Capítulo 1

Soluções dos exercícios

Capítulo 2

Soluções dos exercícios

2.1 Equações diferenciais lineares homogéneas de ordem dois. Método da redução de ordem.

Exercício 2.1.1
Uma solução é:

a. $y = C_2 + x \ln x + C_3 x$

b. $y = C_1 + C_2 e^x$

c. $y = C_1 + C_2 \ln x$

d. $y = C_1 + C_2 \ln x - \frac{1}{4}x^2$

e. $y = C_{41} + C_{42} \ln x + \frac{1}{2} \ln^2 x$

f. $y = C_1 + x + C_2 e^x (x+1) + C_2 e^x$

Exercício 2.1.2
A solução geral é:

a. $y = C_1 e^{-x} - C_2$

b. $y = C_1 - C_2 \ln x$

c. $y = C_1 + C_2 \cos x$

d. $y = C_1 + C_2 e^{\frac{1}{2}x^2}$

e. $y = C_1 + C_2 \sinh(x)$

f. $y = C_1 \frac{\sin x}{x} - C_2 \frac{\cos x}{x}$

g. $y = C_1 x^3 + C_2 x^3 \ln x$

h. $y = C_1 x + C_2(-1 + x^2)$

i. $y = C_1 x - C_2 \ln x$

Exercício 2.1.3
Uma solução particular é:

a. $y = 4\cos 3x - 2\sin 3x$

b. $y = e^{-x} + xe^{-x}$

c. $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2x^{\frac{3}{2}}$

Exercício 2.1.4
Uma equação é:

a. $y'' + y = 0$

b. $y'' - 2y' + y = 0$

c. $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$

2.2 Equações diferenciais lineares homogéneas de ordem dois com coeficientes constantes.

Exercício 2.2.1
A solução geral é:

a. $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-5x}$

b. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{2}{5}x}$

c. $y = C_1 + C_2 e^{\frac{9}{2}x}$

d. $y = C_1 e^{x\left(\sqrt{5}-2\right)} + C_2 e^{x\left(-\sqrt{5}-2\right)}$

e. $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$

f. $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

g. $y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \sin\frac{\sqrt{3}x}{2} + C_2 \cos\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$

h. $y = C_1 \cos 2x - C_2 \sin 2x$

i. $y = e^x \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$

j. $y = C_1 e^{-\frac{\pi x}{4}} + C_2 e^{\frac{\pi x}{4}}$

k. $y = C_1 e^{\sqrt{k}x} + C_2 e^{-\sqrt{k}x}$

l. $y = C_1 e^{-kx} + C_2 x e^{-kx}$

Exercício 2.2.2
Uma solução particular é:

a. $y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$

b. $y = e^{-\frac{1}{2}x}$

c. $y = e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{x}{3}e^{-\frac{1}{3}x}$

d. $y = e^{-\frac{5}{2}x} - e^{\frac{5}{2}x}$

e. $y = -7e^{2x} + 3e^{-x}$

f. $y = -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos\frac{1}{2}x$

g. $y = e^{\frac{x}{4}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{23}x}{4} + C_2 \sin\frac{\sqrt{23}x}{4}\right)$

h. $y = -2\pi e^{-\frac{2\pi}{3}} e^{\frac{2}{3}x} + 2e^{-\frac{2\pi}{3}} x e^{\frac{2}{3}x}$

i. $y = \frac{1}{2\sqrt{k^2}}\left(\sqrt{k^2}+1\right)e^{x\sqrt{k^2}} + \frac{1}{2\sqrt{k^2}}\left(\sqrt{k^2}-1\right)e^{-x\sqrt{k^2}}$

2.3 Equações de Euler-Cauchy

Exercício 2.3.1
A solução geral é:

a. $y = C_1x^3 + C_2x^2$

b. $y = \frac{C_1}{x^4} + C_2x^5$

c. $y = -\frac{1}{x}(C_1 + C_2x)$

d. $y = C_1x\cos(\ln x) + C_2x\sin(\ln x)$

e. $y = C_1\cos(\ln x) - C_2\sin(\ln x)$

f. $y = C_1 - C_2\ln x$

g. $y = C_1x^{-\frac{1}{2}} + C_2x^{-\frac{3}{2}}$

h. $y = C_1x^{-3} + C_2x^{-3}\ln x$

Exercício 2.3.2
Uma solução particular é:

a. $y = 2x - \frac{1}{2}x^2$

b. $y = -6x^{-\frac{5}{2}}\ln x$

c. $y = 3x^2\ln x$

d. $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x}\ln$

2.4 Existência e Unicidade. O Wronskiano

Exercício 2.4.1
a. Sim.

b. Sim.

c. Não.

d. Não.

e. Não.

Exercício 2.4.2
c. A solução particular é $y = 2\sqrt{t}$.

2.5 Equações diferenciais não homogeneas. Método dos coeficientes indeterminados. Método da variação dos parâmetros

Exercício 2.5.1
A solução geral é:

a. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} - 1 - 2x^2$

b. $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} - xe^{x}$

c. $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{x^2}{2}e^{-x}$

d. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + xe^{2x}$

e. $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + e^{x}(6\cos x + 8\sin x)$

f. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} + x^3$

g. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{5} \sin 3x$

h. $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-7x} - \frac{3}{5} \sin 5x - \frac{1}{10} \cos 5x + xe^{5x}$

i. $y = C_1 e^{-4x} + C_2 xe^{-4x} + 16x^2 e^{-4x} + \frac{1}{2} e^{4x}$

j. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-\frac{1}{3}x} - 10 + 3x + \frac{1}{2} \sin x$

Exercício 2.5.2
A solução particular é $y = \frac{1}{8} e^{-2x} - \frac{1}{16} e^{2x} + \frac{1}{2} x - \frac{1}{16} e^{-2x} + -\frac{1}{4} xe^{-2x}$.

Exercício 2.5.3
A solução geral é:

a. $y = C_1 e^{2x} + C_2 xe^{2x} + \frac{1}{6} x^3 e^{2x}$

b. $y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + \frac{x}{3} \sin(3x) + \frac{\cos(3x)}{9} \ln |\cos(3x)|$

c. $y = C_1 e^{2x} + C_2 xe^{2x} + e^{-x} \left(\frac{2}{25} \cos x - \frac{3}{50} \sin x \right)$

d. $y = C_1 e^{x} + C_2 xe^{x} + \frac{1}{2x} e^{x}$

e. $y = C_1 e^{x} + C_2 xe^{x} + \frac{3}{20} x^5 e^{x}$

f. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 xe^{-3x} - 8\pi xe^{-3x} + 16xe^{-3x} \arctan x - 8e^{-3x} \ln \left(x^2 + 1 \right)$

g. $y = \frac{1}{2x^4} + C_1 x^3 + C_2 x^2$

h. $y = C_1 x + C_2 x^2 - x \cos x$

i. $y = C_1 x^2 + C_2 + x^2 e^{x}$

j. $y = C_1 \sqrt{x} + C_2 x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{3} x^3$

2.6 Equações diferenciais lineares de ordem n, homogeneas e não homogeneas

Exercício 2.6.1
A solução particular é:

a. $y = 1 - \frac{1}{2} x^2 + 5x^3$

b. $y = e^{x} - 3e^{2x}$

c. $y = 3 \cos x + 12$

Exercício 2.6.2

A solução geral é:

a. $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x}$

b. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + C_3 x^2 e^{-3x}$

c. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^3 + C_4 x^2$

d. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x - C_4 x \sin x$

e. $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x}$

f. $y = C_1 e^x + C_2 (\cos x) e^{-x} + C_3 (\sin x) e^{-x}$

Exercício 2.6.3

A solução particular é $y = e^{-x} \cos x + x e^{-x} \cos x$

Exercício 2.6.4

A solução geral é

a. $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{2x} + \cos x - 2 \sin x$

b. $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x} + e^{-x} \cos x$

c. $y = C_1 x + C_2 x^{-1} + C_3 x^2 - \frac{1}{12x^2}$

d. $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^{-1} + \frac{1}{8} x^3 \ln x - \frac{7}{32} x^3$

e. $y = C_1 x^{-1} + C_2 + C_3 x + x^{-1} e^x$

f. $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 x^2 e^{2x} + \frac{8}{105} x^{\frac{7}{2}} e^{2x}$

g. $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x} + x + e^x$

h. $y = C_1 x + C_2 \sqrt{x} + C_3 x^{3/2} + \frac{1}{90} x^{11/2}$

Exercício 2.6.5

a. A solução particular do PVI $\begin{cases} y^{(4)} + 10y'' + 9y = 40 \sinh x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 6 \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = -26 \end{cases}$ é: $y = e^x + \sin x - \frac{1}{e^x} + \sin 3x$.

b. A solução particular do PVI $\begin{cases} x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 24x^5 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 3 \\ y''(1) = 14 \end{cases}$ é: $y = x - x^3 + x^5$.

2.7 Exercícios variados

Exercício 2.7.1

A solução particular dos problemas de valores de fronteira são, respectivamente,

a. $y = 3\cos 2x + \frac{3}{2}\sin 2x$.

b. $y = \frac{4e^9}{1+9e^{20}}e^{3x} + \frac{9e^9-3e^{-11}}{e^{-10}+9e^{10}}e^{-\frac{1}{3}x}$.

Exercício 2.7.2

A solução geral é:

a. $y = e^{-3x}\left(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2}\right)$

b. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-\frac{1}{2}x} + x^2 - 3x$

c. $y = C_1x^2 + C_2x^2\ln x + 3$

d. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{4x} - 5e^{2x}$

e. $y = e^{-x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x - \cos 2x\right)$

f. $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x} - \frac{1}{4}xe^{-x} - \frac{1}{8}e^x + \frac{1}{4}xe^x - \frac{1}{8}e^{-x}$

Exercício 2.7.3

A solução dos PVI's são, respectivamente,

a. $y = 10x^2 - 5x^3 - x^2\sin\pi x$.

b. $y = x + 2x^3 - \frac{4}{x}$.

c. $y = -2x - \frac{2}{3x} - x^3 + \frac{26}{3}x^2$.

d. $y = 2e^x - xe^x$.