

Capítulo 2

Equações Diferenciais Ordinárias de Ordem Superior a Um

2.1 EDOs lineares homogêneas de ordem dois. Redução de ordem.

Exercício 2.1.1

As seguintes equações diferenciais de 2ª ordem podem ser resolvidas usando o método da redução de ordem. Determine uma solução das seguintes equações diferenciais.

a. $y'' = 1/x$

d. $xy'' + y' + x = 0$

b. $y'' = y'$

e. $x^2y'' + xy' = 1$

c. $xy'' + y' = 0$

f. $(x+1)y'' - (x+2)y' + x + 2 = 0$

Exercício 2.1.2

Determine a solução geral das equações diferenciais.

a. $y'' + y' = 0$

b. $xy'' + y' = 0$

c. $y'' - \cotg(x)y' = 0$

d. $xy'' - (x^2 + 1)y' = 0$

e. $-\cosh(x)y'' + \sinh(x)y' = 0$

Exercício 2.1.3

Verifique que as funções dadas são soluções das respectivas equações diferenciais. Determine a solução geral das equações diferenciais.

a. $xy'' + 2y' + xy = 0, \quad y_1(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

b. $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0, \quad y_1(x) = x^3$

c. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1(x) = x$

d. $x^2(\ln(x) - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad y_1(x) = x$

Exercício 2.1.4

Verifique que as funções dadas formam uma base de soluções das EDO's dadas. Resolva os PVI's.

- a. $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -6$, $y_1(x) = \cos(3x)$, $y_2(x) = \sin(3x)$
 b. $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = xe^{-x}$
 c. $4x^2y'' - 3y = 0$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 2.5$, $y_1(x) = x^{-1/2}$, $y_2(x) = x^{3/2}$

Exercício 2.1.5

Determine uma EDO de 2ª ordem homogênea que admita como base de soluções as seguintes funções:

- a. $y_1(x) = \sin(x)$, $y_2(x) = \cos(x)$
 b. $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = xe^x$
 c. $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$

2.2 EDOs lineares homogêneas de ordem dois com coeficientes constantes.

Exercício 2.2.1

Determine a solução geral das seguintes EDO's. Faça a verificação da sua resposta.

- a. $y'' + 9y' + 20y = 0$ e. $y'' - 6y' + 9y = 0$ i. $3y'' - 6y' + 6y = 0$
 b. $10y'' + 6y' - 4y = 0$ f. $3y'' + 6y' + 3y = 0$ j. $16y'' - \pi^2y = 0$
 c. $2y'' - 9y' = 0$ g. $y'' + y' + y = 0$ k. $y'' - ky = 0$ ($k \neq 0$)
 d. $y'' + 4y' - y = 0$ h. $2y'' + 8y = 0$ l. $y'' + 2ky' + k^2y = 0$ ($k \neq 0$)

Exercício 2.2.2

Resolva os PVI's. Faça a verificação da sua resposta.

- a. $y'' + y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$
 b. $4y'' - 4y' - 3y = 0$, $y(-2) = e$, $y'(-2) = -e/2$
 c. $9y'' + 6y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
 d. $4y'' - 25y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -5$
 e. $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = -4$, $y'(0) = -17$
 f. $4y'' + 16y' + 17y = 0$, $y(0) = -0.5$, $y'(0) = 1$
 g. $2y'' - y' + 3y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$
 h. $9y'' - 12y' + 4y = 0$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 2$
 i. $y'' - k^2y = 0$ ($k \neq 0$), $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

2.3 Equações de Euler-Cauchy

Exercício 2.3.1

Determine a solução geral das equações diferenciais seguintes.

a. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$

e. $x^2y'' + xy' + y = 0$

b. $x^2y'' - 20y = 0$

f. $xy'' + y' = 0$

c. $xy'' + 2y' = 0$

g. $4x^2y'' + 12xy' + 3y = 0$

d. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$

h. $x^2y'' + 7xy' + 9y = 0$

Exercício 2.3.2

Resolva os seguintes PVI's e faça um esboço do gráfico da solução.

a. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y(1) = 1.5, \quad y'(1) = 1$

b. $4x^2y'' + 24xy' + 25y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = -6$

c. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 3$

d. $x^2y'' + 3xy' + y = 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = -4$

2.4 Existência e Unicidade. O Wronskiano

Exercício 2.4.1

Verifique se as seguintes funções são linearmente independentes nos intervalos indicados, utilizando o Wronskiano.

a. $e^{-x}, \quad e^x, \quad \text{em qualquer intervalo}$

b. $x^2, \quad x^2 \ln x, \quad (x \geq 1)$

c. $\sin(2x), \quad \cos(x) \sin(x), \quad (x < 0)$

d. $\ln(x), \quad (\ln(x))^4, \quad (1 \leq x \leq 2)$

e. $0, \quad \tan(x), \quad (|x| < \pi/4)$

Exercício 2.4.2

Considere a seguinte equação diferencial

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0$$

- Mostre que $y_1(t) = \sqrt{t}$ e $y_2(t) = \frac{1}{t}$ são soluções da equação diferencial anterior no intervalo $]0, +\infty[$.
- Mostre que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ formam um sistema fundamental de soluções no intervalo $]0, +\infty[$.
- Determine a solução que satisfaz $y(1) = 2$ e $y'(1) = 1$.

2.5 EDOs não homogêneas.**Exercício 2.5.1**

Determine a solução geral das equações diferenciais seguintes, usando o método dos coeficientes indeterminados para determinar uma solução particular da equação diferencial.

- | | |
|---------------------------------------|--|
| a. $y'' - 4y = 8x^2$ | f. $y'' + y' - 6y = -6x^3 + 3x^2 + 6x$ |
| b. $y'' - 3y' + 2y = e^x$ | g. $y'' + 4y = \sin(3x)$ |
| c. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ | h. $y'' + 2y' - 35y = 12e^{5x} + 37\sin(5x)$ |
| d. $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$ | i. $y'' + 8y' + 16y = 64\cosh(4x)$ |
| e. $y'' + 6y' + 9y = 50e^{-x}\cos(x)$ | j. $3y'' + 10y' + 3y = 9x + 5\cos x$ |

Exercício 2.5.2

Resolva o seguinte problema de valor inicial $\begin{cases} y'' - 4y = e^{-2x} - 2x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Exercício 2.5.3

Determine a solução geral das seguintes EDO's, usando o método de variação dos parâmetros para determinar uma solução particular da equação diferencial.

- | | |
|------------------------------------|---|
| a. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$ | f. $y'' + 6y' + 9y = \frac{16e^{-3x}}{x^2+1}$ |
| b. $y'' + 9y = \sec(3x)$ | g. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 21x^{-4}$ |
| c. $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}\cos x$ | h. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3\cos x$ |
| d. $y'' - 2y' + y = e^x/x^3$ | i. $xy'' - y' = (3+x)x^2e^x$ |
| e. $y'' - 2y' + y = 3x^3e^x$ | j. $4x^2y'' + 8xy' - 3y = 7x^2 - 15x^3$ |

2.6 Equações diferenciais lineares de ordem n , homogêneas e não homogêneas

Exercício 2.6.1

Verifique que as funções dadas formam uma base de soluções das equações diferenciais. Resolva os PVI's.

- $1, x, x^2, x^3$; $y^{(4)} = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -1, y'''(0) = 30$
- e^x, e^{-x}, e^{2x} ; $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0, y(0) = -2, y'(0) = -5, y''(0) = -11$
- $1, \cos x, \sin x$; $y''' + y' = 0, y(0) = 15, y'(0) = 0, y''(0) = -3$

Exercício 2.6.2

Determine a solução geral das equações diferenciais seguintes.

- $y''' + y'' - 2y' = 0$
- $y''' + 9y'' + 27y' + 27y = 0$
- $y^{(4)} = 0$
- $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$
- $y''' - y'' - y' + y = 0$
- $y''' + y'' - 2y = 0$

Exercício 2.6.3

Resolva o seguinte PVI.

$$\begin{cases} y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = -2 \\ y'''(0) = 2 \end{cases} \quad (\text{Nota: } \lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2)$$

Exercício 2.6.4

Determine a solução geral das equações diferenciais seguintes.

- $y''' - 4y' = 10 \cos x + 5 \sin x$
- $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x} \sin x$
- $x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^{-2}$
- $x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x$
- $xy''' + 3y'' = e^x$
- $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = \sqrt{x}e^{2x}$
- $y''' + 3y'' + 3y' + y = 8e^x + x + 3$
- $4x^3 y''' + 3xy' - 3y = 4x^{11/2}$

Exercício 2.6.5

Resolva os seguintes PVI's.

$$\begin{aligned} \text{a. } \begin{cases} y^{(4)} + 10y'' + 9y = 40 \sinh x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 6 \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = -26 \end{cases} & \quad \text{b. } \begin{cases} x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 24x^5 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 3 \\ y''(1) = 14 \end{cases} \end{aligned}$$

2.7 Exercícios variados

Exercício 2.7.1

Resolva os seguintes problemas de valores de fronteira.

a.
$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(\pi/2) = -3 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 3y'' - 8y' - 3y = 0 \\ y(-3) = 1 \\ y'(3) = 1/e^2 \end{cases}$$

Exercício 2.7.2

Determine a solução geral das equações diferenciais seguintes.

a. $4y'' + 24y' + 37y = 0$

d. $y''' - 4y'' - y' + 4y = 30e^{2x}$

b. $2y'' - 3y' - 2y = 13 - 2x^2$

e. $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x} \cos(2x)$

c. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 12$

f. $y''' - y' = \sinh x$

Exercício 2.7.3

Resolva os seguintes problemas de valor inicial.

a.
$$\begin{cases} x^2y'' - 4xy' + 6y = \pi^2x^4 \sin(\pi x) \\ y(1) = 5 \\ y'(1) = 5 + \pi \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = \frac{16}{x} \\ y(1) = 5 \\ y'(1) = 13 \\ y''(1) = 10 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x^2y'' + xy' - y = 16x^3 \\ y(1) = -1 \\ y'(1) = 11 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} y''' - y'' - y' + y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$