ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E DE GESTÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Análise Matemática III 2004/2005

Cursos: EC, EE, EI, EM, EQ, GEI

Exame de Recurso - 22/02/2005

Duração: 2h 30 min — Com Consulta de Formulário

Resolva os 4 grupos em folhas ou conjuntos de folhas *SEPARADOS*.
Apresente todos os cálculos necessários.
Dê boa apresentação à prova.

I

Cotação do grupo por questão/alínea: 2; 2; 1 valores

1. Use a substituição $z = x + e^y$ para determinar a solução geral da equação $y' = (x + e^y - 1)\, e^{-y}$.

2. Suponha-se que, para cada valor do parâmetro $c \in \mathbb{R}$, a equação
$$\sin y = c - e^{2xy}$$
define implicitamente y como função da variável x.

   a. *Sem resolver a equação*, mostre que a função y é solução da equação diferencial
$$\left(2x + e^{-2xy} \cos y\right) y' = -2y$$
para qualquer $c \in \mathbb{R}$.

   b. Determine o valor de c para o qual se verifica $y(1/2) = \pi$.

II

Cotação do grupo por questão/alínea: 3; 1; 2 valores

3. Resolva o P.V.I.
$$\frac{y''' - y''}{2} = y', \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0, \;\; y''(0) = -2$$

4. Considere a equação diferencial linear de 2ª ordem: $xy'' + 2y' + xy + x = 0$.
As funções $y_1(x) = x^{-1} \cos x$, $y_2(x) = x^{-1} \sin x$ são soluções da equação homogénea associada à equação diferencial dada, no intervalo $\mathrm{I} =]0, +\infty[$.

   a. Mostre que $\{y_1,\ y_2\}$ é uma base para as soluções da equação diferencial homogénea associada à equação diferencial dada, no intervalo $\mathrm{I} =]0, +\infty[$.

   b. Determine a solução geral da equação diferencial dada.

V.S.F.F

III

Cotação do grupo por questão: 2; 3 valores

5. Resolva o sistema de equações diferenciais lineares,

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ y_2' = 4y_2 + 5y_3 \\ y_3' = 6y_3 \end{cases}$$

6. A solução geral do sistema de EDOs lineares homogéneo associado ao sistema

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 - 2y_2 - t \\ y_2' = 4y_1 - y_2 + te^{3t} \end{cases}$$

é o vector $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$.

Use o método da diagonalização para determinar a solução geral do sistema dado.

IV

Cotação do grupo por questão: 1.5; 2.5 valores

7. Sejam $f(t) = \sin(2t)$ e $g(t) = e^{-t}$. Mostre que $\mathscr{L}\{(f * g)(t)\} = \dfrac{2}{(s^2+4)(s+1)}$

8. Utilize o método da transformada de Laplace para resolver o PVI:

$$y'' + 4y = 2e^{-t}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

FIM

Formulário Adicional:

A. Equações diferenciais lineares de ordem $n > 2$ (coef. const.): $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = r(x)$ (NH)
Solução Geral: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$
Equação Homogénea Associada: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ (H)
Equação Característica associada: $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$ (I)

	Tipo de raízes de (I)	Solução geral de (H)
Caso 1	n raízes reais distintas $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$	$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x},\ c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$
Caso 2	p raízes iguais $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \mu$ $(n-p)$ raízes reais distintas $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n$	$y(x) = (c_1 + \cdots + c_p x^{p-1})e^{\mu x}$ $+ \sum_{k=p+1}^{n} c_k e^{\lambda_k x},\ c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$
Caso 3	complexas conj. $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + i\beta$ $(n-2)$ raízes reais distintas $\lambda_3, \ldots, \lambda_n$	$y(x) = e^{\alpha x}\left[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right]$ $+ \sum_{k=3}^{n} c_k e^{\lambda_k x},\ c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$

Variação dos Parâmetros: $y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int \frac{W_k r(x)}{W}\, \mathrm{d}x$, onde:

- ▷ W wronskiano de $y_1(x), \ldots, y_n(x)$;
- ▷ W_k determinante que resulta do wronskiano de $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ substituindo a coluna k pelo vector $(n \times 1)$, $[0\ \cdots\ 0\ 1]^{\mathrm{T}}$.