Capítulo 4

O Método da Transformada de Laplace

4.1 Cálculo da Transformada de Laplace

Exercício 4.1.1
Calcule a transformada da Laplace de cada uma das seguintes funções usando a definição (a e b são constantes).

a. $f(t) = 1$ b. $f(t) = e^{at}$ c. $f(t) = at + b$

d. $f(t) = e^{at+b}$ e. $f(t) = \cos^2(at)$ f. $f(t) = \sin(at)\cos(bt)$

g. $f(t) = \cos(at)$ h. $f(t) = \sin^2(at)$ i. $f(t) = \sin(at)$

j. $f(t) = \sinh at$ k. $f(t) = \cosh at$ l. $f(t) = \sin(at)\cos(bt)$

m. $f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < t < 1 \\ 1 & , \quad 1 \leq t \end{cases}$ n. $f(t) = \begin{cases} \sin t & , \quad 0 < t < \pi \\ 0 & , \quad \pi \leq t \end{cases}$

Exercício 4.1.2
Resolva os seguintes problemas de valor inicial.

a. $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

b. $y'' - 5y' + 4y = e^{2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$

c. $y'' + 3y' + 7y = \cos t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$

d. $2y'' + y' - y = e^{3t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$

e. $y'' - y = t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

f. $y'' + y = t^2 \sin t, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

Exercício 4.1.3
Sabendo que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}/2$, use a definição para calcular $\mathscr{L}\left\{1/\sqrt{t}\right\}$. (Sug. No integral, faça a mudança de variável $u = \sqrt{t}$)

4.2 Propriedades da Transformada de Laplace

Exercício 4.2.1
Utilizando as propriedades e a tabela calcule as transformadas de Laplace das seguintes funções.

a. $f(t) = te^t$ b. $f(t) = t^{13}$ c. $f(t) = t\sin(at)$

d. $f(t) = t^2\cos(at)$ e. $f(t) = te^{-t} + 3t^2e^{-t}$ f. $f(t) = t^3e^{-3t} + 4e^{-t}\cos(3t)$

Exercício 4.2.2
Calcule a transformada de Laplace inversa de cada uma das seguintes funções. (a e b são constantes)

a. $F(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$ b. $F(s) = \dfrac{s^2}{(s-1)^2}$ c. $F(s) = \dfrac{7}{(s+2)^2+3}$

d. $F(s) = \dfrac{1}{s^2+2s+5}$ e. $F(s) = \dfrac{-1}{(s-2)^2}$ f. $F(s) = \dfrac{s-7}{25+(s-7)^2}$

g. $F(s) = \dfrac{s}{(s+a)^2+b^2}$ h. $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$ i. $F(s) = \dfrac{(s^2-5)}{(s^3+4s^2+3s)}$

Exercício 4.2.3
Resolva os problemas de valor inicial:

a. $y'' + y = \sin t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

b. $y'' + y = t\sin t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

c. $y'' - 2y' + 7y = \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

d. $y'' - 2y' + y = te^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

e. $y'' + y' + y = 1 + e^{-t}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -5.$

Exercício 4.2.4
Sabendo que $\mathscr{L}\{f(t)/t\} = \int_s^{+\infty} F(u)\,\mathrm{d}u$, onde $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$, calcule as transformadas de Laplace das seguintes funções:

a. $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ b. $f(t) = \dfrac{\cos at - 1}{t}$ c. $f(t) = \dfrac{e^{at} - e^{bt}}{t}$

Exercício 4.2.5
Seja $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$. Sabendo que $f(t) = -1/t\mathscr{L}^{-1}\{F'(s)\}$, calcule as transformadas de Laplace inversas das seguintes funções:

a. $F(s) = \ln\left(\dfrac{s+a}{s-a}\right)$ b. $F(s) = \ln\left(1 - \dfrac{a^2}{s^2}\right)$ c. $F(s) = \operatorname{arctg}\dfrac{a}{s}$

4.3 Função Degrau Unitário de Heavyside

Exercício 4.3.1
Determine as transformadas de Laplace inversas das funções.

a. $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s}$ b. $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s^2}$ c. $F(s) = \dfrac{e^{-3s}}{s^2+4}$

d. $F(s) = \dfrac{e^{-s} - 2e^{-2s} + 2e^{-3s} - e^{-4s}}{s^2}$ e. $F(s) = \dfrac{e^{-3s}}{s^2 - 2s - 3}$

Exercício 4.3.2
Resolva os problemas de valor inicial:

a. $y'' + 4y = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le t < 4 \\ 0 & , \quad 4 < t \end{cases} \quad , \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -2.$

b. $y'' + y = \begin{cases} \cos t & , \quad 0 \le t < \pi/2 \\ 0 & , \quad \pi/2 \le t \end{cases} \quad , \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1.$

c. $y'' + y' + 7y = \begin{cases} t & , \quad 0 \le t < 2 \\ 0 & , \quad 2 \le t \end{cases} \quad , \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

4.4 Função δ de Dirac

Exercício 4.4.1
Resolva os seguintes problemas de valor inicial.

a. $y'' - 4y' + 4y = 3\delta(t-1) + \delta(t-2), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

b. $y'' + y = \sin(t) + \delta(t-\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

c. $y'' + 2y' + y = e^{-t} + 3\delta(t-3), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$

d. $y' + y = \delta(t) + \delta(t-1), \quad y(0) = 0.$

e. $y'' + y = \delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$

4.5 Convolução

Exercício 4.5.1
Para os seguintes pares de funções, f e g, determine a sua convolução $f * g$.

a. $f(t) = e^{at},\ g(t) = e^{bt}, \quad a \ne b.$ b. $f(t) = \cos(at),\ g(t) = \cos(bt).$

c. $f(t) = t,\ g(t) = \sin t.$

Exercício 4.5.2
Use a propriedade da convolução para calcular as transformada de Laplace inversa de cada uma das funções seguintes.

a. $F(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$ b. $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$ c. $F(s) = \dfrac{4}{s^2(s-2)}$

d. $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+4)(s+1)}$ e. $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)^2}$

4.6 Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

Exercício 4.6.1
Resolva os problemas de valor inicial.

a. $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

c. $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} t \\ 3e^t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d. $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$