Encontre um factor integrante para a EDO e resolva-a.

$$2\cosh(x)\cos(y)dx = \sinh(x)\sin(y)dy$$

<u>Resolução:</u>

$$\begin{aligned} & 2\cosh(x)\cos(y)dx = \sinh(x)\sin(y)dy \\ \Leftrightarrow\quad & 2\cosh(x)\cos(y)dx - \sinh(x)\sin(y)dy = 0 \end{aligned}$$

1. Ver se a equação é exacta.

$M(x,y) = 2\cosh(x)\cos(y)$ e $N(x,y) = -\sinh(x)\sin(y)$

Se a equação for exacta então vale a igualdade $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Ora, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = -2\cosh(x)\sin(y)$ e $\dfrac{\partial N}{\partial x} = -\cosh(x)\sin(y)$

Logo, a equação dada não é exacta.

2. Determinar factor integrante.

Vamos ver se existe um factor integrante, f, que dependa apenas da variável x, $f = f(x)$. Assim, multiplicando a equação inicial por $f(x)$ obtemos uma equação exacta:

$$2f(x)\cosh(x)\cos(y)dx - f(x)\sinh(x)\sin(y)dy = 0 \qquad (\oplus)$$

onde

$$M(x,y) = 2f(x)\cosh(x)\cos(y) \quad \text{e} \quad N(x,y) = -f(x)\sinh(x)\sin(y)$$

Como a equação ($\oplus$) é exacta então

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Leftrightarrow\quad & -2f(x)\cosh(x)\sin(y) = -\sin(y)(f'(x)\sinh(x) + f(x)\cosh(x)) \\ \Leftrightarrow\quad & 2f(x)\cosh(x) = f'(x)\sinh(x) + f(x)\cosh(x) \\ \Leftrightarrow\quad & f'(x)\sinh(x) = f(x)\cosh(x) \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \\ \Leftrightarrow\quad & \ln|f(x)| = \ln|\sinh(x)| + c \qquad\qquad c \in IR \\ \Leftrightarrow\quad & |f(x)| = c|\sinh(x)| \qquad\qquad c > 0 \end{aligned}$$

Logo <u>um factor integrante</u> é $f(x) = \sinh(x)$.

3. Resolução da EDO.

$$2\,sinh(x)cosh(x)cos(y)dx - sinh^2(x)sin(y)dy = 0$$

Por construção, esta equação é exacta (verifique!)

Pretende-se encontrar $u(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\,sinh(x)cosh(x)cos(y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -sinh^2(x)sin(y)$$

Integrando a segunda igualdade em ordem a y, obtemos

$$u(x,y) = sinh^2(x)cos(y) + C(x).$$

Derivando agora, esta igualdade em ordem a x, temos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\,sinh(x)cosh(x)cos(y) + C'(x)$$

mas sabemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\,sinh(x)cosh(x)cos(y).$$

Assim, podemos concluir que $C'(x) = 0$, e portanto $C(x) = 0$ é <u>uma primitiva</u>.

Logo a solução geral é

$$sinh^2(x)cos(y) = c \qquad c \in IR$$