Soluções de Exercícios

Soluções de exercícios do sub-capítulo 1.2

1. c;	2. b;
3. a;	4. d;
5. a;	6. c;
7. d;	8. c;
9. c;	10. a;
11. b;	12. a. ii; b. i; c. i; d. iv;

13. a. $\left\{-\sqrt[3]{2};3\right\}$; b. { }; c. {1}; d. {4}; e. {-1; 1}; f. {-2; 4}; g. $\left\{\frac{-1-\sqrt{13}}{2};0;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$;
h. {1}; i. { }; j. { }.

16. a.]-3;∞[; b.]1; 3[; c. $\left]-\frac{1}{2};1\right[$; d.] -∞; -2[$\cup\left[-\sqrt{2/3};\sqrt{2/3}\right]$; e.] -∞; -1[∪ [1; ∞[;
f.] -∞; $-\frac{5}{2}$] ∪ [$\frac{3}{2}$; ∞[; g. [-1; 2]; h.]5; ∞[.

Soluções de exercícios do sub-capítulo 2.5

1.a. Não podem ser gráficos de funções reais de variável real as seguintes figuras: 1.2, 1.4 e1.6.

1.b. Fig.1.1: $D = IR^+$ $\quad \mathrm{Im} = IR$ injectiva;

Fig.1.3: $D = IR \setminus \{0\}$ $\quad \mathrm{Im} = IR \setminus \{0\}$ injectiva;

Fig.1.5: $D = IR \setminus \{0\}$ $\quad \mathrm{Im} = IR^- \cup [e,+\infty[$ não injectiva;

Fig.1.7: $D = IR$ $\quad \mathrm{Im} = IR^+$ injectiva;

Fig.1.8: $D = IR$ $\quad \mathrm{Im} = IR$ injectiva;

Fig.1.9: $D = IR$ $\quad \mathrm{Im} = IR^+$ não injectiva;

1.c.

Fig./função	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x								x	
$\lvert x\rvert$									x
e^x							x		
$1/x$			x						
e^x/x					X				
$Ln(x)$	x								

2. Determine o domínio das seguintes funções:

a. $D_{\sqrt{x^4-1}} =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$

b. $D_{\sqrt[5]{x^4-1}} = IR$

c. $D_{\frac{x^2-4}{x+3}} = IR \setminus \{-3\}$

d. $D_{\frac{1}{\sqrt{x+3}}} =]-3,+\infty[$

e. $D_{\frac{1}{|x^2-25|}} = IR \setminus \{-5,5\}$

f. $D_{\frac{1}{4^{x^2-1}}} = IR \setminus \{-1,1\}$

g. $D_{\log_3(9-x^2)} =]-3,3[$

h. $D_{\begin{cases}\ln(x^2-4) & ,\ x>0\\ \sqrt{2x+x^2} & ,\ x\le 0\end{cases}} =]-\infty,-2] \cup \{0\} \cup]2,+\infty[$

i. $D_{sen|x|} = IR$

j. $D_{\cos\left(\frac{1}{3x}\right)} = IR \setminus \{0\}$

k. $D_{tg(x-\pi)} = IR \setminus \left\{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

3.

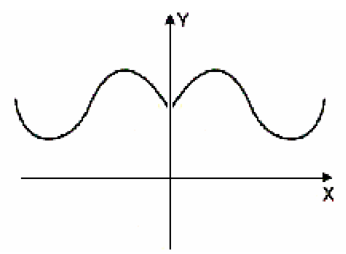
a. Por exemplo $D = IR_0^+ \quad B = IR$;
b. Por exemplo $D = IR \quad B = [-16,+\infty[$;
c. Por exemplo $D = IR_0^+ \quad B = [-16,+\infty[$;
d. Por exemplo $D = IR \quad B = IR$;
e. Por exemplo $D = IR_0^+ \quad B = IR$;

4.

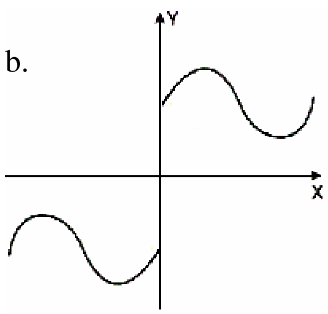
a. Falsa; b. Falsa; c. Falsa
d. Verdadeira; e. Verdadeira; f. Falsa

5.

a.



b.



6. a. Ímpar; b. par

7. a. injectiva; b. não injectiva.

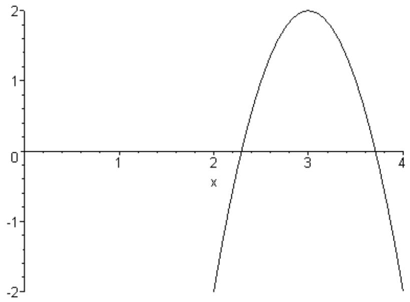
8. a. $y=-\dfrac{5}{2}x+4$; b. $y=-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{11}{2}$; c. $y=\dfrac{2}{5}x+1$.

9. a. Falsa; b. Falsa c. Falsa d. Falsa

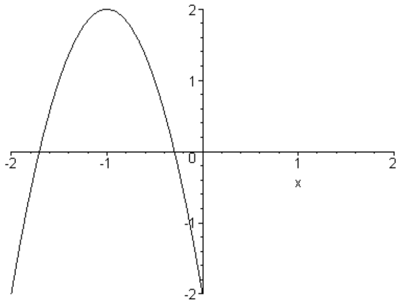
10. c

11.

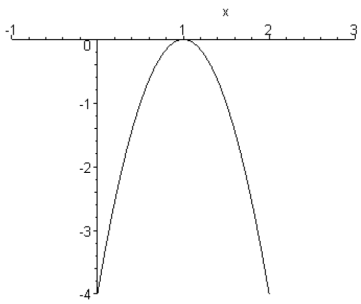
a)



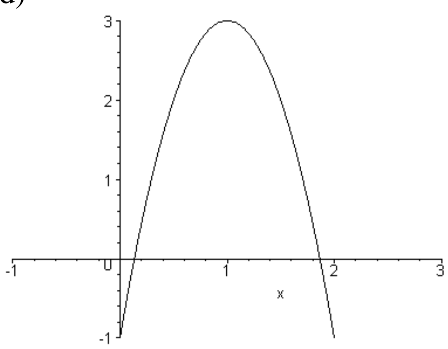
b)



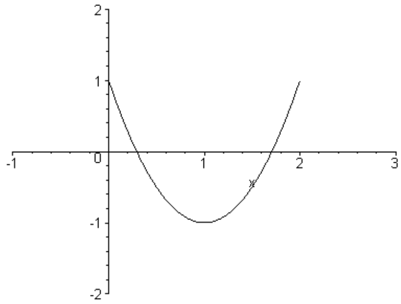
c)



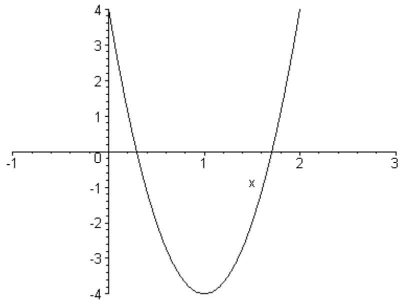
d)



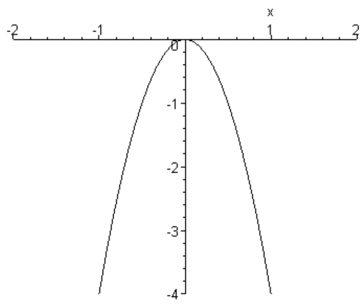
e)



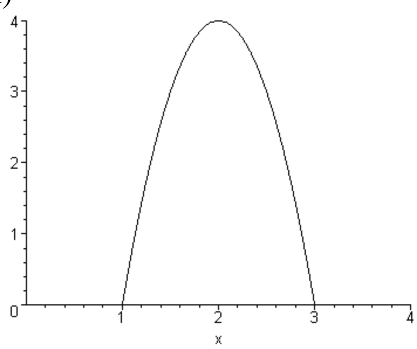
f)



g)

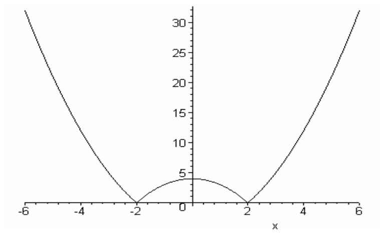


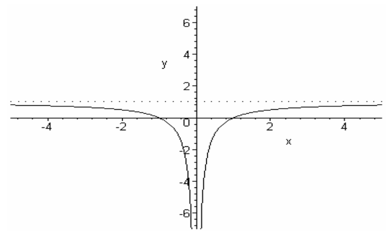
h)



12. B
13. a. Figura 5.2 b. Figura 5.4 c. Figura 5.5
14. B
15. D
16. C
17. c
18. C
19. a.i.1/2 a.ii. -4

b.





c.i. $x \in]-2, 0[\cup]1, 2[$ c.ii. $x \in]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$

d. $y = x^2 - 4$

20. a. $\left]0, \frac{1}{6}\right]$ b. $(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{1}{2x} - 3}$

21. a.

$$\begin{aligned} f \circ g : \left]-\infty, \tfrac{4}{3}\right[&\rightarrow \Re \\ x &\mapsto \sqrt{\frac{1}{4-3x}} \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} g \circ f : \Re^+ &\rightarrow \Re \\ x &\mapsto 4 - 3\sqrt{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

22.

$$\begin{aligned} f \circ g : \Re &\rightarrow \Re \\ x &\mapsto \begin{cases} 5x^3 & se \quad x \le 0 \\ -x^3 & se \quad 0 \le x \le 2 \\ x\sqrt{x} & se \quad x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

23. c e d.
24. b
25. Não.

26. $f(x) = x$

27. c

28. a. $D = [-3, +\infty[\quad CD = [5, +\infty[$

b. $\begin{array}{llll} f^{-1} : [5, +\infty[& \to & [-3, +\infty[\\ x & \mapsto & (x-5)^2 - 3 \end{array}$

c. $S = \{ \ \}$

29. a.

$\begin{array}{lll} f^{-1} : \Re_0^+ & \to & \Re_0^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ e $\begin{array}{lll} g^{-1} : \Re \setminus \{1\} & \to & \Re \setminus \{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+5}{x-1} \end{array}$

b.

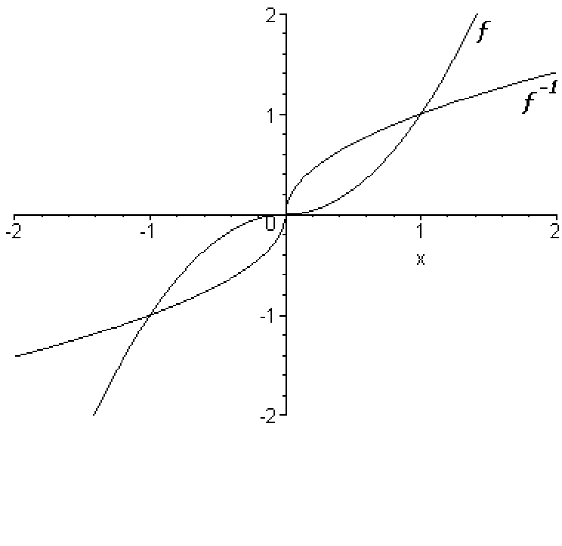
$\begin{array}{lll} (f \circ g)^{-1} : \Re \setminus \{-1;1\} & \to &]-\infty;-5] \cup]1;+\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{x^2+5}{x^2-1} \end{array}$ $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

30. a.

$f^{-1} : \Re \to \Re$

$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & , x < 0 \end{cases}$

b.



Conclui-se que o gráfico de f e de f^{-1} são simétricos relativamente à recta $y = x$ (bissectriz dos quadrantes impares).

31. C

32. b

33. b.

34. a. Verdadeira b. Falsa c. Falsa.

35. b;

36. b;

37.

a. -3

b. $\frac{3}{2}$

c. 8

d. -2

38. c;

39. c;

40. b;

41. b;

42.

a. $]0,\ 1[\cup\left]\frac{3}{2},\ 3\right[$

b. $\{\ln 2\}$

c. $\{-1, 3\}$

d. $1+\sqrt{2}$

e. $\{2\}$

f. $\left\{\frac{1}{125}\right\}$

g. $]-\infty, 2[$

h. $]0, +\infty[$

i. $]2, 3[\cup]3, +\infty[$

43. a. $\{\ln\sqrt[3]{2}\}=\left\{\frac{1}{3}\ln 2\right\}$

b.

$$\begin{array}{lll} h^{-1}: &]-\infty,\ 2[& \longrightarrow \Re \\ & x & \mapsto \ln\left(\sqrt[3]{1-\frac{x}{2}}\right) \end{array}$$

44.

a. $]-e,\ e[$

b. 3

c. $\left]-e, -\frac{\sqrt{3}}{2}e\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{2}e,\ e\right[$

45.

a. $-\frac{1}{2}$

b. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c. $-\sqrt{3}$

d. 1

e. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

f. Não está definida

g. $\sqrt{2}$

h. $-\sqrt{2}$

i. 2

j. $-\frac{\pi}{4}$

k. $\frac{\pi}{6}$

l. π

m. $\frac{4\sqrt{15}}{15}$

n. $\frac{\sqrt{13}}{2}$

o. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

p. $-\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$

q. $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$

r. $-\frac{\pi}{3}$

s. $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$

t. $-\frac{9\sqrt{3}+8\sqrt{2}}{5}$

u. $-\frac{\pi}{2}+\frac{3}{4}$

Resolução de algumas alíneas do ex.45:

a) $$sen\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$ *(note que a função seno é ímpar)*

b) $$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

c)

$$tg\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -tg\left(\frac{4\pi}{3}\right) \quad \textit{porque tg é uma função impar}$$

$$= -tg\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = -tg\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \textit{porque } \pi \textit{ é o período da tg}$$

$$= -\sqrt{3}$$

g) $$\operatorname{cos}ec\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{sen\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{sen\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

h)

$$\sec\left(\frac{219\pi}{4}\right) = \sec\left(54\pi+\frac{3\pi}{4}\right) = \sec\left(\frac{3\pi}{4}\right) \quad \textit{porque o periodo da } \sec \textit{ é } 2\pi$$

$$= \frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = -\sqrt{2}$$

j)

$$arcsen\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=x \iff sen(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\iff sen(x)=-sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \wedge x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\iff sen(x)=sen\left(-\frac{\pi}{4}\right) \wedge x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\iff x=-\frac{\pi}{4}$$

Logo $arcsen\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$

k)

$$arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=x \iff tg(x)=\frac{1}{\sqrt{3}} \wedge x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\iff tg(x)=tg\left(\frac{\pi}{6}\right) \wedge x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\iff x=\frac{\pi}{6}$$

Logo $arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}$

m) $$\cos ec\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)=\frac{1}{sen\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)}=\frac{1}{sen(x)}=y$$

onde

$$\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)=x \iff \cos(x)=-\frac{1}{4} \wedge x\in[0,\pi]$$

$$\Rightarrow x\in 2^{o}\ quadrante$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria sabemos que:

$$\cos^2(x)+sen^2(x)=1 \iff sen^2(x)=1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\iff sen(x)=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Como $x \in 2^o$ *quadrante e a função seno no* 2^o *quadrante é positivo, temos que* $sen(x) = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Logo $\cos ec\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \dfrac{1}{sen\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)} = \dfrac{1}{sen(x)} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \dfrac{4}{\sqrt{15}} = \dfrac{4\sqrt{15}}{15}.$

o) $$sen\left(2\arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)\right) = sen(2x) = 2sen(x)\cos(x)$$

onde

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right) = x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) = \frac{\sqrt{10}}{5} \quad \wedge \quad x \in [0, \pi]$$
$$\Rightarrow \quad x \in 1^o \; quadrante$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria sabemos que:

$$\cos^2(x) + sen^2(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad sen^2(x) = 1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad sen(x) = \pm\frac{\sqrt{15}}{5}$$

Como $x \in 1^o$ *quadrante e a função seno no* 1^o *quadrante é positivo, temos que* $sen(x) = \frac{\sqrt{15}}{5}$

Logo $sen\left(2\arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)\right) = sen(2x) = 2sen(x)\cos(x) = 2\frac{\sqrt{15}}{5} \times \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

r) $$arctg\left(-2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = arctg\left(-\sqrt{3}\right) = x$$

onde

$$arctg\left(-\sqrt{3}\right) = x \quad \Leftrightarrow \quad tg(x) = -\sqrt{3} \quad \wedge \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
$$\Leftrightarrow \quad tg(x) = tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad \wedge \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{3}$$

Logo $arctg\left(-2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=arctg\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$.

t)

$$tg\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)+arcsen\left(\frac{1}{2}\right)\right)=tg\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{tg(x)+tg\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1-tg(x)\cdot tg\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{tg(x)+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}tg(x)}$$

onde

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right)=x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x)=\frac{1}{3} \quad \wedge \quad x\in[0,\pi]$$

$$\Rightarrow \quad x\in 1^{\text{o}}\ quadrante$$

Usando a fórmula fundamental da trigonometria e o facto de $x\in 1^{\text{o}}$ *quadrante podemos concluir que* $sen(x)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ *e portanto* $tg(x)=\frac{sen(x)}{\cos(x)}=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}=2\sqrt{2}$

Logo $tg\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)+arcsen\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{tg(x)+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}tg(x)}=\frac{6\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3-2\sqrt{6}}=-\frac{38\sqrt{2}+9\sqrt{3}}{15}$

46. a. 1 b. $a=1$ e $b=-4$

47. b;

48.

arcsen (x) : D

arccos (x) : A

arctan (x) : C

sec(x) : b

49.

a. $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{5\pi}{6}+k\pi\right\}, k\in Z$ b. $\left\{\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}\right\}, k\in Z$ c. $\left\{\frac{\sqrt{3}}{8}\right\}$

d. $\left\{\frac{3\pi}{8}+k\pi,\ \frac{5\pi}{8}+k\pi\right\}, k\in Z$ e. $\left\{\frac{\pi}{15}+\frac{2}{5}k\pi,\ \frac{2\pi}{15}+\frac{2}{5}k\pi\right\}, k\in Z$ f. $\left\{\frac{2}{3}k\pi,\ \pi+2k\pi\right\}, k\in Z$

g. $\left\{ arctg\left(-\frac{9+\sqrt{57}}{4}\right)+k\pi; arctg\left(\frac{-9+\sqrt{57}}{4}\right)+k\pi \right\}, k\in Z$

h. $\left\{ \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+k\pi; \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+k\pi; \arccos\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+k\pi; \arccos\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+k\pi \right\}$

i. $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ j. $\{-10\}$ k. $\{1\}$ l. $\{-1\}$

<u>Resolução de algumas alíneas do ex.49:</u>

a)

$$\begin{aligned}
sen\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2} &\Leftrightarrow sen\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\\
&\Leftrightarrow sen\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=sen\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\
&\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \ \vee\ 2x+\frac{\pi}{6}=\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi, \quad k\in Z\\
&\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k\pi \ \vee\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in Z\\
&\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{6}+k\pi \ \vee\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in Z
\end{aligned}$$

b)

$tg(4x)=cotg(x)$

Para resolver esta equação é necessário começar por escrever $cotg(x)=tg(\ldots)$ *e seguidamente aplicar a fórmula. (rever relações entre tangente e co-tangente – páginas 72 e 73)*

Podemos escrever $cotg(x)=tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

Logo,

$$\begin{aligned}
tg(4x)=cotg(x) &\Leftrightarrow tg(4x)=tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\
&\Leftrightarrow 4x=\frac{\pi}{2}-x+k\pi, \quad k\in Z\\
&\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}, \quad k\in Z
\end{aligned}$$

c) $\arccos(4x)=\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 4x=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{8}$, *note que a função* $\arccos(4x)$ *só está definida para valores de* $x\in\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ *e o valor encontrado para* x *pertence ao domínio, logo é solução da equação.*

f)

$$\begin{aligned} sen(2x)+sen(x)=0 &\Leftrightarrow sen(2x)=-sen(x)\\ &\Leftrightarrow sen(2x)=sen(-x)\\ &\Leftrightarrow \ldots \end{aligned}$$

outra resolução:

$$\begin{aligned} sen(2x)+sen(x)=0 &\Leftrightarrow 2sen(x)\cos(x)+sen(x)=0\\ &\Leftrightarrow sen(x)(2\cos(x)+1)=0\\ &\Leftrightarrow sen(x)=0 \quad \vee \cos(x)=-\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \ldots \end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned} tg(\arccos(x))=\frac{1}{\sqrt{3}} &\Leftrightarrow tg(\arccos(x))=tg\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &\Leftrightarrow arctg(tg(\arccos(x)))=arctg\left(tg\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\\ &\Leftrightarrow \arccos(x)=\frac{\pi}{6}\\ &\Leftrightarrow x=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

50. $\frac{4\sqrt{3}-3+\sqrt{10}}{10}$

51. **<u>Resolução:</u>**

a)

$sen(2x)<sen(x)$, *em* $[0,2\pi[$

$sen(2x)<sen(x) \Leftrightarrow sen(2x)-sen(x)<0$

<u>*Cálculo auxiliar:*</u>

$$sen(2x) - sen(x) = 0 \iff sen(2x) = sen(x)$$
$$\iff 2x = x + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = \pi - x + 2k\pi, \quad k \in Z$$
$$\iff x = 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{2k+1}{3}\pi, \quad k \in Z$$

Destes valores os que pertencem a $[0,2\pi[$ *são:*

$x = 0$; $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \pi$ *e* $x = \frac{5\pi}{3}$

Vamos agora estudar o sinal da função $sen(2x) - sen(x)$ *no intervalo* $[0,2\pi[$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$sen\,(2x) - sen\,(x)$	0	+	0	−	0	+	0	−	*Não pertence ao domínio*

Logo $sen(2x) < sen(x) \iff x \in \left]\frac{\pi}{3}, \pi\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right[$

b). $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[$

c)

A função $\arccos\left(\frac{x+1}{2}\right)$ *só está definida se* $-1 \le \frac{x+1}{2} \le 1 \iff -3 \le x \le 1.$

Portanto só faz sentido avaliar $\arccos\left(\frac{x+1}{2}\right) < \frac{2\pi}{3}$ *se* $x \in [-3,1]$

$$\arccos\left(\frac{x+1}{2}\right) < \frac{2\pi}{3} \iff \arccos\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{2\pi}{3} < 0$$

<u>*Cálculo auxiliar:*</u>

$$\arccos\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{2\pi}{3} = 0 \iff \arccos\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$
$$\iff \frac{x+1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$\iff x = -2$$

Vamos agora estudar o sinal da função $\arccos\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{2\pi}{3}$ *no intervalo* $[-3,1]$

	-3		-2		1

$\arccos\left(\frac{x+1}{2}\right)-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$-$	0	$+$	$\frac{\pi}{3}$

Logo $\arccos\left(\frac{x+1}{2}\right)<\frac{2\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x\in[-3,-2[$

52. d;

53. c;

54.

a. $\left]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right[$

b. $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}, k\in Z$

55.

a. $D=\Re\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{3}, k\in Z\right\} \qquad D^{'}=\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$

b.

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[& \longrightarrow & \left[\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}\right]\setminus\left\{\frac{\pi}{4}\right\} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{\pi}{12} \end{array}$$

56.

a. $D=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \qquad D^{'}=\left[-\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$

b.

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \left[-\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right] & \longrightarrow & \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \\ & x & \mapsto & \frac{1}{2}sen\left(\frac{\pi}{12}-\frac{x}{3}\right) \end{array}$$

c. $\frac{1}{2}sen\left(\frac{\pi}{12}\right)$

d. $A=\{0\}$

57. **<u>Resolução:</u>**

a)

$$h(-x)=2\pi-3\arccos\left(\frac{1-(-x)^2}{2}\right)=2\pi-3\arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right)=h(x)$$

Logo h é uma função par.

b)

Comecemos primeiro por calcular o domínio de h.

$$D_h = \left\{ x \in IR : -1 \leq \frac{1-x^2}{2} \leq 1 \right\} = \left\{ x \in IR : -2 \leq 1-x^2 \leq 2 \right\} = \left\{ x \in IR : -3 \leq -x^2 \leq 1 \right\}$$

$$= \left\{ x \in IR : -1 \leq x^2 \leq 3 \right\} = \left\{ x \in IR : x^2 \leq 3 \right\} = \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3} \right]$$

Determinemos agora o contradomínio:

$$-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x^2 \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leq -x^2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq 1-x^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 \leq \frac{1-x^2}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \arccos(-1) \geq \arccos\left(\frac{1-x^2}{2} \right) \geq \arccos\left(\frac{1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3} \leq \arccos\left(\frac{1-x^2}{2} \right) \leq \pi$$

$$\Leftrightarrow \quad -\pi \leq 2\pi - 3\arccos\left(\frac{1-x^2}{2} \right) \leq \pi$$

Logo $\mathrm{Im}(h) = CD_h = [-\pi, \pi]$.

c)

O subconjunto do D_h *não negativo é* $D_{h^+} = \left[0, \sqrt{3}\right]$. *Neste intervalo, a imagem de* h *é* $[-\pi, \pi]$ *pois já vimos na alínea a) que a função é par.*

Determinemos a expressão analítica da inversa de h *em* D_{h^+} *note-se que neste domínio* h *é uma função injectiva (verifique!!!)*

$$h(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi - 3\arccos\left(\frac{1-x^2}{2} \right) = y \quad \Leftrightarrow \quad \arccos\left(\frac{1-x^2}{2} \right) = \frac{2\pi - y}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 1 - 2\cos\left(\frac{2\pi - y}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{1 - 2\cos\left(\frac{2\pi - y}{3} \right)}$$

Logo a inversa de h *em* D_{h^+} *é:*

$$\begin{array}{cccc} h^{-1}: & [-\pi, \pi] & \rightarrow & \left[0, \sqrt{3}\right] \\ & x & \mapsto & \sqrt{1 - 2\cos\left(\frac{2\pi - x}{3} \right)} \end{array}$$

Note-se que $h^{-1}(x)\in\left[0,\sqrt{3}\right]$ *logo a inversa tem que ser definida à custa da raiz positiva.*

d)

$$A=\left\{x\in D_h : h(x)\leq\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$h(x)\leq\frac{\pi}{2}\quad\Leftrightarrow\quad h(x)-\frac{\pi}{2}\leq 0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{3\pi}{2}-3\arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{\pi}{2}-\arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right)\leq 0$$

<u>*Cálculo auxiliar:*</u>

$$\frac{\pi}{2}-\arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right)=0\quad\Leftrightarrow\quad\arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{1-x^2}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad x=\pm 1$$

Vamos agora estudar o sinal de $\frac{\pi}{2}-\arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right)$ *em* $D_h=\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$

x	$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}-\arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{2}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\frac{3\pi}{2}$

Logo $h(x)\leq\frac{\pi}{2}\quad\Leftrightarrow\quad x\in\left[-\sqrt{3},-1\right]\cup\left[1,\sqrt{3}\right]$.

58. **<u>Resolução:</u>**

a)

$$D_f=\{x\in IR : 2x+1\in IR\}=IR$$

$$2x+1\in IR\quad\Rightarrow\quad -\frac{\pi}{2}<arctg(2x+1)<\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad -\pi<-2arctg(2x+1)<\pi$$

$$\Rightarrow\quad 0<\pi-2arctg(2x+1)<2\pi$$

Logo $\operatorname{Im}(f)=\left]0,2\pi\right[$

b)

$$
\begin{aligned}
-1 \le x \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \le 2x \le 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -1 \le 2x+1 \le 1 \\
&\Leftrightarrow \quad arctg(-1) \le arctg(2x+1) \le arctg(1) \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{4} \le arctg(2x+1) \le \frac{\pi}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \le -2arctg(2x-1) \le \frac{\pi}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} \le f(x) \le \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Isto prova que $\forall x \in [-1, 0]$ *tem-se* $f(x) \ge \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad f(x) \ne 0$

c)

f *é uma função injectiva pois é composta de funções injectivas e portanto podemos definir a sua inversa.*

$$
\begin{aligned}
f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \pi - 2arctg(2x+1) = y \quad &\Leftrightarrow \quad arctg(2x+1) = \frac{\pi}{2} - \frac{y}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad 2x+1 = tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{-1 + cotg\left(\frac{y}{2}\right)}{2}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{array}{cccc}
f^{-1}: &]0,2\pi[& \to & IR \\
 & x & \mapsto & \frac{1}{2}\left(-1 + cotg\left(\frac{y}{2}\right)\right).
\end{array}
$$

59.

a. $D = \Re \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\}$

60.

a. $\left\{ k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right\}, k \in Z$

b. $(f \circ g)(x) = \frac{1}{2} - sen(2\arccos(x-1)) = \frac{1}{2} - 2(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}$

$(f \circ g)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{4\sqrt{5}}{9}$

c. $$\begin{array}{rcl} g^{-1} : [0, 2\pi] & \longrightarrow & [0, 2] \\ x & \mapsto & \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \end{array}$$

61. a. $\frac{\pi}{6}$ b. $\frac{\pi}{6}$ c. $\frac{\pi}{6}$

Soluções de exercícios do sub-capítulo 3.5

1. a;
2. b;
3. c;
4. a. 1; b. 2; c. não existe; d. 8; e. 8; f. 8.
5. b;
6. a. 0 b. 0 c. $-\infty$; d. $\frac{1}{2}$;
   e. 1; f. $+\infty$; g. $-\infty$; h. -2;
   i. $\frac{9}{56}$; j. 64; k. $\frac{1}{2}$; l. $+\infty$;
   m. 0; n. 1; o. 0.
7. a. 0; b. 0.
9. c.

Soluções de exercícios do sub-capítulo 4.4

1. a. Falsa. Por exemplo, $f(x) = \ln(x)$ é uma função contínua e o seu domínio é $IR^+ \neq IR$.

b. Falsa. Por exemplo, a função $f(x)=\begin{cases} 1, & se \ \ x \geq 0 \\ -1, & se \ \ x < 0 \end{cases}$ tem domínio IR e não é contínua pois não é contínua em $x=0$ $\left(x=0 \in D_f \ \ e \ \ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1 \neq -1 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\right)$.

c. Falsa. Por exemplo, a função $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ tem domínio $IR\setminus\{1\}$ e é uma função contínua no seu domínio, pois é o quociente de funções contínuas (funções polinomiais).

d. Falsa. Por exemplo, a função $f(x)=sen(x)$ é uma função contínua em *IR* e não é uma função injectiva.

e. Falsa. Por exemplo, a função $f(x)=\begin{cases} x+1, & se \ \ x \geq 2 \\ x-1, & se \ \ x < 2 \end{cases}$ é uma função injectiva e não é uma função contínua (não é contínua em $x=2$) pois $\left(x=2 \in D_f \ \ e \ \ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=3 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\right)$.

2. a;
3. b, d;
4. a. A função é contínua em $x=0$;

   b. A função é contínua em $x=-1$;
5. a;
6. $p=-\dfrac{8}{3}$
7. c;
8. a (usando o teorema de Weierstrass);
9. a;
10. A função não é contínua em $x=0$, mas é contínua à direita deste ponto;
11. c (usando o teorema dos Valores intermédios ou de Bolzano);
12. c;
13. Porque a função não é contínua no intervalo $[0,2]$;

15. a. k = -1;

    b. Basta aplicar o teorema de Bolzano a f no intervalo $[-2,-1]$.

16. a. Falsa. Por exemplo, consideremos a função $f: \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\ \to \ IR$ definida por $f(x)=tg(x)$. Então *f* é uma função contínua neste intervalo (função trigonométrica) e não é limitada pois toma valores desde $-\infty \ \ a \ \ +\infty$ $\left(\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[: |tg(x)| > L \quad \forall L > 0\right)$.

b. Verdadeira. Se $f: I \to IR$ é contínua e I é um intervalo fechado então, pelo Teorema de Weierstrass, sabemos que f atinge o valor máximo e mínimo neste intervalo. Logo, f é limitada, isto é, $\exists L > 0 : |f(x)| \le L \quad \forall x \in I$.

c. Verdadeira (usando o Teorema dos Valores Intermédios ou de Bolzano);

d. Falsa (Seja $f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \ge 0 \\ -1 & se\ x < 0 \end{cases}$, $|f| = 1$ é contínua e no entanto f não é contínua (em $x = 0$.));

e. Falsa (Seja $f(x) = \begin{cases} 3 & se\ 2 \le x \le 4 \\ 7 & se\ 4 < x \le 5 \end{cases}$, f é crescente e 5 não faz parte da imagem de f;

f. Falsa;

g. Verdadeira (Por hipótese, f é contínua para $x > 0$ e em $x = 0$. Como para $x \ge 0$ $f(|x|) = f(x)$ então $f(|x|)$ é contínua para $x \ge 0$; e como $f(|x|)$ é uma função par então para $x \le 0$ $f(|x|)$ também é contínua).

17. b;

Soluções de exercícios do sub-capítulo 5.9

1. a. $\dfrac{-1}{(a+5)^2}$; b. não existe; c. $\dfrac{5}{6}$.

2. a. $3x^2 - 12x$; b. $\dfrac{x^2 + 6x + 2}{(x+3)^2}$; c. $\dfrac{e^{\sqrt{x+2}}}{2\sqrt{x+2}}$;

d. $\dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$; e. $\dfrac{1}{2x\ln(x)}$; f. $-(8x+3)sen(4x^2 + 3x)$;

g. $\left(2x\ln(\tan(x)) \dfrac{x^2}{\cos(x)sen(x)}\right)(\tan(x))^{x^2}$.

3. a. $2\cos(2x)$; b. $\dfrac{2 - 6x^2}{(1 + x^4)^2}$;

4. a. $\dfrac{175}{2}$; b. $\left(2arcsen(t) + \dfrac{1}{arcsen(t)}\right)\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

5. a. Recta tangente: $y = 5$; Recta normal: $x = -2$

b. Recta tangente: $y = 3x - 2$; Recta normal: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

c. Rectas tangentes: $y = 2x + 3$ e $y = -2x + 3$;

Rectas normais: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

6. b;
7. a;
8. d;
9. a. Falsa; b. Verdadeira.

10. **Resolução:**

Defina-se $f(x) = x^2 - xsen(x) - \cos(x)$ *e considere-se o intervalo fechado* $[-\pi, \pi]$.

Pretende-se provar que f *tem apenas duas soluções em* $[-\pi, \pi]$.

Em primeiro lugar, podemos observar que f *é uma função par, e portanto é suficiente provar que* f *tem um único zero no intervalo* $]0, \pi]$ *(porque é que se exclui o zero?).*

Comecemos por provar que f *tem zeros no intervalo* $[0, \pi]$, *diferentes de 0.*

Ora $f(0) = -\cos(0) = -1 < 0$ *e* $f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0$. *Pelo corolário do teorema dos valores intermédio (ver teóricas página 95), como* f *é contínua podemos concluir que* f *tem pelo menos um zero no interior do intervalo* $[0, \pi]$.

Vamos agora provar que f *não pode ter mais que um zero no intervalo* $[0, \pi]$.

$f'(x) = 2x - x\cos(x)$.

$$f'(x) = 0 \iff 2x - x\cos(x) = 0 \iff x = 0 \lor \cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$\iff x = 0 \lor x = \frac{\pi}{3}$$

(Note que no intervalo $[0, \pi]$ *a equação* $\cos(x) = \frac{1}{2}$ *tem solução única.)*

Pelo corolário 2 do teorema de Rolle (ver teórica página 113) entre dois zeros consecutivos da derivada existe no máximo um zero da função. Vamos aplicar o *corolário do teorema dos valores intermédios para averiguar se* f *tem zeros no intervalo* $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$.

Ora $f(0)=-\cos(0)=-1<0$ *e*

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{\pi}{3}\right)^2-\frac{\pi}{3}sen\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi^2-\left(2\sqrt{3}\pi+9\right)}{18}>0$. *Logo* $f(0)\cdot f\left(\frac{\pi}{3}\right)<0$ *e portanto* f *tem um único zero no intervalo* $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ *(pois* f *é uma função contínua e* $x=0$ *e* $x=\frac{\pi}{3}$ *são zeros consecutivos da derivada.)*

Basta agora provar que f *não tem zeros no intervalo* $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$.

Já vimos que f' *não se anula no intervalo* $\left]\frac{\pi}{3},\pi\right]$ *e portanto a função derivada preserva o sinal. Como* $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi>0$, *então* $f'(x)>0$ *para todo* $x\in\left]\frac{\pi}{3},\pi\right]$, *ou seja* f *é crescente. Logo* $f(x)\geq f\left(\frac{\pi}{3}\right)>0$ *para todo* $x\in\left]\frac{\pi}{3},\pi\right]$, *ou seja,* f *não tem zeros no intervalo* $\left]\frac{\pi}{3},\pi\right]$.

Portanto: f *tem um único zero no intervalo* $]0,\pi]$, *como queríamos mostrar.*

11. a. 0; b. $+\infty$; c. 1;
 d. e^{-1}; e. 1; f. 1;
 g. e^2; h. 1; i. 0.

12. a. Falsa; b. Falsa; c. Falsa; d. Verdadeira.

13. c;

14. d;

15. c;

16. D;

17. A;

18. d;

19. A;

20. b;

21. c;

22. d;

23. b;

24. d;

25. c;

26. a;

27. b;

28. b;

29. d;

30. b;

31. a.
Domínio: IR;
Zeros: $x = 1$;
Assímptotas:
$x = 0$
$y = 0$
$y = x - 1$
Pontos Críticos:
$x = -1$
$x = 0$
$x = 2$
Intervalos de Monotonia: $]-\infty,-1[\ e\ ]2,+\infty[$ crescente e $]-1,0[\ e\ ]0,2[$ decrescente.
Pontos de inflexão:
$x = 0$
$x = 3$
Concavidades: $]-\infty,0[\ e\ ]3,+\infty[$ voltada para baixo. $]0,3[$ voltada para cima.

b.
Pontos Críticos: $x = 1$
Intervalos de Monotonia: $]2.+\infty[$ crescente.

c.
Pontos de inflexão: $x = \sqrt{3}$
Concavidades: $]0,\sqrt{3}[$ voltada para baixo. $]\sqrt{3},+\infty[$ voltada para cima.

Soluções de exercícios do sub-capítulo 6.7

1. a. $\frac{x^4}{4} + c$ b. $x^4 - x^3 + 5x + c$

c. $\frac{x^7}{7}+\frac{3x^5}{5}+x^3+x+c$

d. $-\frac{1}{x+1}+c$

e. $\frac{(x^2+2)^4}{4}+c$

f. $\frac{(x^3+1)^5}{15}+c$

g. $\frac{3}{8}(1+5x^2)^{4/5}+c$

h. $\frac{1}{(x-1)^2}+c$

i. $2\,ln|x|+c$

j. $ln|x+3|+c$

k. $\frac{(\ln(x))^2}{2}+c$

l. $\frac{1}{2}e^{2x}+c$

m. $\frac{2^x}{\ln(2)}+c$

n. $sen(2x)+c$

o. $-3\cos(\frac{x}{3})+c$

p. $\frac{(arctg(x))^2}{2}+c$

q. $4arcsen(x)+c$

r. $\frac{3\sqrt[3]{(5x)^2}}{10}+c$

2. a. $2(\frac{x\sqrt{x}}{3}+\sqrt{x})+c$

b. $\frac{(\ln(x))^2}{2}+c$

3.

a. $\frac{(2x+1)\sqrt{2x+1}}{3}+c$

c. $-arcsen(\frac{1}{x^2+2})+c=arc\,sec\left(x^2+2\right)+c$

b. $\frac{\ln(3^x+3^{-x})}{\ln(3)}+c$

d. $2arctg(\frac{1-\sqrt{-x^2+3x+1}}{x})+c=arcsen\left(\frac{2x-3}{\sqrt{13}}\right)+c$

4.

a. xe^x-e^x+c

b. $\frac{1}{2}x^2e^{x^2}-\frac{1}{2}e^{x^2}+c$

c. $x\ln(x)-x+c$

d. $x\ln^2(x)-2x\ln(x)+2x+c$

e. $\left(\frac{2}{5}x^2-\frac{4}{5}x-\frac{16}{135}\right)\sqrt{2-3x}+c$

f. $-\frac{ln^2(x+1)}{2}+(x+1)ln(x+1)-x+c$

g. $-\frac{\ln^2(x)}{x}-\frac{2\ln(x)}{x}-\frac{2}{x}+c$

h. $\frac{xsen(\ln x)-x\cos(\ln x)}{2}+c$

i. $-\cos(x).x+sen(x)+c$

j. $\frac{-sen(x)\cos(x)+x}{2}+c$

k. $(x^2-1)sen(x)+2x\cos(x)+c$

l. $xarctg(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$

m. $\dfrac{e^x sen(x) + e^x \cos(x)}{2} + c$

5. $f(x) = x^2[2\,ln(x) - 1] + 3$

6.

a. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right| + c$

b. $3\ln|x| + 2|x-4| + c$

c. $\dfrac{1}{3}\ln|x-2| - \dfrac{4}{3}\dfrac{1}{x-2} + c$

d. $\dfrac{25}{4}\ln|x| + \left(\dfrac{25}{6}\sqrt{3} - \dfrac{45}{8}\right)\ln\left|x - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right| - \left(\dfrac{25}{6}\sqrt{3} + \dfrac{45}{8}\right)\ln\left|x + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right| + c$

e. $x + \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| - \dfrac{1}{2}arctg(x) + c$

f. $\dfrac{3}{4}\ln|x-1| - \dfrac{1}{4}\ln|x+1| + \dfrac{1}{4}\ln\left(x^2+3\right) + c$

g. $\dfrac{x^2}{2} + x + \ln|x-2| - \dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right| - arctg\left(\dfrac{x}{2}\right) + c$

h. $x^2 + \ln|x-1| + \dfrac{3}{2}\ln\left|x^2+1\right| + c$

i. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{9}{20}\ln|x-1| - \dfrac{9}{40}\ln\left|x^2+9\right| - \dfrac{3}{20}arctg\left(\dfrac{x}{3}\right) + c$

j. $\dfrac{x^5}{10} - \dfrac{x^4}{16} + \dfrac{x^3}{24} - \dfrac{x^2}{32} + \dfrac{x}{32} - \dfrac{1}{64}\ln|2x+1| + c$

k. $\ln\left(x^2+1\right) + \dfrac{1}{x^2+1} + c$

l. $\ln|t| - \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) - arctg(t) + c$

m. $\dfrac{\ln|x|}{2} - \dfrac{\ln\left|x^2-2x+2\right|}{4} + \dfrac{3}{2}arctg\left(x-1\right) + c$

n. $\dfrac{x^2}{2} - 2x + \dfrac{1}{6}\ln|x-1| - \dfrac{1}{2}\ln|x+1| + \dfrac{16}{3}\ln|x+2| + c$

o. $\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{2}\text{arctg}\left(\dfrac{x}{2}\right) + c$

7. $arctg\left(3x+1\right) + \pi$

8. $\dfrac{4}{x+1} + 1$

9.

a. $\dfrac{5}{2}sen^2\left(\dfrac{x}{5}\right) + c$

b. $\dfrac{sen^3(x)}{3} + c$

c. $-\frac{1}{2}\ln\left|\cos(2x)\right|+c$

d. $\frac{1}{2}\ln\left|sen(x^2)\right|+c$

e. $-\frac{1}{3}\cot g^3(x)+c$

f. $3\ln\left|\cos ec\left(\frac{x}{3}\right)-\cot g\left(\frac{x}{3}\right)\right|+c$

g. $\ln\left|\sec(x)\right|+x+c$

h. $2\ln\left|\sec\sqrt{x}+tg\sqrt{x}\right|+c$

i. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{20}sen(10x)+c$

j. $sen(x)-\frac{1}{3}sen^3(x)+c$

k. $\frac{1}{2}\left(tg(x)\sec(x)+\ln\left|\sec(x)+tg(x)\right|\right)+c$

l. $\frac{1}{3}sen^3(x)-\frac{1}{5}sen^5(x)+c$

m. $\frac{1}{3}\left[\frac{1}{5}sen^5(3x)-\frac{2}{7}sen^7(3x)+\frac{1}{9}sen^9(3x)\right]+c$

n. $\frac{1}{4}\cos^8\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{3}\cos^6\left(\frac{x}{2}\right)+c$

o. $\frac{1}{16}x-\frac{1}{128}sen(8x)+\frac{1}{96}sen^3(4x)+c$

p. $\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}sen(4x)+c$

q. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sec^3(2x)-\sec(2x)\right]+c$

r. $\frac{1}{2}sen(x)-\frac{1}{10}sen(5x)+c$

s. $-\frac{1}{16}\cos(8x)+\frac{1}{4}\cos(2x)+c$

t. $\frac{1}{12}sen(6x)+\frac{1}{4}sen(2x)+c$

u. $\frac{2}{3}sen(x)\sqrt{sen(x)}+c$

v. $\frac{1}{4}tg^4(x)-\frac{1}{2}tg^2(x)+\ln\left|\cos(x)\right|+c$

w. $-2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)+c$

x. $\frac{4}{3}\sqrt{2}sen\left(\frac{3x}{2}\right)-\frac{4}{9}\sqrt{2}sen^3\left(\frac{3x}{2}\right)+c$

y. $-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\cos ec\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\cot g\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|+c$

z. $\frac{1}{18}\sec^6(3x)-\frac{1}{12}\sec^4(3x)+c$

α. $\frac{\sec^2(x)}{2}+c$

β. $-sen(x)+\ln\left(\frac{1+sen(x)}{\cos(x)}\right)$

10.

a. $\frac{\sqrt{x^2-4}}{4x}+c$

b. $-\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x}+c$

c. $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+c$

d. $\frac{x\sqrt{x^2+5}}{2}+\frac{5}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}\right|+c$

e. $\dfrac{x}{9\sqrt{9-x^2}}+c$

f. $-\dfrac{2}{1+tg\,\dfrac{x}{2}}+c$

g. $\dfrac{x\sqrt{x^2-4}}{2}+2\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+c$

h. $3\ln\left|\dfrac{3-\sqrt{9-4x^2}}{x}\right|+\sqrt{9-4x^2}+c$

i. $5\ln\left|\dfrac{5-\sqrt{25-x^2}}{x}\right|+\sqrt{25-x^2}+c$

j. $tg\left(\dfrac{x}{2}\right)+\log\sec^2\left(\dfrac{x}{2}\right)+c$

k. $-\dfrac{\sqrt{9-2x^2}}{9x}+c$

l. $\dfrac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+c$

m. $\dfrac{1}{2}arcsen\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)-\dfrac{x\left(1-x^2\right)\sqrt{2-x^2}}{4}+c$