

Apêndice A

Formulario

Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem

Equações Exactas. Factor Integrante.

Dada uma equação diferencial não exacta $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$.

1. Se $R = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$ depende apenas da variável x então a função $v(x) = e^{\int R(x) dx}$ é factor integrante da equação diferencial dada.
2. Se $\tilde{R} = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$ depende apenas da variável y então a função $\tilde{v}(y) = e^{\int \tilde{R}(y) dy}$ é factor integrante da equação diferencial dada.

Equações lineares. Redução à forma linear.

Dada uma equação linear de 1ª ordem $y' + p(x)y = r(x)$, a solução geral é

$$y(x) = e^{-h} \int r(x) e^h dx + c e^{-h}, \quad \text{onde } h = \int p(x) dx.$$

Se a equação não é linear podemos, em alguns casos, reduzi-la à forma linear mediante uma mudança de variável conveniente. Por exemplo, a *equação de Bernoulli*, $y' + p(x)y = r(x)y^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, reduz-se à forma linear usando a mudança de variável $u = y^{1-\alpha}$.

Teorema de Existência e Unicidade de Solução Para o PVI. O Método de Picard.

Considere-se o problema de valor inicial

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (*)$$

Teorema 1 (Existência e Unicidade)

Considere-se que as funções $f(x, y)$, e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ são contínuas no rectângulo (fechado) dado por

$$R : [x_0, x_0 + a], \quad |y - y_0| \leq b. \quad (a, b > 0)$$

Calculem-se os valores

$$M = \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)| \quad \text{e} \quad \alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

Nestas condições o problema de valor inicial $(*)$ tem solução única no intervalo $[x_0, x_0 + \alpha]$.

O Método de Picard.

O processo iterativo de Picard para o PVI (*) é

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_{n-1}(t)] dt, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Observação. Nas condições do teorema 1 o esquema iterativo de Picard converge para a solução de (*) no intervalo $[x_0, x_0 + \alpha]$

Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de ordem $n > 1$

Caso $n=2$: $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$

Equação homogênea de coeficientes constantes

É uma equação que pode ser escrita na forma: $y'' + ay' + by = 0$ (A) a, b são constantes.

Equação característica associada: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ (B). Soluções: λ_1, λ_2 .

	Tipo de raízes de (B)	Solução geral de (A)
Caso 1	reais distintas λ_1, λ_2	$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
Caso 2	dupla $\lambda = -a/2$	$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
Caso 3	complexas conj. $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + i\beta$	$y(x) = e^{\alpha x} [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)], C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Equação homogênea de coeficientes variáveis: *equação de Euler-Cauchy*

É uma equação que pode ser escrita na forma: $x^2 y'' + axy' + by = 0$ (C) a, b são constantes.

Equação algébrica associada: $m^2 + (a-1)m + b = 0$ (D). Soluções: m_1, m_2 .

	Tipo de raízes de (D)	Solução geral de (C)
Caso 1	reais distintas m_1, m_2	$y(x) = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
Caso 2	dupla $m = (1-a)/2$	$y(x) = (C_1 + C_2 \ln x) x^m, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
Caso 3	complexas conj. $m_1 = \overline{m_2} = \alpha + i\beta$	$y(x) = x^\alpha [C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x)], C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Método da redução de ordem

Considere-se a equação $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ e $y_1(x)$ uma solução da equação. Uma base para as soluções da equação é $\{y_1, y_2\}$ onde $y_2(x) = u(x)y_1(x)$, sendo

$$u(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx$$

Equação não homogênea

- Equação não homogênea: $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ (NH)
- Equação homogênea associada: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (H)

A solução geral de (NH) pode ser escrita na forma: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, onde y_h é a solução geral de (H) e y_p uma solução particular de (NH).

MÉTODO DA VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS.

Seja $\{y_1, y_2\}$ uma base para as soluções de (H) e $W(y_1, y_2)$ o *wronskiano* de y_1, y_2 . Então

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)r(x)}{W(y_1, y_2)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)r(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

Caso particular: MÉTODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS.

Aplica-se a equações do tipo: $y'' + ay' + by = r(x)$ a, b constantes.

Regra básica:

$r(x)$	escolha para y_p
$ke^{\alpha x}$	$Ce^{\alpha x}$
kx^n ($n \in \mathbb{N}$)	$k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \dots + k_1 x + k_0$
$k \cos(\beta x)$	$k_1 \cos(\beta x) + k_2 \sin(\beta x)$
$k \sin(\beta x)$	$k_1 \cos(\beta x) + k_2 \sin(\beta x)$
$ke^{\alpha x} \cos(\beta x)$	$e^{\alpha x} [k_1 \cos(\beta x) + k_2 \sin(\beta x)]$
$ke^{\alpha x} \sin(\beta x)$	$e^{\alpha x} [k_1 \cos(\beta x) + k_2 \sin(\beta x)]$

Regra da Modificação: Se na escolha de y_p , dada pela tabela anterior, temos uma solução da equação homogênea associada, multiplique-se por x (ou por x^2 se essa solução corresponde a uma raiz dupla da equação característica).

Observação: A regra básica admite a seguinte generalização:

Regra básica:(generalização)

$r(x)$	escolha para y_p
$e^{\alpha x} P_n(x) \cos(\beta x)$	$x^s e^{\alpha x} ([a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0] \cos(\beta x) + [b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0] \sin(\beta x))$
$e^{\alpha x} P_n(x) \sin(\beta x)$	<i>idem</i>

Nota: o parâmetro s corresponde ao número de vezes que $\alpha + i\beta$ é raiz do polinômio característico.

Equações diferenciais lineares de ordem $n > 2$ (coef. const.):

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = r(x) \quad (\text{NH})$$

$$\text{Solução Geral: } y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$\text{Equação Homogênea Associada: } y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (\text{H})$$

$$\text{Equação Característica associada: } \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (\text{I})$$

	Tipo de raízes de (I)	Solução geral de (H)
Caso 1	n raízes reais distintas $\lambda_1, \dots, \lambda_n$	$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k x}, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$
Caso 2	p raízes iguais $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \mu$ $(n-p)$ raízes reais distintas $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$	$y(x) = (c_1 + \cdots + c_p x^{p-1}) e^{\mu x} + \sum_{k=p+1}^n c_k e^{\lambda_k x}, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$
Caso 3	complexas conj. $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + i\beta$ $(n-2)$ raízes reais distintas $\lambda_3, \dots, \lambda_n$	$y(x) = e^{\alpha x} [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] + \sum_{k=3}^n c_k e^{\lambda_k x}, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

Equação diferencial linear de ordem $n > 2$ não homogênea:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$$

Variação dos Parâmetros:

$$y_p(x) = \sum_{k=1}^n y_k(x) \int \frac{W_k r(x)}{W} dx,$$

onde:

- ▷ W wronskiano de $y_1(x), \dots, y_n(x)$;
- ▷ W_k determinante que resulta do wronskiano de $y_1(x), \dots, y_n(x)$ substituindo a coluna k pelo vector $(n \times 1)$, $[0 \ \cdots \ 0 \ 1]^T$.

Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares

São sistemas de equações diferenciais lineares que podem ser escritos na forma: $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)$, onde $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ e $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{g}(t)$ são vectores $n \times 1$. A solução geral do sistema pode ser escrita na forma $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^{(h)}(t) + \mathbf{y}^{(p)}(t)$ sendo $\mathbf{y}^{(h)}(t)$ a solução geral do sistema homogêneo associado e $\mathbf{y}^{(p)}(t)$ uma solução particular do sistema não homogêneo.

Sistema Homogêneo de coeficientes constantes: $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ (H)

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que existe um vector não nulo $\mathbf{x}$ para o qual se verifica $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ então o vector $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}e^{\lambda t}$, é solução do sistema homogêneo (H).

Caso (I): A matriz A possui n vectores próprios $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ linearmente independentes.

Sejam $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ vectores próprios da matriz A associados aos valores próprios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ respectivamente. Note-se que os valores próprios podem ser iguais. Então uma base para as soluções de (H) será dada pelos vectores $\mathbf{y}^{(i)}(t) = \mathbf{x}^{(i)}e^{\lambda_i t}$ $i = 1 \dots n$.

A solução geral do sistema (H) é $\mathbf{y}(t) = C_1\mathbf{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n\mathbf{x}^{(n)}e^{\lambda_n t}$.

Caso (II): A matriz A não possui n vectores próprios $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ linearmente independentes.

(II)-1: $\lambda = \mu$ é raiz dupla da equação $\det(A - \lambda I) = 0$ a que corresponde apenas a um vector próprio $\mathbf{x}$.

- Uma solução para o sistema (H) será $\mathbf{y}^{(1)}(t) = \mathbf{x}e^{\mu t}$.
- Uma segunda solução será $\mathbf{y}^{(2)} = \mathbf{x}te^{\mu t} + \mathbf{u}e^{\mu t}$, onde $\mathbf{u}$ é um vector que satisfaz $(A - \mu I)\mathbf{u} = \mathbf{x}$.
- Temos que $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}$ são linearmente independentes.

(II)-2: $\lambda = \mu$ é raiz tripla da equação $\det(A - \lambda I) = 0$ a que corresponde apenas a um vector próprio $\mathbf{x}$.

- Uma solução para o sistema (H) será $\mathbf{y}^{(1)}(t) = \mathbf{x}e^{\mu t}$.
- Uma segunda solução será $\mathbf{y}^{(2)} = \mathbf{x}te^{\mu t} + \mathbf{u}e^{\mu t}$, onde $\mathbf{u}$ satisfaz $(A - \mu I)\mathbf{u} = \mathbf{x}$.
- Uma terceira solução será $\mathbf{y}^{(3)} = \mathbf{x}\frac{t^2}{2}e^{\mu t} + \mathbf{u}te^{\mu t} + \mathbf{v}e^{\mu t}$, sendo $\mathbf{v}$ um vector solução de $(A - \mu I)\mathbf{v} = \mathbf{u}$
- Temos que $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \mathbf{y}^{(3)}$ são linearmente independentes.

(II)-3: $\lambda = \mu$ é raiz tripla da equação $\det(A - \lambda I) = 0$ a que correspondem dois vectores próprios $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$.

- Duas soluções l.i. do sistema (H): $\mathbf{y}^{(1)}(t) = \mathbf{x}^{(1)}e^{\mu t}$, $\mathbf{y}^{(2)}(t) = \mathbf{x}^{(2)}e^{\mu t}$.
- Terceira solução: $\mathbf{y}^{(3)} = \mathbf{x}te^{\mu t} + \mathbf{u}e^{\mu t}$, onde $\mathbf{x}$ é uma combinação linear de $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ tal que o sistema $(A - \mu I)\mathbf{u} = \mathbf{x}$ seja possível.
- Temos que $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \mathbf{y}^{(3)}$ são linearmente independentes.

Caso Complexo

No caso de a matriz, A , do sistema possuir um vector próprio complexo, $\mathbf{x} = \mathbf{v}^{(1)} + i\mathbf{v}^{(2)}$, associado a um valor próprio complexo $\lambda = a + ib$, então o vector $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{x}$ é, como vimos, uma solução (complexa) de (H). A proposição seguinte indica-nos como podemos construir dois vectores, de componentes reais, que são soluções linearmente independentes de (H).

Proposição 1 Considere-se o sistema de equações diferenciais $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ (H).

Suponha-se que $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^{(1)}(t) + i\mathbf{y}^{(2)}(t)$ é uma solução complexa de (H).

Então $\mathbf{y}^{(1)}(t)$ e $\mathbf{y}^{(2)}(t)$ são soluções (reais) de (H). Mais ainda, $\mathbf{y}^{(1)}(t)$ e $\mathbf{y}^{(2)}(t)$ são vectores linearmente independentes.

Sistema Não Homogêneo: $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)$ (NH)

Método da variação dos parâmetros

Para determinar a solução particular $\mathbf{y}^{(p)}$ do sistema (NH), considere-se $\mathbf{Y}(t)$ uma matriz fundamental para o sistema homogêneo associado a (NH), isto é $\mathbf{Y}(t)$ é uma matriz $n \times n$ cujas colunas são n vectores linearmente independentes que são solução do sistema homogêneo. A solução particular é dada por,

$$\mathbf{y}^{(p)}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{u}(t), \quad \text{onde} \quad \mathbf{u}(t) = \int \mathbf{Y}^{-1}(t)\mathbf{g}(t) dt.$$

Método da Diagonalização

Aplica-se a sistemas do tipo $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)$, onde A é uma matriz $n \times n$ constante que possui base de vectores próprios $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ associados, respectivamente, aos valores próprios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Considere-se a matriz cujas colunas são os vectores próprios de A , $\mathbf{X} = [\mathbf{x}^{(1)} \mathbf{x}^{(2)} \dots \mathbf{x}^{(n)}]$.

A matriz $\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}A\mathbf{X}$ é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são os valores próprios de A , $a_{ii} = \lambda_i$, $i = 1, \dots, n$.

Usando a mudança de variável $\mathbf{z} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{y}$ transforma-se o sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)$ no sistema

$$\mathbf{z}' = \mathbf{D}\mathbf{z} + \mathbf{h}(t),$$

onde $\mathbf{h}(t) = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{g}(t)$. Obtém-se assim um sistema composto por n equações diferenciais lineares de 1ª ordem dado, em coordenadas, por

$$z'_i - \lambda_i z_i = h_i(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Após a resolução de cada uma destas equações lineares retorna-se à variável inicial $\mathbf{y}$.

A solução geral do sistema é o vector $\mathbf{y}(t) = \mathbf{X}\mathbf{z}(t)$

Transformada de Laplace

No que se segue considera-se $F(s) \stackrel{\text{not.}}{=} \mathcal{L}\{f(t)\} \stackrel{\text{def.}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$.

Propriedades da Transformada de Laplace

1. $\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}$ (linearidade)
2. $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$
3. $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
4. $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - s^2f^{(n-3)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
5. $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$
6. $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$ (1º teorema do deslocamento)
7. $\mathcal{L}\{H_c(t)f(t-c)\} = e^{-sc}F(s)$ (2º teorema do deslocamento)
8. $\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \times \mathcal{L}\{g(t)\}$ onde $f * g = \int_0^t f(t-u)g(u) du$.

Propriedades Adicionais da Transformada de Laplace

1. $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s)$
2. $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} F(\tilde{s}) d\tilde{s}$.

Tabela de Transformadas

	$f(t)$	$F(s)$		$f(t)$	$F(s)$
1	1	$\frac{1}{s} \ (s > 0)$	6	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2} \ (s > a)$
2	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}} \ (s > 0)$	7	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2} \ (s > a)$
3	e^{at}	$\frac{1}{s-a} \ (s > a)$	8	$H_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s} \ (s > 0)$
4	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2} \ (s > 0)$	9	$\delta(t-c)$	$e^{-cs} \ (s > 0)$
5	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2} \ (s > 0)$			

Convolução

Dadas duas funções, f e g , a convolução de f com g é $f * g = \int_0^t f(t-u)g(u) du$.

Introdução Aos Métodos Numéricos Para EDO's

Considere-se o PVI:

$$y' = f(x, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (*)$$

Suponha-se que o problema de valor inicial tem solução única, $y(t)$, no intervalo, $I = [t_0, t_0 + \alpha]$ para algum $\alpha > 0$. Mais ainda, suponha-se que, para todo $t \in I$, $|y(t)| \leq b$, para algum $b > 0$. Podemos aproximar a solução do PVI (*), no intervalo I , usando o método de Euler.

Método de Euler

Considere-se o rectângulo, R , definido por:

$$R: \quad t_0 \leq x \leq t_0 + \alpha, \quad |y| \leq b$$

Dado um número natural N , divida-se o intervalo $I = [t_0, t_0 + \alpha]$ em N sub-intervalos de igual amplitude, $h = \alpha/N$, e de extremos $t_0, t_1, \dots, t_N = t_0 + \alpha$. Note-se que $t_k = t_0 + kh$, $k = 0, \dots, N$. O método de Euler gera uma sequência, *Processo Iterativo do método de Euler*:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = y(t_0) \\ y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad k = 0, \dots, N-1 \end{array} \right.$$

Estimativa Para o Erro de Aproximação de $y(t_N)$:

$$|y(t_N) - y_N| \leq \frac{Dh}{2L} [e^{\alpha L} - 1],$$

onde D e L são constantes positivas tais que

$$\max_{(x,y) \in R} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| \leq L; \quad \max_{(x,y) \in R} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + f(t, y) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| \leq D$$

Observação: Por forma a garantir a existência dos máximos nas desigualdades anteriores, admite-se sempre que para o problema (*) a função f é contínua e tem derivadas parciais contínuas no rectângulo (fechado) R .