ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E DE GESTÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Análise Matemática III 2004/2005

Cursos: EC, EE, EI, EM, EQ, GEI

Exame 1ª Chamada - 18/01/2005

Duração: 2h 30 min — Com Consulta de Formulário

Resolva os 4 grupos em folhas ou conjuntos de folhas *SEPARADOS*.
Apresente todos os cálculos necessários.
Dê boa apresentação à prova.

I

Cotação do grupo por alínea: 1.5; 2; 1.5 valores

1. Determine a solução geral da equação $xy\,\mathrm{d}x + (1+x^2)\,\mathrm{d}y = 0$.

2. Considere a equação diferencial de 1ª ordem, $(\sec^2 y)\,y' = f(x)\tan y,\ x \in \mathbb{R}$.

   a. Determine todas as funções f para as quais a equação diferencial admite a função $v(x,y) = e^{x^2}$ como factor integrante.

   b. Considerando uma das funções f calculadas na alínea anterior, resolva o P.V.I.

$$\left(\sec^2 y\right) y' = f(x)\tan y, \quad y(0) = \pi/4.$$

II

Cotação do grupo por alínea: 2.5; 1; 2.5 valores

3. Resolva o problema de valor inicial,

$$\frac{x^2}{2}y'' + \frac{5x}{2}y' + 2y = 0, \quad y(1) = y'(1) = 2, \quad (x > 0).$$

4. Considere a equação diferencial linear de 2ª ordem, $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)\,y + x^2\sqrt{x} = 0$.
   As funções $y_1(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ e $y_2(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ são soluções da equação homogénea associada à equação diferencial dada, no intervalo $x \in]0, +\infty[$.

   a. Mostre que as funções y_1 e y_2 formam um sistema fundamental de soluções da equação diferencial homogénea associada à equação diferencial dada, para $x \in]0, +\infty[$.

   b. Determine a solução geral da equação dada.

V.S.F.F

III

Cotação do grupo por questão: 2; 3 valores

5. Resolva o sistema de equações diferenciais lineares,

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 4y_2 \\ y_2' = -y_1 + y_2 \end{cases}$$

6. A solução geral do sistema de EDOs lineares homogéneo associado ao sistema

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 - y_2 + 2e^t \\ y_2' = 3y_1 + y_2 + 2e^{2t} \end{cases}$$

é o vector $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$

Use o método da diagonalização para determinar a solução geral do sistema dado.

IV

Cotação do grupo por questão: 2; 2 valores

7. Mostre que $\mathscr{L}\left\{-2 + \dfrac{e^{-3t}}{2}\left(1 + 5e^{2t}\right)\right\} = \dfrac{s^2 - 6}{s^3 + 4s^2 + 3s}$

8. Utilize o método da transformada de Laplace para resolver o PVI:

$$y'' + 4y' + 3y = -6, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -4.$$

FIM