

Capítulo 1

Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem

1.1 Conceitos Básicos

Exercício 1.1.1

Resolva as seguintes equações diferenciais.

- a. $y' = x^2$ b. $y' = \sin(3x)$ c. $y'' = x^{-4}$ d. $y' = xe^{-x^2}$

Exercício 1.1.2

Indique a ordem de cada uma das seguintes equações diferenciais. Verifique que a função dada é solução da equação correspondente. (*nota: a, b e c são constantes reais arbitrárias*)

- a. $y' + y = x^2 - 2$, $y = ce^{-x} + x^2 - 2x$
b. $y'' + y = 0$, $y = a \cos x + b \sin(x - 2x)$
c. $y''' = e^x$, $y = e^x + ax^2 + bx + c$
d. $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y = e^{-x}(a \cos x + b \sin x)$
e. $x + yy' = 0$, $x^2 + y^2 = 1$

- (i) O que acontece se substituirmos a solução da equação diferencial anterior por $x^2 - y^2 = 1$?
(ii) E se, na solução indicada, substituirmos 1 por 2? E por qualquer outro número?

Exercício 1.1.3

Para cada alínea verifique que y é solução da equação diferencial dada. Determine c de modo que a correspondente solução particular satisfaça a condição dada.

- a. $x^3 + y^3 y' = 0$, $x^4 + y^4 = c$, ($y > 0$), $y = 1$ quando $x = 0$.
b. $y' + 2y = 2.8$, $y = ce^{-2x} + 1.4$, $y = 1$ quando $x = 0$.
-

- c. $xy' = 3y$, $y = cx^3$, $y = 16$ quando $x = -4$.
 d. $yy' = 2x$, $y^2 - 2x^2 = c$, ($y > 0$), $y(1) = \sqrt{3}$.
 e. $y' = y \operatorname{tg} x$, $y = c \sec x$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$.
 f. $4yy' + x = 0$, $x^2 + 4y^2 = c$, ($y > 0$), $y(2) = 1$.

i. O que acontece se alterarmos a condição inicial para $y(a) = 0$, a constante qualquer?

Exercício 1.1.4

Suponha-se que a aceleração de um automóvel, em função do tempo t é dada por $a(t) = 2t \text{ ms}^{-2}$. Se no instante $t = 0$, o automóvel inicia a sua marcha, qual a distância que ele percorre ao fim de 5 s? (Nota: Se $y(t)$ é a distância percorrida ao fim de t s, então a velocidade e a aceleração, são dadas respectivamente por, $v(t) = y'(t)$ e $a(t) = y''(t)$)

Exercício 1.1.5

Um objecto em queda livre tem aceleração constante e igual à aceleração da gravidade, $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ (desprezando a resistência do ar). Se $y(t)$ for a altura, em função do tempo, do objecto relativamente ao solo e considerando que o objecto é deixado cair de uma altura y_0 no instante $t = 0$, mostre que $y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$.

1.2 Equações Separáveis

Exercício 1.2.1

Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais (nalguns casos sugere-se uma mudança de variável). Verifique em cada alínea o resultado obtido.

- a. $yy' + 25x = 0$.
 b. $y' + 3x^2y^2 = 0$.
 c. $xy' = y^2 + y$, ($y/x = u$).
 d. $y' + \operatorname{cosec} y = 0$.
 e. $y' = -ky^2$.
 f. $y' = (y + 4x)^2$, ($y + 4x = v$).
 g. $y' = e^{x+y+3}$.
 h. $(1 + x^2)y' = 1 + y^2$.
 i. $xyy' = x^2 + y^2$, ($y/x = u$).
 j. $x \ln(x)y' + \sqrt{1 + y^2} = 0$.
 k. $y' = y \ln y \cotg x$.
 l. $x(x - 1) \cos(y)y' = 2x \sin y$.
 m. $\frac{dr}{d\theta} = r \tan \theta$.
 n. $x \frac{dy}{dx} + (1 + y^2) \arctan y = 0$.
 o. $x \cos y + x^2 \sin y \frac{dy}{dx} = a^2 \sin y \frac{dy}{dx}$.

Exercício 1.2.2

Resolva os seguintes problemas de valor inicial (PVI's)

- a. $y' = -x/y$, $y(1) = \sqrt{3}$. b. $y^3 y' + x^3 = 0$, $y(0) = 1$.
 c. $xy' + y = 0$, $y(2) = -2$. d. $dr/dt = -2tr$, $r(0) = 2.5$.
 e. $xy' = y + x^2 \sec(y/x)$, $y(1) = \pi$. f. $e^x y' = 2(x+1)y^2$, $y(0) = 1/6$.
 g. $y' = 1 + 4y^2$, $y(0) = 0$. h. $y' \cosh^2 x = \sin^2 y$, $y(0) = \pi/2$.
 i. $\cos(y)y' = -x \sin(y)/(1+x^2)$, $y(1) = \pi/2$.

Exercício 1.2.3

Use as substituições indicadas para resolver as EDOs seguintes:

- a. $(1 - 2y - 4x)y' = 1 + y + 2x$, $y + 2x = v$. b. $y' = (x + y - 2)^2$, $x + y = u$.

1.3 Equações Diferenciais Exactas. Factor Integrante.**Exercício 1.3.1**

Dada a função $u(x, y)$, determine a equação diferencial exacta $du = 0$ e esboce algumas soluções $u(x, y) = \text{constante}$.

- a. $u = x^2 + 4y^2$. b. $u = 1/(x^2 - y^2)$. c. $u = x^2 - y^2$. d. $u = e^{x^2/y}$.

Exercício 1.3.2

Mostre que as equações seguintes são exactas e resolva-as.

- a. $2xy \, dx + x^2 \, dy = 0$. b. $e^{3\theta}(dr + 3r \, d\theta) = 0$.
 c. $\sinh x \cos y \, dx = \cosh x \sin y \, dy$. d. $(\cotg y + x^2) \, dx = x \operatorname{cosec}^2 y \, dy$.

Exercício 1.3.3

As EDOs seguintes são exactas? Resolva o PVI.

- a. $3y^2 \, dx + x^2 \, dy = 0$, $y(1) = 1/2$.
 b. $2xy \, dy = (x^2 + y^2) \, dx$, $y(1) = 2$.
 c. $2 \sin(\omega y) \, dx + \omega \cos(\omega y) \, dy = 0$, $y(0) = \pi/(2\omega)$.
 d. $[(x+1)e^x - e^y] \, dx = xe^y \, dy$, $y(1) = 0$.
 e. $(2xy \, dx + dy)e^{x^2} = 0$, $y(0) = 2$.

Exercício 1.3.4

Verifique em cada alínea que a função dada é factor integrante da EDO. Resolva a EDO.

- $\sin y \, dx + \cos y \, dy = 0$, $f(x, y) = e^x$.
- $y \, dx + [y + \tan(x + y)] \, dy = 0$, $f(x, y) = \cos(x + y)$.
- $(a + 1)y \, dx + (b + 1)x \, dy = 0$, $f(x, y) = x^a y^b$.
- $3(y + 1) \, dx = 2x \, dy$, $f(x, y) = (y + 1)/x^4$.
- $2 \cos y \, dx = \tan(2x) \sin y \, dy$, $f(x, y) = \cos(2x)$.

Exercício 1.3.5

Encontre um factor integrante para a equação diferencial e resolva-a.

- $(y + 1) \, dx = (x + 1) \, dy$.
- $2 \cosh x \cos y \, dx = \sinh x \sin y \, dy$.
- $(2 \cos y + 4x^2) \, dx = x \sin y \, dy$.
- $2x \tan y \, dx + \sec^2 y \, dy = 0$.
- $x^{-1} \cosh y \, dx + \sinh y \, dy = 0$.
- $2xy \, dx + 3x^2 \, dy = 0$.
- $3(y + x)^2 \, dx + x(3y + 2x) \, dy = 0$
- $(y^2 - 3xy - 2x^2) \, dx + (xy - x^2) \, dy = 0$

Exercício 1.3.6

Mostre que toda a equação diferencial separável da forma $M(x) \, dx + N(y) \, dy = 0$ é exacta.

Exercício 1.3.7

Em cada alínea determine os valores da constante a para os quais a EDO é exacta. Resolva a equação diferencial.

- $x + (y + axy')e^{2xy} = 0$.
- $x^{-2} + y^{-2} + (ax + 1)y^{-3}y' = 0$.

Exercício 1.3.8

Determine todas as funções $f(x)$ para as quais a EDO

$$y^2 \sin x + yf(x)y' = 0$$

é exacta. Resolva a EDO para estas funções $f(x)$.

Exercício 1.3.9

Determine todas as funções $f(x)$ para as quais a equação diferencial $f(x)y' + x^2 + y = 0$ tem como factor integrante a função $u(x, y) = x$.

Exercício 1.3.10

Determine os valores da constante a para os quais a EDO

$$e^t \sec y - \tan y + y' = 0$$

tem como factor integrante a função $f(t, y) = e^{-at} \cos y$. Resolva a EDO para esses valores de a .

1.4 Equação Diferencial Linear. Equação de Bernoulli.

Exercício 1.4.1

Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais lineares de 1ª ordem.

- | | | |
|----------------------------|-----------------------------------|---|
| a. $y' - y = 4$. | b. $y' + xy = 4x$. | c. $y' + 2y = 2.5$. |
| d. $y' + 3xy = 0$. | e. $y' + 4y = \cos x$. | f. $y' + ky = e^{-kx}$, k constante. |
| g. $x^3y' + 3x^2y = 1/x$. | h. $y' + y \sin x = e^{\cos x}$. | i. $x^2y' + 2xy = \sinh 5x$. |
| j. $xy' = 2y + x^3e^x$. | k. $y' + y = e^{-x} \tan x$. | l. $y' = (y - 2) \cotg x$. |

Exercício 1.4.2

Resolva os seguintes problemas de valor inicial.

- | | |
|-----------------------------------|---|
| a. $y' + 4y = 20$, $y(0) = 2$ | b. $y' - (1 + 3x^{-1})y = x + 2$, $y(1) = e - 1$ |
| c. $y' = y \tan x$, $y(\pi) = 2$ | d. $y' = 2(y - 1) \tanh 2x$, $y(0) = 4$ |
| e. $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$ | f. $y' + 6x^2y = e^{-2x^3}/x^2$, $y(1) = 0$ |

Exercício 1.4.3

Reduza as seguintes equações à forma linear. Note que algumas equações reduzem-se à forma linear se se trocar a variável dependente pela independente.

- | | |
|-------------------------------|--|
| a. $y' + 2y = y^2$ | b. $y' + y = -x/y$ |
| c. $y' = (6e^y - 2x)^{-1}$ | d. $y' + y/3 = (1 - 2x)y^4/3$ |
| e. $y' + x = xy^{-1}$ | f. $y' = (\tan y)/(x - 1)$ |
| g. $y'(\sinh 3y - 2xy) = y^2$ | h. $2xyy' + (x - 1)y^2 = x^2e^x$, (sug. $y^2 = z$) |

Exercício 1.4.4

A **equação de Riccati** é uma equação da forma $y' + p(x)y = g(x)y^2 + h(x)$ (note-se que a equação de Riccati é uma equação de Bernoulli se $h(x) = 0$).

- Mostre que a Equação de Riccati é redutível a uma equação de Bernoulli através da mudança de variável dependente $u = y - v$, onde $v = v(x)$ é uma solução particular conhecida da equação de Riccati.
- Verifique que $y = x$ é solução da equação diferencial $y' = x^3(y - x)^2 + y/x$. Determine a respectiva solução geral.

Exercício 1.4.5

A equação de Clairaut é uma equação da forma $y = xy' + g(y')$.

- Determine a solução geral da equação diferencial $y = xy' + 1/y'$. (*sugestão*: derive ambos os membros da equação em ordem à variável x .)
- Mostre que a equação de Clairaut $y = xy' + g(y')$ admite como solução geral a família de rectas dada por $y = cx + g(c)$ e a solução singular dada por $g'(y') = -x$. Note que as rectas anteriores são tangentes a esta solução singular. (*sugestão*: derive ambos os membros da equação em ordem à variável x .)

1.5 Exercícios Variados**Exercício 1.5.1**

Determine a solução geral das equações diferenciais seguintes usando um dos métodos estudados. Verifique a solução encontrada.

- $y' + 4y = 17 \sin x$
- $y' = ay + by^2, \quad (a \neq 0)$
- $25yy' - 9x = 0$
- $(x^2 + 1)y' + y^2 + 1 = 0$
- $\sin(x) \sin(2y) dx = 2 \cos(x) \cos(2y) dy$
- $(2xe^{x^2} \cosh y + 1) dx + e^{x^2} \sinh y dy = 0$
- $4xyy' = y^2 - x^2, \quad (\text{sug. } y/x = u)$
- $xy' = y + x^2 \sec(y/x)$
- $(3xe^y + 2y) dx + (x^2e^y + x) dy = 0$
- $2x \tan y dx + \sec^2 y dy = 0$
- $e^{x^2} + ye^{y^2} y' = 0$
- $2y' + 2y \cos x = \sin 2x$

Exercício 1.5.2

Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial.

- $y' = y \tanh x, \quad y(0) = \pi$
- $y' = \sqrt{1 - y^2}, \quad y(0) = 1/\sqrt{2}$
- $xy' + y = x^2y^2, \quad y(1) = 1/2$
- $y' + 4xy = e^{-2x^2}, \quad y(0) = -4$
- $9 \sec y dx + \sec x dy = 0, \quad y(0) = 0$
- $(2x + e^y) dx + xe^y dy = 0, \quad y(2) = 0$
- $3x^2y dx + 2x^3 dy = 0, \quad y(1) = 3$
- $x \sinh y dy = \cosh y dx, \quad y(3) = 0$
- $y' + xy = xy^{-1}, \quad y(0) = 2$
- $y' + y/2 = y^3, \quad y(0) = 1$
- $y' + \frac{1}{x}y = \frac{y^2}{x}, \quad y(-1) = 1$
- $(x - \sin y) dy + \tan y dx = 0, \quad y(1) = \pi/6$

Exercício 1.5.3

Classifique as EDOs seguintes e determine a respectiva solução geral. Verifique os resultados obtidos. (Nota: algumas EDOs apenas podem ser classificadas após a sugestão indicada.

a, b, k são constantes reais.)

- a. $(2y - xy \ln x) dx = 2x \ln x dy$ b. $y' = (x + y)^2$. (sug. $u = x + y$)
- c. $y' + 8x^3y^3 + 2xy = 0$ d. $y' + ay = b \sin(kx)$
- e. $xy' = y(\ln(xy) - 1)$ (sug. $u = xy$) f. $(y^2 + a \sin x) y' = \cos x$ (sug. y variável ind.)
- g. $xy' + ay + bx^n = 0, x > 0, n \in \mathbb{N}$. h. $(x^2 - 1) y' + xy - 3xy^2 = 0$
- i. $(xy\sqrt{x^2 - y^2} + x) y' = y - x^2\sqrt{x^2 - y^2}$ (sug. $y = ux$)
- j. $(2xy^3 - x^4) y' + 2x^3y = y^4$ (sug. $v(x, y) = x^{-2}y^{-2}$ é factor integrante).
- k. $(2xy^3 + xy + x^2) y' + y^2 = xy$ (sug. $v(x, y) = x^{-1}y^{-2}$ é factor integrante).

Exercício 1.5.4

Determine a solução geral da equação diferencial, $e^{x/y}(y - x)y' + y(1 + e^{x/y}) = 0$.

Sugestão. Use a mudança $y/x = u$ e verifique que $\int \frac{x-1}{xe^{-1/x} + x^2} dx = \ln(1 + xe^{1/x})$.

Exercício 1.5.5

Determine a solução geral das seguintes equações de Riccati, sendo y uma solução particular dada.

- a. $y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2, y = -x^2$ b. $y' = 2 \tan x \sec x - y^2 \sin x, y = \sec x$
- c. $y' = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2, y = \frac{1}{x}$ d. $y' = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}, y = x$

1.6 Aplicações**Aplicação 1.6.1 (Crescimento/Decaimento Exponencial)**

1. Numa cultura de bactérias, a taxa de crescimento é proporcional à quantidade $y(t)$ presente no instante t . Se $y(t)$ duplica num dia, qual a quantidade de bactérias esperada ao fim de 3 dias? e ao fim de uma semana?
2. A decomposição do urânio radioactivo, em cada instante, é proporcional à quantidade presente. Se num reactor nuclear o urânio ${}_{92}\text{U}^{237}$ perde 10% da quantidade inicial num dia, determine a respectiva meia-vida. Quanto tempo será necessário para que se decomponha 99% da quantidade original de ${}_{92}\text{U}^{237}$ no reactor?
3. Considere um fóssil de uma planta com cerca de 3000 anos. Que percentagem de ${}_{6}\text{C}^{14}$, em função da quantidade inicial y_0 , deverá estar presente no fóssil?

Aplicação 1.6.2 (Temperatura)

A Lei de Newton do arrefecimento afirma que a variação da temperatura de um corpo imerso num ambiente a temperatura constante é, em cada instante, proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e a ambiente.

1. Um corpo à temperatura de 5°C é colocado num quarto fechado cuja temperatura é mantida constante a 22°C . Decorrido 1 minuto, o corpo está à temperatura de 12°C . Quanto tempo será necessário para o corpo estar a uma temperatura próxima da ambiente, digamos 21.9°C ?
2. Um corpo à temperatura de 100°C é colocado num ambiente em que a temperatura é mantida constante e a 20°C . Ao fim de 10 min a temperatura do corpo é de 60°C .
 - a. Determine a expressão que dá a temperatura do corpo em função do tempo.
 - b. Calcule a temperatura do corpo ao fim de 40 min.
 - c. em que instante a temperatura do corpo é de 50°C ?

Aplicação 1.6.3 (Movimento)

1. Considere que para a descolagem de um certo avião são necessários 2 km de pista. Suponha que o avião tem uma velocidade inicial de 2 ms^{-1} . Se a aceleração for constante, qual a velocidade do avião no momento da descolagem? O que acontece se a aceleração do avião for de 1.5 ms^{-2} ? Despreze o atrito.
2. Uma bola é atirada na vertical, de baixo para cima, a partir de uma altura de 10 m do solo e com a velocidade de 5 m/s. Considerando $g = 9,8\text{ ms}^{-2}$ e desprezando o atrito, determine:
 - a. A altura máxima que a bola atinge.
 - b. Quanto tempo demora a bola a atingir o solo.
 - c. A velocidade da bola no momento em que atinge o solo.
3. Um corpo de massa m cai de uma altura de 1500 m do solo. Supondo que a resistência do ar é proporcional à velocidade com constante de proporcionalidade $k = m/40$, determine a altura e a velocidade do corpo em cada instante.
4. Considere o mesmo problema mas suponha agora que a resistência é proporcional ao quadrado da velocidade com a mesma constante.

Aplicação 1.6.4 (Geometria)

1. Determine:
 - a. As curvas no plano- xy que, em cada ponto (x, y) , têm declive $-4x/y$.
 - b. As curvas no plano- xy cujas rectas tangentes em cada ponto (x, y) passam na origem.
2. Determine a família de curvas no plano- xy que verificam a propriedade de a área da região delimitada pelo eixo das abcissas, pela curva dessa família e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = t$ é proporcional ao comprimento do arco da curva entre as duas verticais.

Nota: o comprimento do arco da curva entre dois pontos A e B cujas abcissas são $x = a$ e $x = t$, respectivamente, é dado por

$$s = \int_a^t \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

3. Determine família de curvas no plano- xy que, em cada ponto (x, y) , têm declive igual à soma das coordenadas do ponto. Escreva a expressão da curva dessa família que passa na origem.
4. A solução da equação diferencial $r' + (a^2/r) \sin 2\theta = 0$ que verifica a condição $r^2(0) = a^2$, $a \neq 0$ é uma curva no plano chamada *lemniscata*. Determine a expressão da curva e represente-a. (nota: r e θ são coordenadas polares)

Aplicação 1.6.5 (Termodinâmica, Reacções Químicas)

1. A lei de Boyle-Mariotte para gases ideais afirma que para um gás (considerado ideal) a baixa pressão e temperatura constante, a taxa de variação do volume $V(P)$ é igual a $-V/P$. Resolva a respectiva equação diferencial.
2. Experiências mostram que a velocidade de uma reacção química, a temperatura constante, é proporcional ao produto das concentrações das substâncias reagentes. Suponha uma reacção entre duas substâncias A e B, $A + B \rightarrow C$, onde reagem $a \text{ mol} \times \text{dm}^{-3}$ da substância A com $b \text{ mol} \times \text{dm}^{-3}$ da substância B. Se $y(t)$ for o número de moles por litro que reagiram ao fim de t segundos, determine a sua expressão assumindo que as concentrações a e b são diferentes.