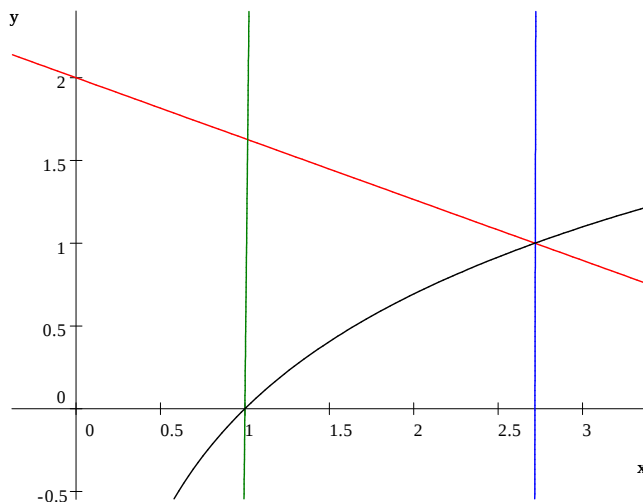


Correcção do grupo II da 2ª chamada - 11/07/2005

(Pelo docente Vítor Sousa)

EXERCÍCIO 4. Troque a ordem de integração e calcule $\int_1^e \int_{\ln x}^{2-\frac{x}{e}} dy dx$.

RESOLUÇÃO: A região de integração é $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq e \wedge \ln x \leq y \leq 2 - \frac{x}{e}\}$



Para inverter a ordem de integração, projecta-se a região de integração no eixo dos yy 's e obtemos: $0 \leq y \leq 2 - \frac{1}{e}$. A variação de x depende do valor y que é fixado, e tem-se dois casos:

- fixando $y \in [0, 1[$ tem-se $1 \leq x \leq e^y$ ($y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$);
- fixando $y \in [1, 2 - \frac{1}{e}]$ tem-se $1 \leq x \leq e(2 - y)$ ($y = 2 - \frac{x}{e} \Leftrightarrow x = e(2 - y)$);

Então,

$$\begin{aligned}
 \int_1^e \int_{\ln x}^{2-\frac{x}{e}} dy dx &= \int_0^1 \int_1^{e^y} dx dy + \int_1^{2-\frac{1}{e}} \int_1^{e(2-y)} dx dy \\
 &= \int_0^1 [x]_{y=1}^{e^y} dy + \int_1^{2-\frac{1}{e}} [x]_{y=1}^{e(2-y)} dy \\
 &= \int_0^1 (e^y - 1) dy + \int_1^{2-\frac{1}{e}} [e(2-y) - 1] dy \\
 &= [e^y - y]_0^1 + \left[2ey - e\frac{y^2}{2} - y \right]_1^{2-\frac{1}{e}} \\
 &= \frac{3}{2}e - 3 + \frac{1}{2e}.
 \end{aligned}$$

EXERCÍCIO 5. Considere a região $R = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Verifique que

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \int \int_R e^{\sin(x+y)} dA \leq e.$$

RESOLUÇÃO: Seja $f(x, y) = e^{\sin(x+y)}$ definida em $R = [-\pi, \pi]^2$, pelo *Teorema do Valor Médio*, como f é contínua (composta das funções contínuas e^x , $\sin x$ e $x + y$) e R é **uma** região fechada e limitada, então existe um ponto $(x_0, y_0) \in R$ tal que

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{\text{Area}(R)} \int \int_R e^{\sin(x+y)} dA. \quad (1)$$

Como R é fechada e limitada, então f definida em R , vai ter máximo e mínimo. De facto,

$$-1 \leq \sin(x+y) \leq 1, \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

e esses valores extremos são atingidos para pontos $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$:

$$-1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) \leq \sin(x+y) \leq \sin\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \text{e } \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{\pi}{2}\right) \in [-\pi, \pi]^2;$$

e, consequentemente, como e^x é crescente, tem-se

$$e^{-1} \leq e^{\sin(x+y)} \leq e^1, \quad \text{para todo } (x, y) \in [-\pi, \pi]^2.$$

Assim, em particular, como $(x_0, y_0) \in [-\pi, \pi]^2$ tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned} \min_{(x,y) \in R} f &\leq f(x_0, y_0) \leq \max_{(x,y) \in R} f \\ e^{-1} &\leq e^{\sin(x_0+y_0)} \leq e \end{aligned}$$

o que por (1) é equivalente a

$$e^{-1} \leq \frac{1}{\text{Area}(R)} \int \int_R e^{\sin(x+y)} dA \leq e$$

onde $\text{Area}(R) = \text{Area}\left([- \pi, \pi]^2\right) = (2\pi) \cdot (2\pi) = 4\pi^2$. Portanto,

$$e^{-1} \leq \frac{1}{4\pi^2} \int \int_R e^{\sin(x+y)} dA \leq e$$

como se queria verificar.