=\cos 2\theta$

Exercício 1.3.7
Reescreva as equações seguintes em coordenadas cilíndricas e esféricas.

a. $x^2+y^2+z^2=4.$

b. $x^2+y^2=4z.$

c. $3x+y-4z=12.$

d. $x^2-y^2-z^2=1.$

Exercício 1.3.8
Mostre que em coordenadas esféricas,

a. ρ é o comprimento de $\mathbf{v}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$.

b. $\phi=\arccos\left(\mathbf{v}\cdot\ \mathbf{k}/\|\mathbf{v}\|\right)$ onde $\mathbf{v}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$.

c. $\theta=\arccos\left(\mathbf{u}\cdot\ \mathbf{i}/\|\mathbf{u}\|\right)$ onde $\mathbf{u}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}$.

1.4 Exercícios variados

Exercício 1.4.1
Mostre que a distância do ponto $P=(x_1,y_1)$ à recta $r:\ ax+by=c$ é dada pela fórmula:

$$d(P,r)=\frac{|ax_1+by_1-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Exercício 1.4.2
a. Considere, no espaço, as rectas não paralelas r e s. Suponha que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vectores paralelos às direcções de r e s, respectivamente. Se P é um ponto genérico de r e Q um ponto genérico de s, mostre que a distância entre r e s é dada por

$$d(r,s)=\frac{|(Q-P)\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})|}{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|}.$$

b. Calcule a distância entre a recta, r, determinada pelos pontos $(0,0,0)$ e $(-1,-1,1)$ e a recta, s, determinada pelos pontos $(0,-2,0)$ e $(2,0,5)$.

Exercício 1.4.3
Mostre que os planos dados pelas equações $Ax + By + Cz = D_1$ e $Ax + By + Cz = D_2$ são paralelos e a distância entre eles é

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Exercício 1.4.4
Reescreva as equações seguintes nas coordenadas indicadas.

a. $z = x^2 - y^2$ em coordenadas cilíndricas e esféricas.

b. $x^2 + y^2 = a^2$ $(a \in \mathbb{R})$, em coordenadas polares.

Exercício 1.4.5
Use coordenadas esféricas para mostrar que

$$\phi = \arccos \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{u}\|},$$

sendo $\mathbf{u} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Interprete geometricamente.

Exercício 1.4.6
Determine uma equação do plano que contém o ponto $P = (3, -1, 2)$ e a recta dada parametricamente por $r = (2, -1, 0) + t(2, 3, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 1.4.7
a. Mostre as seguintes igualdades usando as propriedades.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\ &= -\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = -\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \end{aligned}$$

b. Use a alínea anterior e as propriedades do exercício 1.2.8 (alíneas e.,f.) para mostrar que:

$$(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) - (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2)(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \end{vmatrix}$$

Exercício 1.4.8
Dados dois vectores não nulos de $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, verifique que o vector $\mathbf{w} = \|\mathbf{u}\|\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|\mathbf{u}$ bissecta o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Exercício 1.4.9
Calcule o volume do paralelipípedo determinado pelos vértices $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 2, 0)$ e $(3, 1, 2)$.