ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E DE GESTÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Análise Matemática III 2004/2005

Cursos: EC, EE, EI, EM, EQ, GEI

Exame 1ª Chamada - 18/01/2005

Proposta de correcção

I

1. Determine a solução geral da equação $xy\,\mathrm{d}x + \left(1+x^2\right)\,\mathrm{d}y = 0$.

RESOLUÇÃO – EXERCÍCIO 1

Considere-se $M(x,y) = xy$ e $N(x,y) = 1+x^2$. Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = x \neq 2x = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, a equação não é exacta.
Pesquisa de factor integrante: $\tilde{R} = \dfrac{1}{xy}(2x-x) = \dfrac{1}{y}$ depende apenas da variável y, então a função $\tilde{v} = e^{\int 1/y\,\mathrm{d}y} = y$ é factor integrante da equação diferencial.
Temos então equação diferencial exacta: $xy^2\,\mathrm{d}x + \left(1+x^2\right)y\,\mathrm{d}y = 0$. Considerando agora $M(x,y) = xy^2$ e $N(x,y) = \left(1+x^2\right)y$, sabemos que existe uma função real $u(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial u}{\partial x} = xy^2$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \left(1+x^2\right)y$.
Cálculo de $u(x,y)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xy^2 \Leftrightarrow u(x,y) = \int xy^2\,\mathrm{d}x + k(y) \Leftrightarrow u(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + k(y)$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(1+x^2\right)y \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2y^2}{2} + k(y)\right) = \left(1+x^2\right)y \;\Leftrightarrow\; x^2y + k'(y) = y + x^2y$$

$$\Leftrightarrow\quad k(y) = \int y\,\mathrm{d}y + d,\; d\in\mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; k(y) = \frac{y^2}{2} + d,\; d\in\mathbb{R}.$$

Assim, $u(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + d$, onde d é uma constante real.
A solução geral da equação diferencial é $\left(1+x^2\right)y^2 = c,\; c\in\mathbb{R}$.

2. Considere a equação diferencial de 1ª ordem, $\left(\sec^2 y\right)y' = f(x)\tan y,\; x\in\mathbb{R}$.
   a. Determine todas as funções f para as quais a equação diferencial admite a função $v(x,y) = e^{x^2}$ como factor integrante.
   b. Considerando uma das funções f calculadas na alínea anterior, resolva o P.V.I.

$$\left(\sec^2 y\right)y' = f(x)\tan y, \quad y(0) = \pi/4.$$

RESOLUÇÃO – EXERCÍCIO 2

a. Pretende-se determinar todas as funções f para as quais a equação diferencial

$$e^{x^2}\left(\sec^2 y\right)y' = e^{x^2}f(x)\tan y \Leftrightarrow e^{x^2}f(x)\tan y\,\mathrm{d}x - e^{x^2}\left(\sec^2 y\right)\,\mathrm{d}y = 0,\; x\in\mathbb{R}$$

é exacta. Considerando $M(x,y) = e^{x^2}f(x)\tan y$ e $N(x,y) = -e^{x^2}\sec^2 y$, a equação anterior é exacta se e só se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Leftrightarrow e^{x^2}f(x)\sec^2 y = -2xe^{x^2}\sec^2 y \Leftrightarrow f(x) = -2x,\; x\in\mathbb{R}.$$

b. Pretende-se resolver o P.V.I.

$$\left(\sec^2 y\right) y' = -2x \tan y, \quad y(0) = \pi/4.$$

(i) Solução geral da equação.

$$\begin{aligned}
\left(\sec^2 y\right) y' = -2x \tan y \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\sec^2 y}{\tan y}\right) y' = -2x \\
&\Leftrightarrow \quad \int \left(\frac{\sec^2 y}{\tan y}\right) y' \, \mathrm{d}x = \int -2x \, \mathrm{d}x + c_1, \ c_1 \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \ln|\tan y| = -x^2 + c_1, \ c_1 \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \tan y = Ce^{-x^2}, \ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}
\end{aligned}$$

(ii) Solução P.V.I.

$$y(0) = \pi/4 \Leftrightarrow \tan(\pi/4) = Ce^0 \Leftrightarrow C = 1.$$

Assim, a solução do P.V.I. é : $y(x) = \arctan e^{-x^2}, \ x \in \mathbb{R}$.

II

3. Resolva o problema de valor inicial,

$$\frac{x^2}{2} y'' + \frac{5x}{2} y' + 2y = 0, \quad y(1) = y'(1) = 2, \quad (x > 0).$$

Resolução – Exercício 3

A equação diferencial $\frac{x^2}{2}y'' + \frac{5x}{2}y' + 2y = 0$, é uma equação de Euler-Cauchy. Portanto vamos determinar os valores de m de forma a que $y = x^m \quad (x > 0)$ seja solução da equação.

Tem-se: $y' = mx^{m-1}$; $y'' = m(m-1)x^{m-2}$ substituindo na equação temos:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{2} y'' + \frac{5x}{2} y' + 2y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{2} m(m-1) x^{m-2} + \frac{5x}{2} m x^{m-1} + 2x^m = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^m \left(\frac{m(m-1)}{2} + \frac{5}{2} m + 2 \right) = 0 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{m^2}{2} + 2m + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad m^2 + 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -2
\end{aligned}$$

Portanto, a solução geral da equação homogénea é: $y(x) = C_1 x^{-2} + C_2 x^{-2} \ln x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Agora, para resolver o PVI ($y'(x) = -\frac{2C_1}{x^3} + \frac{1C_2}{x^3} - \frac{2C_2 \ln x}{x^3}$):

$$\begin{cases} y(1) = 2 \\ y'(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ -2C_1 + C_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 6 \end{cases}$$

Então, a solução particular do PVI é $y(x) = 2x^{-2} + 6x^{-2} \ln x$.

4. Considere a equação diferencial linear de 2ª ordem, $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - 1/4\right) y + x^2 \sqrt{x} = 0$.
As funções $y_1(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ e $y_2(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ são soluções da equação homogénea associada à equação diferencial dada, no intervalo $x \in]0, +\infty[$.

a. Mostre que as funções y_1 e y_2 formam um sistema fundamental de soluções da equação diferencial homogénea associada à equação diferencial dada, para $x \in]0, +\infty[$.

b. Determine a solução geral da equação dada.

Resolução – Exercício 4

a. Sabemos que $y_1(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ e $y_2(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ são duas soluções da equação homogénea associada

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0,$$

então para provar que $\{y_1, y_2\}$ forma um sistema fundamental de soluções da equação diferencial basta provar que, o Wronskiano, $W[y_1, y_2] \neq 0$ para todo $x \in]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2] &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} & \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \\ \frac{-\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\cos x}{2x\sqrt{x}} & \frac{\cos x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin x}{2x\sqrt{x}} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{x} \neq 0 \text{ para todo } x \in]0, +\infty[. \end{aligned}$$

b. A solução geral da equação diferencial

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y + x^2\sqrt{x} = 0$$

é dada por $y(x) = y_h + y_p$, onde y_h é a solução geral da equação homogénea associada,

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$

e y_p é uma solução particular da equação diferencial dada.
Pela alínea anterior, temos que $y_h = C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.
Para determinar y_p, vamos usar o método da variação de parâmetros:

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 r(x)}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 r(x)}{W} dx$$

onde:

- $y_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$
- $y_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$
- $r(x) = \frac{-x^2\sqrt{x}}{x^2} = -\sqrt{x}$
- e pelo cálculo efectuado na alínea anterior, $W = W[y_1, y_2] = \frac{1}{x}$

e então

$$\begin{aligned} y_p &= -\frac{\cos x}{\sqrt{x}} \int \frac{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}(-\sqrt{x})}{\frac{1}{x}} dx + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \int \frac{\frac{\cos x}{\sqrt{x}}(-\sqrt{x})}{\frac{1}{x}} dx \\ &= -\frac{\cos x}{\sqrt{x}} \int -x \sin x \, dx + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \int -x \cos x \, dx \\ &= -\frac{\cos x}{\sqrt{x}} (x \cos x - \sin x) + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} (-x \sin x - \cos x) \\ &= -\sqrt{x} \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral da equação diferencial dada é

$$y(x) = C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}.$$

III

5. Resolva o sistema de equações diferenciais lineares,

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 4y_2 \\ y_2' = -y_1 + y_2 \end{cases}$$

Resolução – Exercício 5

(a) Escrever o sistema na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(b) Determinar os valores próprios de $\mathbf{A}$:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

(c) Determinar os vectores próprios de $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2y_1 + 4y_2 = 0 \\ -y_1 - 2y_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow y_1 = -2y_2 \end{aligned}$$

Assim, $v_1 = [-2\ \ 1]^{\mathrm{T}}$ é um vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 3$.

(d) Determinar $v_2 = [a\ \ b]^{\mathrm{T}}$ de modo que $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\, v_2 = v_1$.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b = -2 \\ -a - 2b = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a = -1 - 2b \end{aligned}$$

Considerando $b = 0$, resulta $v_2 = [-1\ \ 0]^{\mathrm{T}}$.

(e) Solução geral do sistema:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{3t},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

6. A solução geral do sistema de EDOs lineares homogéneo associado ao sistema

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 - y_2 + 2e^{t} \\ y_2' = 3y_1 + y_2 + 2e^{2t} \end{cases}$$

é o vector $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$

Use o método da diagonalização para determinar a solução geral do sistema dado.

Resolução – Exercício 6

(a) Escrever o sistema na forma matricial.

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2e^t \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}}_{\mathbf{g}(t)}$$

(b) Identificar valores próprios e vectores próprios.
Da solução do sistema homogéneo retira-se que a matriz $\mathbf{A}$ tem dois valores próprios distintos, a saber $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$, sendo $v_1 = [1\ \ 3]^{\mathrm{T}}$ e $v_2 = [1\ \ 1]^{\mathrm{T}}$ os respectivos vectores próprios associados.

(c) Matrizes de mudança de base, $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}^{-1}$ e matriz diagonal $\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(d) cálculo de $\mathbf{h}(t) = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{g}(t)$.

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{g}(t) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2e^t \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t + e^{2t} \\ 3e^t - e^{2t} \end{pmatrix}$$

(e) Resolver o sistema $\mathbf{z}' = \mathbf{D}\mathbf{z} + \mathbf{h}(t)$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^t + e^{2t} \\ 3e^t - e^{2t} \end{pmatrix} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z_1' - 2z_1 = -e^t + e^{2t} \\ z_2' - 4z_2 = 3e^t - e^{2t} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z_1 = c_1 e^{2t} + e^{2t}\displaystyle\int \left(-e^t + e^{2t}\right) e^{-2t}\,\mathrm{d}t \\ z_2 = c_2 e^{4t} + e^{4t}\displaystyle\int \left(3e^t - e^{2t}\right) e^{-4t}\,\mathrm{d}t \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z_1 = c_1 e^{2t} + e^t + te^{2t} \\ z_2 = c_2 e^{4t} - e^t + \frac{e^{2t}}{2} \end{cases} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

(f) Solução geral do sistema: $\mathbf{y}(t) = \mathbf{X}\mathbf{z}(t)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) = \mathbf{X}\mathbf{z}(t) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + e^t + te^{2t} \\ c_2 e^{4t} - e^t + \frac{e^{2t}}{2} \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} + \left(t + \frac{1}{2}\right) e^{2t} \\ 3c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} + 2e^t + \left(3t + \frac{1}{2}\right) e^{2t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

IV

7. Mostre que $\mathscr{L}\left\{-2 + \dfrac{e^{-3t}}{2}\left(1 + 5e^{2t}\right)\right\} = \dfrac{s^2 - 6}{s^3 + 4s^2 + 3s}$

Resolução – Exercício 7

Temos

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{-2 + \frac{e^{-3t}}{2}\left(1 + 5e^{2t}\right)\right\} &= \mathscr{L}\left\{-2 + \frac{e^{-3t}}{2} + \frac{5e^{-t}}{2}\right\} = -2\mathscr{L}\{1\} + \frac{1}{2}\mathscr{L}\left\{e^{-3t}\right\} + \frac{5}{2}\mathscr{L}\left\{e^{-t}\right\} \\
&= -\frac{2}{s} + \frac{1/2}{s+3} + \frac{5/2}{s+1} = \frac{s^2 - 6}{s^3 + 4s^2 + 3s}
\end{aligned}$$

8. Utilize o método da transformada de Laplace para resolver o PVI:

$$y'' + 4y' + 3y = -6, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -4.$$

RESOLUÇÃO – EXERCÍCIO 8

Temos

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{y'' + 4y' + 3y\right\} = \mathscr{L}\left\{-6\right\} &\Leftrightarrow \mathscr{L}\left\{y''\right\} + 4\mathscr{L}\left\{y'\right\} + 3\mathscr{L}\left\{y\right\} = \mathscr{L}\left\{-6\right\} \\
&\Leftrightarrow \left(s^2\mathrm{Y}(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4\left(s\mathrm{Y}(s) - y(0)\right) + 3\mathrm{Y}(s) = -\frac{6}{s} \\
&\Leftrightarrow \left(s^2 + 4s + 3\right)\mathrm{Y}(s) = -\frac{6}{s} + s \\
&\Leftrightarrow \left(s^2 + 4s + 3\right)\mathrm{Y}(s) = \frac{s^2 - 6}{s} \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Y}(s) = \frac{s^2 - 6}{s^3 + 4s^2 + 3s}
\end{aligned}$$

Pelo exercício anterior, a solução do PVI é $y(t) = -2 + \dfrac{e^{-3t}}{2}\left(1 + 5e^{2t}\right)$

FIM