ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E DE GESTÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Análise Matemática IV
2004/2005

Cursos: EC, EE, EI, EQ, GEI

Exame 2ª Chamada - 11/07/2005

Duração: 2h 30 min — Consulta: Tabela de Primitivas

Resolva os 3 grupos em folhas ou conjuntos de folhas *SEPARADAS*.
Apresente todos os cálculos necessários.
Dê boa apresentação à prova.

I

Cotação do grupo por questão/alínea: 1; 2; 1; 2; 1 valores

1. Considere a superfície S, no espaço, dada pela equação: $\pi + \cos(x+y+z) = z - \ln(e+x+y)$.
   Determine a equação do plano tangente a S no ponto $P = (0,0,\pi)$.

2. Considere as funções

$$\mathbf{F} : (u,v,w) \to \left(e^{u-w},\, \cos(u+v+w)\right), \quad \mathbf{G}(x,y) = \left(\ln x,\, e^{y-x},\, -\ln y\right).$$

   Determine a matriz Jacobiana de $\mathbf{H}(x,y) = (\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(x,y)$ pela regra da cadeia.

3. Considere o movimento de uma partícula no plano deslocando-se do ponto $A = (2, \ln 2)$ para o ponto $B = (\sqrt{2}, 0)$ segundo o caminho

$$\mathbf{c} : t \mapsto \left(\sqrt{4-t}, \ln\left(2 - \frac{t}{2}\right)\right).$$

   a. Verifique que o caminho *não está* parametrizado pelo comprimento do arco.
   b. Mostre que, em cada instante t do percurso, a velocidade não é perpendicular à aceleração.
   c. Determine uma expressão que permita calcular a distância total percorrida pela partícula. (NÃO calcule a distância!)

II

Cotação do grupo por questão: 3; 3 valores

4. Troque a ordem de integração e calcule $\displaystyle\int_1^e \int_{\ln x}^{2-\frac{x}{e}} \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$.

5. Considere a região $R = [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$. Verifique que

$$\frac{1}{e} \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \iint_R e^{\sin(x+y)}\, \mathrm{d}A \leqslant e$$

   Sugestão: Use o Teorema do Valor Médio para integrais duplos.

V.S.F.F.

III

Cotação do grupo por alínea: 2; 2; 3 valores

6. Considere-se o campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{x-y+z}\ \mathbf{i} + e^{x-y+z}\ \mathbf{j} + (z^3 + z)\ \mathbf{k}$

   a. Um campo de vectores diz-se *solenoidal* se tiver divergência nula em todo o ponto do domínio. Verifique que o campo $\mathbf{F}$ não é solenoidal.

   b. Calcule
   $$\int_C \nabla \cdot \mathbf{F}\ \mathrm{d}s$$
   onde C é a curva parametrizada por $\mathbf{c}(t) = \left(\cos t, \sin t, \dfrac{t}{\pi}\right)$ que une o ponto $A = (1, 0, 0)$ ao ponto $B = (1, 0, 2)$.

7. A área de uma região $R,$ no plano, delimitada por uma curva C pode ser calculada através do integral de linha
   $$A(R) = \frac{1}{2}\int_C \mathbf{F} \cdot\ \mathrm{d}s$$
   onde $\mathbf{F}(x, y) = -y\ \mathbf{i} + x\ \mathbf{j}$ e C está parametrizada no sentido directo.

   Use este método para calcular a área do círculo de raio 2.

FIM