Análise Matemática III 2004/2005
Correcção do Exame de 31/01/2005 (2^a chamada)

I. 1. Determine a solução geral da equação $y' = \dfrac{\left(x \ln(x) - y^2\right) y}{2x^2 \ln(x)}$, $(x > 3)$.

Vamos reduzir à forma linear a equação diferencial anterior:

$$\begin{aligned}
y' \quad &= \quad \frac{\left(x \ln(x) - y^2\right) y}{2x^2 \ln(x)} \\
&\iff \quad y' = \frac{yx \ln x}{2x^2 \ln x} - \frac{y^3}{2x^2 \ln x} \\
&\iff \quad y' - \frac{1}{2x} y = -\frac{1}{2x^2 \ln x} y^3
\end{aligned}$$

esta é uma equação de Bernoulli a qual se lineariza fazendo a mudança de variavel $u = y^{1-3} = y^{-2}$. Ora como $u' = \underbrace{-2y^{-3}} y'$, multiplicando a equação por $\left(-2y^{-3}\right)$ obtemos:

$$\begin{aligned}
&\iff \quad -2y^{-3}y' - \left(-2y^{-3}\right) \frac{1}{2x} y = -\frac{\left(-2y^{-3}\right)}{2x^2 \ln x} y^3 \\
&\iff \quad u' + \frac{1}{x} u = \frac{1}{x^2 \ln x}
\end{aligned}$$

que é linear, e, portanto,

$$\begin{aligned}
&\iff \quad u(x) = ce^{-\int \frac{1}{x} dx} + e^{-\int \frac{1}{x} dx} \int e^{\int \frac{1}{x} dx} \frac{1}{x^2 \ln x} dx, \ (c \in \mathbb{R}) \\
&\iff \quad u(x) = ce^{\ln x^{-1}} + e^{\ln x^{-1}} \int e^{\ln x} \frac{1}{x^2 \ln x} dx, \ (c \in \mathbb{R}) \\
&\iff \quad u(x) = \frac{c}{x} + \frac{1}{x} \int \frac{1}{x \ln x} dx, \ (c \in \mathbb{R}) \\
&\iff \quad u(x) = \frac{c}{x} + \frac{1}{x} \ln(\ln x), \ (c \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Finalmente, voltando à variável y, obtemos a solução geral,

$$\begin{aligned}
&\iff \quad y^{-2} = \frac{c}{x} + \frac{1}{x} \ln(\ln x), \ (c \in \mathbb{R}) \\
&\iff \quad y(x)^2 = \frac{x}{c + \ln(\ln x)}, \ (c \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

I. 2. Suponha-se que, para cada valor do parâmetro $c \in \mathbb{R}$ **a equação**

$$xe^y = c + y^2$$

define implicitamente y **como função da variável** x.

a) Mostre que a função y **é solução da equação diferencial** $y' = \dfrac{1}{2ye^{-y} - x}$ **para qualquer** $c \in \mathbb{R}$.

Derivando implicitamente a solução dada, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(xe^y\right) &= \frac{d}{dx}\left(c+y^2\right), \quad (c\in\mathbb{R}) \\
&\Longleftrightarrow e^y + xe^y y' = 2yy' \\
&\Longleftrightarrow y'\left(xe^y - 2y\right) = -e^y \\
&\Longleftrightarrow y' = \frac{-e^y}{xe^y - 2y} \\
&\Longleftrightarrow y' = \frac{1}{2ye^{-y} - x}.
\end{aligned}$$

b) Determine o valor de c para o qual se verifica $y\left(3/e\right) = 1$.

Substituindo $y\left(3/e\right) = 1$ na solução dada, obtemos, $\frac{3}{e}e^1 = c + 1^2 \Longleftrightarrow c = 2$.

II. 3. A equação diferencial, $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0$ $(x > 0)$, admite como solução a função $y_1\left(x\right) = \dfrac{\cos x}{x}$.

a) Escreva a solução geral da equação diferencial.

A equação diferencial $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, não é equação de Euler-Cauchy nem de coeficientes constantes. Como sabemos que $y_1\left(x\right) = \frac{\cos x}{x}$ é uma solução, vamos determinar outra solução y_2 pelo método da redução de ordem:

$$\begin{aligned}
y_2\left(x\right) &= \frac{\cos x}{x}\int \frac{1}{\left(\frac{\cos x}{x}\right)^2} e^{-\int \frac{2}{x}dx} dx \\
&= \frac{\cos x}{x}\int \frac{x^2}{\cos^2 x} e^{\ln x^{-2}} dx \\
&= \frac{\cos x}{x}\int \sec^2 x dx \\
&= \frac{\cos x}{x}\tan x \\
&= \frac{\sin x}{x}.
\end{aligned}$$

Pelo método da redução de ordem $\left\{\frac{\cos x}{x}, \frac{\sin x}{x}\right\}$ formam uma base de soluções da equação, e portanto, $y\left(x\right) = C_1\dfrac{\cos x}{x} + C_2\dfrac{\sin x}{x}$ é uma família de soluções da equação diferencial.

b) Resolva o PVI $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{\pi}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Para resolver o PVI, como $y\left(x\right) = C_1\frac{\cos x}{x} + C_2\frac{\sin x}{x}$, então $y'\left(x\right) = C_1\left(\frac{-\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}\right) + C_2\left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)$, logo

$$\begin{cases} y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{\pi}C_2 = \frac{1}{\pi} \\ -\frac{2}{\pi}C_1 - \frac{4}{\pi^2}C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{1}{2} \\ C_1 = -\frac{1}{\pi} \end{cases}.$$

Portanto, a solução particular do PVI é $y\left(x\right) = -\frac{1}{\pi}\frac{\cos x}{x} + \frac{1}{2}\frac{\sin x}{x}$.

II. 4. Considere a equação diferencial linear de 3^a ordem, $y''' - y'' - e^x = 0$.

a) Sejam $y_1\left(x\right) = 1, y_2\left(x\right) = x, y_3\left(x\right) = e^x$, mostre que $\{y_1, y_2, y_3\}$ é uma base de soluções da equação homogenea associada à equação diferencial dada, no intervalo $x \in \left]0, +\infty\right[$.

Para mostrar que $\{y_1, y_2, y_3\}$ é uma base de soluções da equação $y''' - y'' = 0$ temos que verificar que cada uma das funções y_1, y_2, y_3 são soluções desta equação e que são linearmente independentes.

Que y_1 é solução: $y_1 = 1 \Rightarrow y_1' = 0 = y_1'' = y_1'''$, logo verifica-se $y_1''' - y_1'' = 0 \Leftrightarrow 0 - 0 = 0$.

Que y_2 é solução: $y_2 = x \Rightarrow y_2' = 1 \Rightarrow y_2'' = 0 = y_2'''$, logo verifica-se $y_2''' - y_2'' = 0 \Leftrightarrow 0 - 0 = 0$.

Que y_3 é solução: $y_3 = e^x \Rightarrow y_3' = e^x = y_3'' = y_3'''$, logo verifica-se $y_3''' - y_3'' = 0 \Leftrightarrow e^x - e^x = 0$.

Que $\{y_1, y_2, y_3\}$ são linearmente independentes, basta verificar que o Wronskiano, $W(y_1, y_2, y_3) \neq 0$, para todo $x \in]0, +\infty[$:

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} 1 & x & e^x \\ 0 & 1 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = e^x \neq 0 \quad \text{para todo } x \in]0, +\infty[.$$

b) Determine a solução geral da equação diferencial dada.

A solução geral da equação diferencial

$$y''' - y'' - e^x = 0$$

é dada por $y(x) = y_h + y_p$, onde y_h é a solução geral da equação homogenea associada $(y''' - y'' = 0)$ e y_p é uma solução particular da equação diferencial dada.

Pela alínea anterior, temos que $y_h = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$.

Para determinar y_p, vamos usar o método dos coeficientes indeterminados:

como $r(x) = e^x$ e e^x é uma solução da equação homogenea associada, então a solução particular é da forma $y_p(x) = Cxe^x$; vamos determinar C :

$$\begin{aligned} y(x) &= Cxe^x \\ &\Longrightarrow y_p' = Cxe^x + Ce^x \\ &\Longrightarrow y_p'' = Cxe^x + 2Ce^x \\ &\Longrightarrow y_p''' = Cxe^x + 3Ce^x \end{aligned}$$

substituindo na equaçãodiferencial, obtemos:

$$\begin{aligned} y_p''' - y_p'' - e^x &= 0 \Longleftrightarrow Cxe^x + 3Ce^x - (Cxe^x + 2Ce^x) - e^x = 0 \\ &\Longleftrightarrow Ce^x - e^x = 0 \\ &\Longleftrightarrow C = 1, \end{aligned}$$

portanto, a solução particular é $y_p = xe^x$.

Assim, a solução geral da equação diferencial dada é,

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - xe^x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

III. 5. Resolva o sistema de equações diferenciais lineares,

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 \\ y_2' = 4y_1 - 6y_2 \end{cases}.$$

Este é um sistema de equações diferenciais homogeneo, e a sua solução geral pode ser escrita conhecendo os valores e os vectores próprios da matriz associada ao sistema. Assim, em primeiro, vamos escrever o sistema na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

onde $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$. Em segundo, vamos determinar os valores próprios de A:

$$\begin{aligned}
\mid A-\lambda I \mid = 0 &\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 4 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\Longleftrightarrow (1-\lambda)(-6-\lambda)+12=0 \\
&\Longleftrightarrow \lambda^2+5\lambda+6=0 \\
&\Longleftrightarrow (\lambda+3)(\lambda+2)=0 \\
&\Longleftrightarrow \lambda=-2 \vee \lambda=-3.
\end{aligned}$$

O terceiro passo é determinar os vectores próprios associados a cada um dos valores próprios:

$$\begin{aligned}
(\ A+2I\ )\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow &\quad \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow &\quad \begin{cases} 3y_1-3y_2=0 \\ 4y_1-4y_2=0 \end{cases} \\
\Longleftrightarrow &\quad y_1=y_2,
\end{aligned}$$

logo, $v_1=(1,\ 1)$ é um vector próprio associado ao valor próprio $\lambda=-2$;

$$\begin{aligned}
(\ A+3I\ )\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow &\quad \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow &\quad \begin{cases} 4y_1-3y_2=0 \\ 4y_1-3y_2=0 \end{cases} \\
\Longleftrightarrow &\quad y_1=\frac{3}{4}y_2,
\end{aligned}$$

logo, $v_1=(3,\ 4)$ é um vector próprio associado ao valor próprio $\lambda=-3$.

Então, a solução geral é

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2e^{-3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

III. 6. A solução geral do sistema de EDO's lineares homogéneos associado ao sistema

$$\begin{cases} y_1'=5y_1-2y_2-3 \\ y_2'=4y_1-y_2+e^{2t} \end{cases}$$

é o vector $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t}, \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$**.**

Use o método da variação dos parâmetros para determinar a solução geral do sistema dado.

A solução geral do sistema de EDO's não homogeneo é dado por $\mathbf{y}=\mathbf{y}^{(h)}+\mathbf{y}^{(p)}$. No enunciado do exercício é indicada a solução do sistema homogeneo associado, o $\mathbf{y}^{(h)}$; vamos agora determinar a solução do sistema não homogéneo, $\mathbf{y}^{(p)}=\mathbf{Yu}$ onde $\mathbf{Y}$ é a matriz fundamental de soluções e $\mathbf{u}=\int\mathbf{Y}^{-1}(t)\,\mathbf{g}(t)\,dt$.

Primeiro vamos escrever o sistema na forma matricial

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

onde $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$.

Em segundo, vamos determinar a matriz de soluções fundamentais, $\mathbf{Y}$, que resulta de escrever $\mathbf{y}^{(h)} = \mathbf{Y}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} \\ \iff & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ 2e^t & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e portanto, $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ 2e^t & e^{3t} \end{pmatrix}$.

Em terceiro determinar $\mathbf{Y}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^{-1} &= \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ 2e^t & e^{3t} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{-e^{4t}} \begin{pmatrix} e^{3t} & -e^{3t} \\ -2e^t & e^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{-t} \\ 2e^{-3t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Em quarto, calcular $\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{g} = \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{-t} \\ 2e^{-3t} & -e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{-t} + e^t \\ -6e^{-3t} - e^{-t} \end{pmatrix}$.

Em quinto, calcular $\mathbf{u} = \int \mathbf{Y^{-1}}(\mathbf{t})\,\mathbf{g}(\mathbf{t})\,\mathbf{dt} = \begin{pmatrix} \int (3e^{-t} + e^t)\,dt \\ \int (-6e^{-3t} - e^{-t})\,dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{-t} + e^t \\ 2e^{-3t} + e^{-t} \end{pmatrix}$.

Então, a solução particular do siatema não homogéneo é

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(p)} &= \mathbf{Yu} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ 2e^t & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3e^{-t} + e^t \\ 2e^{-3t} + e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 + 2e^{2t} \\ -4 + 3e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente, a solução geral do sistema de EDO's não homogéneo é

$$\mathbf{y} = = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} -1 + 2e^{2t} \\ -4 + 3e^{2t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

IV. 7. Mostre que $L\left\{e^{-t}\left(\cosh(2t) - te^{2t}\right)\right\} = \dfrac{s^2 - s - 4}{(s-1)^2 (s+3)}$.

Aplicando a propriedade da linearidade da transformada de Laplace, obtemos,

$$\begin{aligned} L\left\{e^{-t}\left(\cosh(2t) - te^{2t}\right)\right\} &= L\left\{e^{-t}\cosh(2t) - te^t\right\} \\ &= L\left\{e^{-t}\cosh(2t)\right\} - L\left\{te^t\right\}; \end{aligned}$$

como, $L\{\cosh(2t)\} = \dfrac{s}{s^2-4}$, pelo 1^o teorema do deslocamento, concluímos que, $L\{e^{-t}\cosh(2t)\} = \dfrac{s+1}{(s+1)^2-4}$; e, analogamente, como $L\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$, concluímos que, $L\{te^t\} = \dfrac{1}{(s-1)^2}$. Assim,

$$\begin{aligned}
L\left\{e^{-t}\left(\cosh(2t) - te^{2t}\right)\right\} &= \frac{s+1}{(s+1)^2-4} - \frac{1}{(s-1)^2} \\
&= \frac{(s+1)(s-1)^2 - \left((s+1)^2-4\right)}{\left((s+1)^2-4\right)(s-1)^2} \\
&= \frac{s^3-2s^2+s+s^2-2s+1-s^2-2s+3}{(s^2+2s-3)(s+1)^2} \\
&= \frac{(s-1)\left(s^2-s-4\right)}{(s+3)(s-1)^3} \\
&= \frac{s^2-s-4}{(s+3)(s-1)^2}.
\end{aligned}$$

IV. 8. Utilize o método da transfrmada de Lapalce para resolver o PVI:

$$y'' + 2y' - 3y = -4e^t, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -2.$$

Pelas propriedades da Transformada de Laplace, seja $y(t)$ a solução do PVI, e seja $L\{y(t)\} = Y(s)$ a respectiva transformada, então temos:

$$\begin{aligned}
L\{y'' + 2y' - 3y\} &= L\left\{-4e^t\right\} \\
&\Longleftrightarrow L\{y''\} + 2L\{y'\} - 3L\{y\} = -4L\left\{e^t\right\} \\
&\Longleftrightarrow s^2Y(s) - s.1 - (-2) + 2(sY(s) - 1) - 3Y(s) = -4\frac{1}{s-1} \\
&\Longleftrightarrow Y(s)\left(s^2+2s-3\right) - s + 2 - 2 = \frac{-4}{s-1} \\
&\Longleftrightarrow Y(s)\left(s^2+2s-3\right) = \frac{-4}{s-1} + s \\
&\Longleftrightarrow Y(s)\left(s^2+2s-3\right) = \frac{s^2-s-4}{s-1} \\
&\Longleftrightarrow Y(s) = \frac{s^2-s-4}{(s^2+2s-3)(s-1)} \\
&\Longleftrightarrow Y(s) = \frac{s^2-s-4}{(s-1)^2(s+3)},
\end{aligned}$$

logo, pela questão n.^{o} 7 temos que

$$L\{y(t)\} = Y(s) = \frac{s^2-s-4}{(s-1)^2(s+3)} = L\left\{e^{-t}\left(\cosh(2t) - te^{2t}\right)\right\}$$

e, portanto, aplicando a transformada inversa,

$$\begin{aligned}
L^{-1}\{L\{y(t)\}\} &= L^{-1}\left\{L\left\{e^{-t}\left(\cosh(2t) - te^{2t}\right)\right\}\right\} \\
&\Longleftrightarrow y(t) = e^{-t}\left(\cosh(2t) - te^{2t}\right),
\end{aligned}$$

é a solução do PVI.