

Capítulo 3

Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares

3.1 Sistemas de Equações Lineares com Coeficientes Constantes Homogêneos

Exercício 3.1.1

Encontre a solução geral dos seguintes sistemas de equações diferenciais.

a. $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$ b. $Y' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} Y$ c. $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} Y$

d. $Y' = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} Y$ e. $Y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y$ f. $Y' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} Y$

g. $Y' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} Y$ h. $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y$ i. $Y' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Y$

j. $Y' = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} Y$ k. $Y' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} Y$ l. $Y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} Y$

m. $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} Y$

Exercício 3.1.2

Resolva os seguintes problemas de valor inicial.

a. $Y' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} Y \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = -7$

b. $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} Y \quad y_1(0) = 4, \quad y_2(0) = 4$

c. $Y' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix} Y \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 2$

d. $Y' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} Y \quad y_1(0) = -1, \quad y_2(0) = 0$

e. $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.2 Sistemas de Equações Lineares Não Homogêneas**Exercício 3.2.1**

Encontre a solução geral dos seguintes sistemas lineares não homogêneos, usando o Método de Variação de Parâmetros.

a. $\begin{cases} y_1' = y_2 + e^{3t} \\ y_2' = y_1 - 3e^{3t} \end{cases} \quad \text{b.} \quad \begin{cases} y_1' = 4y_1 + y_2 + t \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2 - t \end{cases} \quad \text{c.} \quad \begin{cases} y_1' = 3y_1 - 4y_2 + 10 \cos t \\ y_2' = y_1 - 2y_2 \end{cases}$

Exercício 3.2.2

Resolva os seguintes P.V.I's usando o método de Variação de Parâmetros

a. $\begin{cases} y_1' = 4y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 2 - 16t^2 \end{cases}, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{cases} y_1' = y_2 + t \\ y_2' = -y_1 + 1 \end{cases}; \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 4y_2 + e^t \\ y_2' = y_1 - y_2 + e^t \end{cases}; \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercício 3.2.3

Encontre a solução geral dos seguintes sistemas lineares não homogêneos, usando o Método da diagonalização.

a. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 2y_2 + t \\ y_2' = 5y_1 - y_2 + e^t \end{cases} \quad \text{b.} \quad \begin{cases} y_1' = y_2 + e^{3t} \\ y_2' = y_1 - 3e^{3t} \end{cases} \quad \text{c.} \quad \begin{cases} y_1' = 4y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 2 - 16t^2 \end{cases}$

3.3 Exercícios Variados

Exercício 3.3.1

Verifique que o vector

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-t} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

é solução do sistema

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Exercício 3.3.2

Resolva os seguintes problemas de valor inicial/sistemas de equações.

- a. $\begin{cases} y_1' = 5y_1 - y_2 \\ y_2' = 3y_1 + y_2 \end{cases}, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- b. $\begin{cases} y_1' = -3y_1 + 2y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2 \end{cases}, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- c. $\begin{cases} y_1' = y_1 - 4y_2 \\ y_2' = 4y_1 - 7y_2 \end{cases}, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
- d. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + e^t \\ y_2' = 3y_1 - 2y_2 + t \end{cases}$

Exercício 3.3.3

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix}$.

- a. Determine k de modo que 1 seja valor próprio de A .
- b. Considere $k = 2$ e encontre as matrizes de mudança de base.
- c. Resolva o problema de valor inicial.

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + 2y_2 \end{cases}, \quad \text{com} \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$