Exercício 1.3.9.

Queremos determinar f de modo que x seja factor integrante da EDO

$$fy' + x^2 + y = 0,$$

ou seja, determinar f de modo que a equação

$$xfy' + x\left(x^2 + y\right) = 0,$$

seja exacta, isto é, fazendo $M(x, y) = x^3 + xy$ e $N(x, y) = xf$, de modo que se verifique

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial N}{\partial x} \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial\left(x^3 + xy\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(xf\right)}{\partial x} \\ &\Leftrightarrow x = f + xf' \\ &\Leftrightarrow f' = 1 - \frac{f}{x}. \end{aligned}$$

Ora, para determinarmos a família de funções f , basta-nos resolver a EDO anterior (onde f é a variavel dependente e x a independente). Esta equação não é separável, mas fazendo a substituição

$$\begin{aligned} u &= \frac{f}{x} \Longleftrightarrow f = ux \\ &\Longrightarrow f' = u'x + u \end{aligned}$$

temos

$$
\begin{aligned}
u'x+u &= 1-u \\
&\Leftrightarrow u'x = 1-2u \\
&\Leftrightarrow \frac{u'}{1-2u} = \frac{1}{x} \\
&\Leftrightarrow \int \frac{u'}{1-2u}dx = \int \frac{1}{x}dx + C_1, \qquad (C_1 \in \mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow -2\ln|1-2u| = \ln|x| + C_1 \\
&\Leftrightarrow \ln|1-2u| = -2\ln|x| + C_2, \qquad (C_2 \in \mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow \ln|1-2u| + \ln|x|^2 = C_2 \\
&\Leftrightarrow \ln\left(x^2\,|1-2u|\right) = C_2 \\
&\Leftrightarrow x^2\,|1-2u| = C_3, \qquad (C_3 \in \mathbb{R}^+) \\
&\Leftrightarrow x^2\,(1-2u) = C_4, \qquad (C_4 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}) \\
&\Leftrightarrow x^2\left(1-2\frac{f}{x}\right) = C_4 \\
&\Leftrightarrow -2\frac{f}{x} = \frac{C_4}{x^2} - 1 \\
&\Leftrightarrow f = \frac{C}{x} + \frac{x}{2}, \qquad (C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}).
\end{aligned}
$$

Portanto, *uma família* de funções $f(x)$ nas condições do enunciado é dada por $f(x) = \frac{C}{x} + \frac{x}{2}$, com $C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.