DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Análise Matemática III 2005/2006

Cursos: EC, EE, EI, EM, EQ, GEI

FICHA DE EXERCÍCIOS EXTRA N.º 1

Nota. Os exercícios constantes desta ficha poderão ser incluídos nas provas de avaliação de AM III.

1 Existência e Unicidade de Soluções. O Método de Picard.

Exercício 1

Determine as 3 primeiras aproximações, $y_0(x)$, $y_1(x)$ e $y_2(x)$, do método de Picard para os seguintes problemas.

a. $y' = x - y, \ \ y(0) = 1$

b. $y' = x^2 + y, \ \ y(1) = 3$

c. $y' = x + y^2, \ \ y(0) = 0$

d. $y' = 1 + xy, \ \ y(1) = 2$

e. $y' = e^x + y, \ \ y(0) = 0$

f. $y' = x^2 - y, \ \ y(1) = 2$

g. $y' = x^2 + y^2, \ \ y(0) = 1$

h. $y' = e^x + y^2, \ \ y(0) = 0$

i. $y' = 1 + y^2, \ \ y(0) = 0$

Exercício 2

Considere o problema de valor inicial:

$$y' = 2x(y+1), \ \ y(0) = 0.$$

a. Verifique que a solução do problema é $y(x) = e^{x^2} - 1$.

b. Construa o esquema iterativo de Picard para o problema.

c. Mostre que o esquema iterativo converge para a solução do problema.

Exercício 3

Verifique que os problemas seguintes têm solução única no intervalo indicado.

a. $y' = y^2 + \cos\left(x^2\right), \ \ y(0) = 0; \ \ 0 \leqslant x \leqslant 1/2$

b. $y' = 1 + y^2, \ \ y(0) = 0; \ \ 0 \leqslant x \leqslant 2^{-2/3}$

c. $y' = e^{-x^2} + y^2, \ \ y(1) = 0; \ \ 0 \leqslant x \leqslant 1 + \sqrt{e}/2$

d. $y' = 1 + y + y^2\cos(x), \ \ y(0) = 0; \ \ 0 \leqslant x \leqslant 1/3$

e. $y' = e^{-x^2} + y^2, \ \ y(0) = 1; \ \ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{1 + \left(1 + \sqrt{2}\right)^2}$

Exercício 4

Considere o problema de valor inicial.

$$y' = 1 + y^2, \;\; y(0) = 0, \qquad (*)$$

e o rectângulo $R: \; 0 \leqslant x \leqslant a, \;\; -b \leqslant y \leqslant b,$ com $a, b > 0$.

a. Mostre que o problema $(*)$ tem solução única para $0 \leqslant x \leqslant \min\left\{a, \dfrac{b}{1+b^2}\right\}$.

b. Mostre que $\max\left\{\dfrac{b}{1+b^2}\right\} = \dfrac{1}{2}$.

c. Conclua que a solução de $(*)$ existe para $0 \leqslant x \leqslant {}^1\!/_2$.

d. Haverá um limite máximo para a incógnita x? (sug. determine a solução de $(*)$.)

Exercício 5

Considere o problema de valor inicial.

$$y' = x^2 + y^2, \;\; y(0) = 0, \qquad (*)$$

e o rectângulo $R: \; 0 \leqslant x \leqslant a, \;\; -b \leqslant y \leqslant b,$ com $a, b > 0$.

a. Mostre que o problema $(*)$ tem solução única para $0 \leqslant x \leqslant \min\left\{a, \dfrac{b}{a^2+b^2}\right\}$.

b. Mostre que, para um valor de a fixo, temos que $\max\left\{\dfrac{b}{a^2+b^2}\right\} = \dfrac{1}{2a}$.

c. Mostre que o valor máximo de $\alpha = \min\left\{a, \frac{1}{2a}\right\}$ verifica-se quando $a = 1/\sqrt{2}$.

d. Conclua que a solução de $(*)$ existe para $0 \leqslant x \leqslant 1/\sqrt{2}$.

FIM