Capítulo VI

Primitivação

6.1 Definição de Primitiva. Relação entre primitiva e derivadas.

Dada uma função F já sabemos determinar uma nova função F' que se obtém da anterior através da derivação. Pensemos no problema ao contrário:

Dada uma função f, será possível determinar uma
outra função F tal que $F'(x) = f(x)$?

A uma tal função F chama-se **primitiva** ou **integral** de f.

Tal como há regras para a derivação, vamos encontrar regras para a primitivação ou integração.

Definição:

*Uma função F é uma **primitiva** ou **integral** de uma função $f : I \to IR$ se*

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I$$

(I é um intervalo ou reunião finita de intervalos).

Exemplo:

1. $F(x) = x^2 + x$ é uma primitiva de $f(x) = 2x + 1$.

   $G(x) = x^2 + x + 2$ também é uma primitiva de $f(x) = 2x + 1$.

   $H(x) = x^2 + x - 30$ também é uma primitiva de $f(x) = 2x + 1$.

2. Uma primitiva de $f(x) = e^{2x} + x^2$ é $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}x^3$, outro exemplo também pode ser $G(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}x^3 + 5$. De facto, tem-se $F'(x) = G'(x)$.

Teorema:

Se F, G são duas primitivas de $f : I \to IR$, então F e G diferem apenas numa constante, isto é, existe C constante, tal que $G(x) = F(x) + C, \quad \forall x \in I$.

Segundo este teorema não se tem uma só primitiva de uma função, mas sim uma família de primitivas, cuja diferença entre elas é uma constante. Assim, podemos dizer que uma primitiva é **<u>única</u>** <u>a menos de uma constante</u>.

Notação:

Para indicar uma primitiva geral de f (nos termos do teorema anterior), utiliza-se a notação:

$$\int f(x)\, dx$$

Sinal de integral

Função a primitivar

Indica em ordem a que variável se vai primitivar

Escreve-se $\int f(x)\, dx = F(x) + C$ quando $F'(x) = f(x)$. C é a constante de integração.

<u>Exemplo:</u>

1. $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{x} + C$ 2. $\int \frac{1}{x}\, dx = ln(x) + C, \ x > 0$ 3. $\int e^x\, dx = e^x + C$

6.2 Primitivas imediatas. Regras de primitivação.

Como vimos pela definição a primitivação ou **integração é a operação inversa da derivação** e portanto temos as seguintes propriedades:

- $\int F'(x)\, dx = F(x) + C$;
- $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\, dx\right) = f(x)$.

Esta relação permite obter directamente propriedades e primitivas de várias funções a partir das propriedades e tabelas de derivação:

Fórmula de derivação	Fórmula de primitivação
$\frac{d}{dx}(C)=0$	$\int 0\ dx = C$
$\frac{d}{dx}(ax)=a$	$\int a\ dx = ax + C$
$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$	$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ para $(\ n \neq -1\ )$ (*)
$\frac{d}{dx}(ln(\ x\ ))=\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\ dx = ln\lvert x\rvert + C$ (**)
$\frac{d}{dx}(sen(\ x\ ))=cos(\ x\ )$	$\int cos(\ x\ )\ dx = sen(\ x\ )+C$
$\frac{d}{dx}(cos(\ x\ ))=-sen(\ x\ )$	$\int sen(\ x\ )\ dx = -cos(\ x\ )+C$
$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$	$\int e^x\ dx = e^x + C$
$\frac{d}{dx}(arctg(\ x\ ))=\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = arctg(\ x\ )+C$
$\frac{d}{dx}(arcsen(\ x\ ))=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = arcsen(\ x\ )+C$

(a e C são constantes.)

A fórmula (*) não é válida para o caso em que $n=-1$, nesse caso aplica-se a fórmula (**).

Exercício:

Verifique que $\frac{d}{dx}(ln\lvert x\rvert)=\frac{1}{x}$.

Proposição:

Tal como a derivação também a primitivação é uma operação linear, isto é:

- $\int k.f(x)\ dx = k\int f(x)\ dx$
- $\int [f(x)+g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$

Exercício:

Calcule as seguintes primitivas.

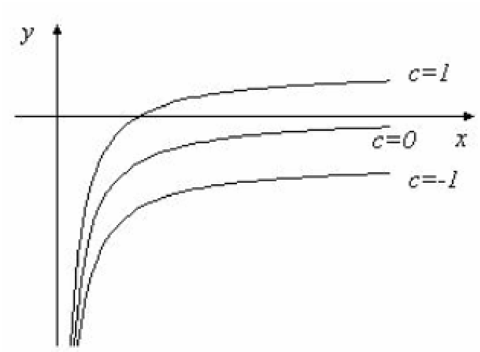
1. $\int \left(3x^4 - 2x + 5\right) dx$
2. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx$
3. $\int \frac{3x^2 - 2}{x^2}\, dx$
4. $\int \frac{dx}{x^2}$

<u>Resolução de 4.</u>

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C\,.$$

<u>Nota:</u>

Se considerarmos $x > 0$ comparemos o gráfico das três diferentes primitivas de $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Os gráficos correspondem a funções da forma $-\frac{1}{x} + C$, para valores de C iguais a 1, 0 e -1:



Exercício:

Determine a primitiva F da função $f(x) = 2x + e^{-x}$ tal que F(0)=3.

<u>Resolução:</u>

1º) Calcular a primitiva de f:

$$\int \left(2x + e^{-x}\right) dx = \int 2x\ dx + \int e^{-x}\ dx = 2\int x\ dx + \int e^{-x}\ dx = 2\frac{x^2}{2} + C_1 + \int e^{-x}\ dx =$$
$$= x^2 + C_1 + \int e^{-x}\ dx$$

É fácil de ver que uma primitiva de e^{-x} é $-e^{-x}$: $\frac{d}{dx}\left(-e^{-x}\right) = e^{-x}$.

Logo $\int \left(2x + e^{-x}\right) dx = x^2 + C_1 - e^{-x} + C_2 = x^2 - e^{-x} + C = F(x)$.

Note-se que a soma das constantes C_1, C_2 ainda é uma constante, *C*.

2º) Determinar *C* de modo que $F(0) = 3$:

$$F(0) = 0^2 - e^{-0} + C = 3 \quad \Leftrightarrow \quad -1 + C = 3 \quad \Leftrightarrow \quad C = 4$$

A resposta é $F(x) = x^2 - e^{-x} + 4$.

Nota:

- *Podemos sempre verificar se o resultado de uma primitiva está ou não correcto, por derivação;*
- *Resultados de uma primitiva aparentemente distintos podem, na verdade, diferir entre si apenas em uma constante;*
- *Há funções que apesar de serem* elementares *a sua primitiva* não é elementar, *por exemplo* e^{-x^2} *e* $\frac{sen(x)}{x}$.

6.3 Primitivação por substituição.

Já vimos como calcular primitivas de funções simples a partir da tabela de derivação. Passemos agora a funções mais "complicadas".
A **Regra da Cadeia** (ou regra da derivada da função composta – rever página 108) para derivação de uma **função composta** é:

$$\frac{d}{dx}F(u(x)) = F'(u(x)).u'(x)$$

Relacionando a regra da cadeia com a primitivação temos:

$$\int F'(u(x)).u'(x)\ dx = F(u(x)) + C$$

Exemplo:

Seja $f(x) = e^{kx}$ *onde* k *é uma constante diferente de zero.*

Pretende-se determinar $\int ke^{kx}dx$.

Podemos encarar a função f *como composta das funções* $u(x) = kx$ *e* $F(x) = e^x$.

Então, temos que:

- $F(u(x)) = e^{kx}$

- $F'(u(x))\cdot u'(x)=ke^{kx}$ *(derivada da função composta).*
- $\int ke^{kx}dx = \int F'(u(x))\cdot u'(x)dx = \int [F(u(x))]'dx = F(u(x))+C = e^{kx}+C$

Se em vez de $\int ke^{kx}dx$ *tivermos* $\int e^{kx}dx$, *o problema é de fácil resolução pois*

$$\int e^{kx}dx = \int \frac{k}{k}e^{kx}dx = \frac{1}{k}\int ke^{kx}dx$$

e este integral já sabemos calcular e portanto $\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx}+C$.

Exercício:

a. Calcule a primitiva da função $f(x)=2xe^{x^2-1}$.

Resolução:

Fazendo $u(x)=x^2-1$ vem que

$$\int f(x)dx = \int 2xe^{x^2-1}dx = \int u'(x)e^{u(x)}dx = \int \left(e^{u(x)}\right)' dx = e^{u(x)}+C = e^{x^2-1}+C$$

b. $\int 2xe^{x^2-1}dx$

Resolução:

Fazendo $u(x)=x^2-1$, $u'=2x$ vem que

$$\int \underbrace{2x}_{u'}\underbrace{e^{x^2-1}}_{e^u}dx = \int \left(e^{x^2-1}\right)'dx = e^{x^2-1}+C$$

c. $\int \frac{e^{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}}dx$

Resolução:

Fazendo $u(x)=\sqrt{x}-1$, $u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ podemos escrever o integral como $\int \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}-1}dx$, mas só aparece o factor $\frac{1}{\sqrt{x}}$ em vez de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Ora este problema resolve-se multiplicando o integral por $\frac{2}{2}$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}-1} dx = 2\int \overbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}^{u'} \overbrace{e^{\sqrt{x}-1}}^{e^u} dx = 2\overbrace{e^{\sqrt{x}-1}}^{e^u} + C\,.$$

Deduzimos assim uma fórmula mais geral de primitivação da função exponencial:

$$\int u' e^u \, dx = e^u + C$$

Ora esta fórmula pode, também, ser deduzida tendo em conta que u é função de x :

$\frac{d}{dx}\left(e^{u(x)}\right) = u'(x)\,e^{u(x)}$	(1) $\int u' e^u \, dx = e^u + C$

Procedendo de forma análoga temos:

$\frac{d}{dx}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = u'.u^n$	(2) $\int u'.u^n \, dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, se $n \neq -1$
$\frac{d}{dx}\left(\ln\lvert u\rvert\right) = \frac{u'}{u}$	(3) $\int \frac{u'}{u} dx = \ln\lvert u\rvert + C$
$\frac{d}{dx}\left(sen(u)\right) = u'.\cos(u)$	(4) $\int u'.\cos(u) \, dx = sen(u) + C$
$\frac{d}{dx}\left(\cos(u)\right) = -u'\,sen(u)$	(5) $\int -u'.sen(u) \, dx = -\cos(u) + C$
$\frac{d}{dx}\left(arctg(u)\right) = \frac{u'}{1+u^2}$	(6) $\int \frac{u'}{1+u^2} \, dx = arctg(u) + C$
$\frac{d}{dx}\left(arcsen(u)\right) = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$	(7) $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \, dx = arcsen(u) + C$

Exemplo:

a. $\int 2x.\left(x^2+1\right)^5 dx$

Resolução:

Fazendo $u(x) = x^2+1$, $u' = 2x$, logo $\int \overbrace{2x}^{u'} \overbrace{\left(x^2+1\right)^5}^{u^5} dx = \frac{\left(x^2+1\right)^6}{6} + C$

b. $\int \frac{3x^2+4}{x^3+4x} dx$

Resolução:

Fazendo $u(x)=x^3+4x$, $u'=3x^2+4$, logo

$$\int \frac{3x^2+4}{x^3+4x}dx=\int \overbrace{\left(3x^2+4\right)}^{u'}\overbrace{\frac{1}{x^3+4x}}^{1/u}dx \overset{(3)}{=} \ln\left|x^3+4x\right|+C$$

O que fizemos nos exercícios anteriores foi reconhecer que a função integrando, podia ser escrita como a derivada de uma função composta.

Esta técnica pode ser usada de uma forma mais sistemática pelo chamado **<u>Método de substituição de variável</u>** para o qual existe uma notação particularmente adequada e prática:

Suponhamos que queremos calcular $\int f\left(u(x)\right)\cdot u'(x)\ dx$.

Se $u(x)$ *for derivável temos* $\frac{du}{dx}=u'(x)$ *encarando* $\frac{du}{dx}$ *como um quociente, temos:*

$$du=u'(x)\ dx$$

Então, com esta notação

$$\int \underbrace{f\left(u(x)\right)}_{f(u)}\cdot \underbrace{u'(x)\ dx}_{du}=\underbrace{F\left(u(x)\right)}_{F(u)}+C\ , \qquad se \quad F'=f$$

Ou seja:

$$\int f(u)du=F(u)+C\ .$$

<u>Exemplo:</u>

$$\int x\sqrt{x^2+4}\,dx$$

<u>Resolução:</u>

O cálculo deste integral pode ser feito do seguinte modo:

Consideramos a substituição: $u=x^2+4$. Então $\frac{du}{dx}=2x$ e portanto $\frac{1}{2}du=x\ dx$

Logo $\int x\sqrt{x^2+4}\,dx=\int \underbrace{\sqrt{x^2+4}}_{\sqrt{u}}.\underbrace{x\ dx}_{\frac{1}{2}du}=\int \sqrt{u}\,\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}\int \sqrt{u}du$

Calculamos a primitiva expressa em função de u:

$$\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\ du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{3}u^{3/2} + C$$

Como o nosso objectivo é a determinação de uma primitiva de $x\sqrt{x^2+4}$ substituímos por fim u por x^2+4 obtendo:

$$\frac{1}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{3}\left(x^2+4\right)^{3/2} + C$$

Este é o **método de substituição** para o cálculo de primitivas ou integrais e deve ser empregue sempre que o cálculo do integral $\int f(u)\,du$ for mais simples.

Exemplos:

Calcule os seguintes integrais usando o método de substituição:

a. $\int xe^{x^2} dx$ fazendo $u = x^2$

b. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ fazendo $u = \sqrt{x}$;

c. $\int \frac{\ln(x)}{2x} dx$ fazendo $u = \ln(x)$

d. $\int \frac{1}{x\ln(x)} dx$

e. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

f. $\int \frac{x}{9-4x^2} dx$

g. $\int e^{\sqrt{x}} dx$ (faça apenas a substituição $u = \sqrt{x}$, a continuação da resolução implica a utilização da técnica de primitivação por partes, que será dada a seguir).

Resolução:

a. $\int xe^{x^2} dx$

Se $u = x^2$ então $\frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow \frac{du}{2} = xdx$.

Logo $\int xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} xdx = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C$.

b. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

Se $u=\sqrt{x}$ então $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad 2du=\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$

Logo $\int \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int 2(1+u)du=\int (2+2u)du=2u+u^2+C=2\sqrt{x}+x+C$.

c. $\int \dfrac{\ln(x)}{2x}dx$

Se $u=\ln(x)$ então $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad du=\dfrac{dx}{x} \Leftrightarrow \dfrac{du}{2}=\dfrac{dx}{2x}$

Logo $\int \dfrac{\ln(x)}{2x}dx=\int \ln(x)\cdot\dfrac{dx}{2x}=\int u\dfrac{du}{2}=\dfrac{1}{2}\int u\,du=\dfrac{1}{2}\dfrac{u^2}{2}+C=\dfrac{(\ln x)^2}{4}+C$

d. $\int \dfrac{1}{x\ln(x)}dx$

Se $u=\ln(x)$ então $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad du=\dfrac{dx}{x}$.

Logo $\int \dfrac{1}{x\ln(x)}dx=\int \dfrac{1}{\ln(x)}\cdot\dfrac{dx}{x}=\int \dfrac{1}{u}du=\ln|u|+C=\ln|\ln(x)|+C$

e. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

Se $u=\sqrt{x}$ então $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad 2du=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$

Logo $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=\int \dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=\int \dfrac{2}{1+u^2}du=2arctg(u)+C=2arctg\left(\sqrt{x}\right)+C$

f. $\int \dfrac{x}{9-4x^2}dx$

Se $u=9-4x^2$ então $\dfrac{du}{dx}=-8x \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{-8}du=x\,dx$

Logo $\int \dfrac{x}{9-4x^2}dx=\int \dfrac{1}{9-4x^2}xdx=\int \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{-8}=\dfrac{-1}{8}\int \dfrac{1}{u}du=\dfrac{-1}{8}\ln|u|+C=\dfrac{-1}{8}\ln\left|9-4x^2\right|+C$

g. $\int e^{\sqrt{x}}dx$

Se $u=\sqrt{x}$ então $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad 2\,du=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$.

Mas $\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$ não aparece na primitiva.

Então tendo em conta que $u=\sqrt{x}$ temos $2\,du=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx \Leftrightarrow 2u\,du=dx$.

Substituindo:

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=\int e^u\,2u\,du=\int 2ue^u\,du$$

(a continuação da resolução implica a utilização da técnica de primitivação por partes, que será dada a seguir).

Nota: *a partir do momento em que se substitui dx por du só pode aparecer u na primitiva.*

6.4 Primitivação por partes.

A regra para a derivação do produto de duas funções é:

$$\frac{d(fg)}{dx} = f'g + fg'$$

Então, em termos de primitivas temos:

$$\int \frac{d(fg)}{dx}dx = \int f'g\,dx + \int fg'dx \quad \Leftrightarrow \quad fg = \int f'g\,dx + \int fg'dx\,.$$

logo,

$$\int f'gdx = fg - \int fg'dx$$

esta é a fórmula para o método de primitivação por partes.

Nota:

1. *Aplicámos primitivação por partes quando temos as condições:*
   - *Queremos primitivar um produto de funções que não conseguimos primitivar directamente,* $\int f'(x)g(x)\,dx$*;*
   - *Conhecemos uma primitiva de* f' *,* $\int f'(x)\,dx = f(x)$*;*
   - *A primitiva* $\int f(x)g'(x)\,dx$ *é mais simples de calcular.*
2. *Quando queremos primitivar um produto de funções por este método, escolhemos uma função para primitivar,* f'*, e outra para derivar,* g*. Essa escolha deve ser feita tendo em conta os três pontos anteriores.*

Exemplos:

a. $\int x(x-1)^8\,dx$

- Escolhendo $f'(x) = (x-1)^8$ temos $f(x) = \frac{(x-1)^9}{9}$ pois $\int (x-1)^8\,dx = \frac{(x-1)^9}{9}$;

- Escolhendo $g(x)=x$ temos $g'(x)=1$

Aplicando a fórmula de primitivação por partes temos:

$$\int \underbrace{x}_{g}\underbrace{(x-1)^8}_{f'}\,dx = \overbrace{x}^{g}\overbrace{\frac{(x-1)^9}{9}}^{f} - \int \overbrace{1}^{g'}\overbrace{\frac{(x-1)^9}{9}}^{f}dx = x\frac{(x-1)^9}{9} - \frac{1}{9}\frac{(x-1)^{10}}{10} + C$$

Note que:

Se tivéssemos escolhido $f'(x)=x$ e $g(x)=(x-1)^8$ ao aplicar a fórmula de primitivação por partes ficaríamos com uma primitiva mais complicada para calcular.

b. $\int \underbrace{x}_{g}\underbrace{e^{-2x}}_{f'}dx$

Escolhendo $f'(x)=e^{-2x}$ e $g(x)=x$ temos $f(x)=\int e^{-2x}dx=\frac{e^{-2x}}{-2}$ e $g'(x)=1$.

Aplicando a fórmula de primitivação por partes temos:

$$\int \underbrace{x}_{g}\underbrace{e^{-2x}}_{f'}dx = x\frac{e^{-2x}}{-2} - \int \overbrace{1}^{g'}\overbrace{\frac{e^{-2x}}{-2}}^{f}dx = -x\frac{e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = -x\frac{e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\frac{e^{-2x}}{(-2)} + C$$

c. $\int x^2 e^x\,dx$

Escolhendo $f'(x)=e^x$ e $g(x)=x^2$ temos $f(x)=\int e^x dx = e^x$ e $g'(x)=2x$.

Aplicando o método de primitivação por partes temos

$$\int \underbrace{x^2}_{g}\underbrace{e^x}_{f'}\,dx = \underbrace{x^2}_{g}\underbrace{e^x}_{f} - \int \underbrace{2x}_{g'}\underbrace{e^x}_{f}\,dx$$

Ora a primitiva $\int 2xe^x\,dx$ também não é imediata, **aplicando novamente o método de primitivação por partes** **<u>da seguinte forma</u>**:

fazendo $f'(x)=e^x$ e $g(x)=2x$ temos $f(x)=\int e^x dx = e^x$ e $g'(x)=2$ e portanto

$$\int \underbrace{2x}_{g}\underbrace{e^x}_{f'}\,dx = 2xe^x - \int 2e^x dx = 2xe^x - 2e^x + C$$

Logo

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx = x^2e^x - \left(2xe^x - 2e^x\right) + C = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Nota:

Na segunda vez que se aplica a fórmula de primitivação por partes devemos continuar a considerar como $f'(x) = e^x$.

Em geral, sempre que é necessário aplicar repetidamente o método de primitivação por partes devemos manter a escolha de f'

d. $\int arctg(x)\, dx$

Nota:

Neste integral só temos uma função para integrar. Mas não sabemos primitivar o $arctg(x)$. *Então para podermos aplicar integração por partes olhamos para a função a integrar como* $1.arctg(x)$.

Então $\int arctg(x)\, dx = \int 1.arctg(x) dx$

Fazendo $f'(x) = 1$ e $g(x) = arctg(x)$ temos $f(x) = \int 1 dx = x$ e $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Aplicando a fórmula de primitivação por partes temos

$$\int arctg(x)\, dx = \int \underbrace{1}_{f'}.\underbrace{arctg(x)}_{g}\, dx = x.arctg(x) - \int x \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= x.arctg(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx$$

$$= x.arctg(x) - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$$

e. $\int \ln(x)\, dx$ (resolução análoga à anterior)

f. $\int e^{2x} \cos(x)\, dx$

Escolhendo $f'(x) = e^{2x}$ e $g(x) = \cos(x)$ temos $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{2}$ e $g'(x) = -sen(x)$.

Aplicando a fórmula de primitivação por partes temos

$$\int \underbrace{e^{2x}}_{f'}\underbrace{\cos(x)}_{g}\, dx = \underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{f}\underbrace{\cos(x)}_{g} - \int \underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{f}\underbrace{(-sen(x))}_{g'}dx$$

$$= \frac{e^{2x} sen(x)}{2} + \frac{1}{2}\int e^{2x} sen(x) dx$$

Aplicando novamente primitivação por partes (e tendo em conta o que foi dito numa nota anterior) temos que:

$$\int \underbrace{e^{2x}}_{f'} \underbrace{sen(x)}_{g}\, dx = \underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{f} \underbrace{sen(x)}_{g} - \int \underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{f} \underbrace{\cos(x)}_{g'}\, dx$$

$$= \frac{e^{2x} sen(x)}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x} \cos(x) dx$$

Assim

$$\int e^{2x} \cos(x)\, dx = \frac{e^{2x} sen(x)}{2} + \frac{1}{2}\int e^{2x} sen(x) dx$$

$$= \frac{e^{2x} sen(x)}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x} sen(x)}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x} \cos(x) dx\right)$$

$$= \frac{e^{2x} sen(x)}{2} + \frac{e^{2x} sen(x)}{4} - \frac{1}{4}\int e^{2x} \cos(x) dx$$

<u>Nota</u>:

O integral que aparece no 2º membro é igual ao inicial, então podemos passá-lo para o primeiro membro e resolver a equação em ordem a $\int e^{2x} \cos(x)\, dx$ *:*

$$\int e^{2x} \cos(x)\, dx = \frac{e^{2x} sen(x)}{2} + \frac{e^{2x} sen(x)}{4} - \frac{1}{4}\int e^{2x} \cos(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{5}{4}\int e^{2x} \cos(x)\, dx = \frac{e^{2x} sen(x)}{2} + \frac{e^{2x} sen(x)}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int e^{2x} \cos(x)\, dx = \frac{4}{5}\left(\frac{e^{2x} sen(x)}{2} + \frac{e^{2x} sen(x)}{4}\right) + C$$

Exercício:

Calcule as seguintes primitivas utilizando primitivação por partes:

1. $\int sen^2(x)\, dx$
2. $\int x\sqrt{x+5}dx$
3. $\int sen(\ln(x))dx$
4. $\int x\ln(x)\, dx$
5. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$
6. $\int sen(2x)e^{sen(x)}\, dx$

6.5 Primitivação de funções racionais

Vamos começar por ver três tipos especiais de funções racionais: as **fracções parciais**.

Tipo I	**Tipo II**	**Tipo III**
$\dfrac{c}{(mx+b)^n}$	$\dfrac{m}{(ax^2+bx+c)^n}$	$\dfrac{mx+e}{(ax^2+bx+c)^n}$
c,m,b,n constantes	m,a,b,c,n constantes	m,e,a,b,c,n constantes
$m,n\neq 0$	$a,n\neq 0$	$a,m,n\neq 0$
	$\Delta=b^2-4ac<0$	$\Delta=b^2-4ac<0$

Tipo I

Já sabemos integrar este tipo de funções.

Exemplo:

a. $\displaystyle\int\frac{2dx}{3x-4}=\frac{2}{3}\int\frac{3dx}{3x-4}=\frac{2}{3}ln|3x-4|+C$

b. $\displaystyle\int\frac{dx}{(2x-5)^2}=\frac{1}{2}\int 2(2x-5)^{-2}dx=-\frac{1}{2}(2x-5)^{-1}+C=\frac{1}{10-4x}+C$

Tipo II

Pode ser reduzido por substituição a um integral do tipo $\displaystyle\int\frac{dt}{(1+t^2)^n}$ que pode ser resolvido usando a fórmula de redução:

$$\boxed{\int\frac{dt}{(1+t^2)^n}=\frac{1}{(2n-2)}\frac{t}{(1+t^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}\qquad n\neq 1}\qquad (✞)$$

Nota: *no caso em que* $n=1$ *temos* $\displaystyle\int\frac{dt}{1+t^2}=arctg(t)+C$

Exemplo:

a. $\int \frac{dx}{26-4x+4x^2}$ (neste caso $n=1$)

Note-se que o denominador não tem zeros reais $(\Delta<0)$ mas podemos escrevê-lo na forma $C(1+t^2)$ onde C é constante, completando o quadrado.

Assim, no integral que estamos a resolver temos:

$$26-4x+4x^2 = \underbrace{4x^2-4x+1}-1+26 = (2x-1)^2+25$$
$$= 25\left(\frac{(2x-1)^2}{25}+1\right)$$
$$= 25\left(\left(\frac{2x-1}{5}\right)^2+1\right)$$

Fazendo $t=\frac{2x-1}{5}$, $dt=\frac{2dx}{5} \quad \Leftrightarrow \quad dx=\frac{5dt}{2}$.

Logo

$$\int \frac{dx}{26-4x+4x^2} = \int \frac{\frac{5}{2}dt}{25(t^2+1)} = \frac{1}{10}\int \frac{dt}{1+t^2}$$
$$= \frac{arctg(t)}{10}+C$$
$$= \frac{1}{10}arctg\left(\frac{2x-1}{5}\right)+C$$

b. $\int \frac{dx}{(9x^2+12x+13)^2}$

O denominador não tem zeros reais.

$$9x^2+12x+13 = \underbrace{9x^2+12x+4}-4+13 = (3x+2)^2+9 = 9\left(\left(\frac{3x+2}{3}\right)^2+1\right)$$

Fazendo $t=\frac{3x+2}{3}=x+\frac{2}{3}$, $dt=dx$ e temos

$$\int \frac{dx}{(9x^2+12x+13)^2} = \int \frac{dt}{(9(t^2+1))^2}$$
$$= \frac{1}{81}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2},$$

usando a fórmula (✞) temos que

$$\int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2} = \frac{t}{2+2t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{t}{2+2t^2} + \frac{1}{2}arctg(t),$$

pelo que

$$\int \frac{dx}{\left(9x^2+12x+13\right)^2} = \int \frac{dt}{\left(9\left(t^2+1\right)\right)^2}$$

$$= \frac{1}{81}\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2} = \frac{1}{81}\times\frac{1}{2}\left(\frac{t}{1+t^2} + arctg(t)\right) + C$$

$$= \frac{1}{162}\left(\frac{x+\frac{2}{3}}{1+\left(x+\frac{2}{3}\right)^2} + arctg\left(x+\frac{2}{3}\right)\right) + C$$

$$= \frac{1}{162}\left(\frac{9x+6}{9x^2+12x+13} + arctg\left(x+\frac{2}{3}\right)\right) + C$$

Tipo III

Pode ser reduzido à soma de dois integrais, um do tipo II e outro quase imediato.

Exemplo:

a. $\displaystyle\int \frac{x+1}{1+x^2}dx = \underbrace{\int \frac{x}{1+x^2}dx}_{quase\ imediato} + \underbrace{\int \frac{1}{1+x^2}dx}_{tipo II} = \frac{ln\left|1+x^2\right|}{2} + arctg(x) + C$

b. $\displaystyle\int \frac{3+16x}{26-4x+4x^2}dx$

O denominador não tem raízes.

Note-se que

- $\left(26-4x+4x^2\right)' = -4+8x$
- $3+16x = 2(-4+8x)+11$

Pelo que se pode escrever:

$$\int \frac{3+16x}{26-4x+4x^2}dx = \int \frac{2(-4+8x)+11}{26-4x+4x^2}dx$$

$$= 2\int \frac{-4+8x}{26-4x+4x^2}dx + 11\underbrace{\int \frac{dx}{26-4x+4x^2}}_{exemplo\ 2a)}$$

$$= 2\,ln\left|26-4x+4x^2\right| + \frac{11}{10}arctg\left(\frac{2x-1}{5}\right) + C$$

c. $\int \frac{xdx}{\left(9x^2+12x+13\right)^2}$

O denominador não tem raízes.

Note-se que

- $\left(9x^2+12x+13\right)' = 18x+12$
- $x = \frac{1}{18}(18x+12) - \frac{2}{3}$

Pelo que se pode escrever:

$$\int \frac{xdx}{\left(9x^2+12x+13\right)^2} = \frac{1}{18}\underbrace{\int \frac{18x+12}{\left(9x^2+12x+13\right)^2}dx}_{imediato} - \frac{2}{3}\underbrace{\int \frac{dx}{\left(9x^2+12x+13\right)^2}}_{exemplo\ 2b)}$$

$$= -\frac{1}{18\left(9x^2+12x+13\right)} - \frac{2}{3}\times\frac{1}{162}\left(\frac{9x+6}{9x^2+12x+13} + arctg\left(x+\frac{2}{3}\right)\right) + C$$

Decomposição em fracções parciais

Vamos tentar exprimir uma dada função racional, $\frac{p(x)}{q(x)}$, como soma de funções racionais.

No caso em que o grau de $p(x)$ é superior ao de $q(x)$ começa-se por efectuar o algoritmo da divisão de polinómios obtendo-se

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \underbrace{d(x)}_{polinômio} + \underbrace{\frac{r(x)}{q(x)}}_{grau\ r(x) < grau\ q(x)}$$

onde $d(x)$ é o quociente e $r(x)$e o resto da divisão. Para integrar $\frac{p(x)}{q(x)}$ basta escrever $\frac{r(x)}{q(x)}$ como soma de fracções racionais e integrar cada uma das parcelas (como veremos mais à frente).

Observação:

Todo o polinómio $q(x)$, não constante com coeficientes reais pode ser escrito de modo <u>único</u> (a menos da ordem dos factores) como produto de <u>polinómios lineares,</u> $ax+b$, e <u>polinómios quadráticos sem raízes reais,</u> ax^2+bx+c com $\Delta=b^2-4ac<0$.

Assim podemos factorizar $q(x)$ do seguinte modo:

$$q(x)=A\underbrace{(x-a_1)}^{n_1}\underbrace{(x-a_2)}^{n_2}\ldots\underbrace{(x-a_l)}^{n_l}\underbrace{(x^2+b_1x+c_1)}^{m_1}\underbrace{(x^2+b_2x+c_2)}^{m_2}\ldots\underbrace{(x^2+b_kx+c_k)}^{m_k}$$

Polinómios <u>lineares</u> distintos

Polinómios <u>quadráticos</u> distintos
(sem raízes reais)

Notar que a constante A que aparece na decomposição de $q(x)$ é igual ao coeficiente do termo de maior grau de $q(x)$.

Como decompor $\frac{p(x)}{q(x)}$ em fracções parciais?

1. Começar por factorizar $q(x)$ de modo que a sua decomposição envolva somente polinómios lineares e quadráticos sem raízes reais.
2. Aplique as seguintes regras:

   a. Para cada factor $(x-\alpha)^n$ com $n\geq 1$, a decomposição em fracções parciais envolve uma soma de n fracções parciais da forma

   $$\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(x-\alpha)^n}$$

   onde os $A_i's$ representam constantes.

   b. Para cada factor $(ax^2+bx+c)^m$ com $m\geq 1$ e ax^2+bx+c sem raízes reais, a decomposição em fracções parciais envolve uma soma de m fracções parciais da forma

   $$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

onde os $A_i's$ e $B_i's$ representam constantes.

3. Os coeficientes do ponto anterior determinam-se pelo método dos coeficientes indeterminados.

Vamos agora ver alguns exemplos que ilustram a decomposição em fracções parciais.

<u>*Exemplo:*</u>

a. $\int \frac{x^2-2x+4}{x(x-1)^2}dx$

Trata-se de um integral de uma função racional cujo denominador já está factorizado:

- expoente do factor x é 1
- expoente do factor $x-1$ é 2

Na decomposição em fracções parciais poderemos encontrar os denominadores:

$$x, \qquad x-1 \qquad e \qquad (x-1)^2$$

$$\begin{aligned}\frac{x^2-2x+4}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2} &= \frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}\\ &= \frac{A(x^2-2x+1)+B(x^2-x)+Cx}{x(x-1)^2}\\ &= \frac{(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A}{x(x-1)^2}\end{aligned}$$

Como temos uma igualdade e os denominadores são iguais então temos que ter forçosamente os numeradores iguais, isto é:

$$x^2-2x+4=(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A$$

Note que dois polinómios são iguais se os coeficientes de cada potência de x são iguais. Assim teremos que ter

$$\begin{cases}A+B=1\\ -2A-B+C=-2\\ A=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4+B=1\\ -8-B+C=-2\\ A=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}B=-3\\ C=6+B\\ A=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}B=-3\\ C=3\\ A=4\end{cases}$$

Pelo que

$$\frac{x^2-2x+4}{x(x-1)^2}=\frac{4}{x}+\frac{-3}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}$$

e portanto

$$\int \frac{x^2-2x+4}{x(x-1)^2}dx = 4\int \frac{dx}{x} - 3\int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{(x-1)^2}$$
$$= 4\,ln|x| - 3\,ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C$$

b. $\displaystyle\int \frac{2x^3}{x^4-1}dx$

Factorização do denominador:

$$x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)\underbrace{(x^2+1)}_{\text{não tem raízes reais}}$$

Na decomposição em fracções parciais poderemos encontrar os denominadores:

$$x-1 \qquad x+1 \qquad x^2+1$$

(note que cada factor da decomposição do denominador tem expoente 1).

Atenção! Como existe um polinómio de 2ª grau sem raízes reais na factorização do denominador, o numerador da fracção parcial correspondente será da forma $Cx+D$.

$$\frac{2x^3}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$
$$= \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$
$$= \frac{A(x^3+x^2+x+1) + B(x^3-x^2+x-1) + (Cx+D)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$
$$= \frac{A(x^3+x^2+x+1) + B(x^3-x^2+x-1) + Cx^3+Dx^2-Cx-D}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$
$$= \frac{(A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

Como temos uma igualdade e os denominadores são iguais então temos que ter forçosamente os numeradores iguais, isto é:

$$2x^3 = (A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D)$$

Igualando as potências de x, temos

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ A-B+D=0 \\ A-B-D=0 \\ A+B-C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} A=B=\dfrac{1}{2} \\ C=1 \\ D=0 \end{cases}$$

Pelo que

$$\int \frac{2x^3}{x^4-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{xdx}{x^2+1}$$
$$= \frac{ln|x-1|}{2} + \frac{ln|x+1|}{2} + \frac{ln|x^2+1|}{2} + C$$

c. $\displaystyle\int \frac{x^5}{\left(1+x^2\right)^3}dx$

O denominador da fracção $\dfrac{x^5}{\left(1+x^2\right)^3}$ já está factorizado.

Na decomposição em fracções parciais poderemos encontrar os denominadores:

$$1+x^2 \qquad \left(1+x^2\right)^2 \qquad \left(1+x^2\right)^3$$

(note que o expoente do denominador é maior que 1).

Atenção! Como existe um polinómio de 2ª grau sem raízes reais na factorização do denominador, o numerador da fracção parcial correspondente será da forma $Ax+B$.

$$\frac{x^5}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{\left(1+x^2\right)^2} + \frac{Ex+F}{\left(1+x^2\right)^3}$$
$$= \frac{(Ax+B)\left(1+x^2\right)^2 + (Cx+D)\left(1+x^2\right) + Ex+F}{\left(1+x^2\right)^3}$$
$$= \frac{Ax+2Ax^3+Ax^5+B+2Bx^2+Bx^4+Cx+Cx^3+D+Dx^2+Ex+F}{\left(1+x^2\right)^3}$$
$$= \frac{Ax^5+Bx^4+(2A+C)x^3+(2B+D)x^2+(A+C+E)x+(B+D+F)}{\left(1+x^2\right)^3}$$

Como temos uma igualdade e os denominadores são iguais então temos que ter forçosamente os numeradores iguais, isto é:

$$x^5 = Ax^5+Bx^4+(2A+C)x^3+(2B+D)x^2+(A+C+E)x+(B+D+F)$$

Igualando as potências de x, temos

$$\begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ 2A+C=0 \\ 2B+D=0 \\ A+C+E=0 \\ B+D+F=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C=-2 \\ D=0 \\ E=1 \\ F=0 \end{cases}$$

Pelo que

$$\int \frac{x^5}{\left(1+x^2\right)^3}dx = \int \frac{x}{1+x^2}dx - \int \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx + \int \frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}dx$$
$$= \frac{ln\left|1+x^2\right|}{2} + \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4\left(1+x^2\right)^2} + C$$

d. $\int \frac{x^3}{x^2+x-12}dx$

Note que o grau do numerador é superior ao grau do denominador, pelo que é necessário recorrer ao algoritmo da divisão de polinómios:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & & & & x^2 \quad +x \quad -12 \\ \cline{5-5} -x^3 & -x^2 & +12x & & x \quad -1 \\ \cline{1-3} & -x^2 & +12x & & \\ & x^2 & +x & -12 & \\ \cline{2-4} & & +13x & -12 & \end{array}$$

Assim temos que

$$x^3 = (x-1)\left(x^2+x-12\right)+(13x-12)$$

ou seja,

$$\frac{x^3}{x^2+x-12} = \frac{(x-1)\left(x^2+x-12\right)+(13x-12)}{x^2+x-12}$$
$$= (x-1)+\frac{13x-12}{x^2+x-12}$$

Portanto

$$\int \frac{x^3}{x^2+x-12}dx = \int (x-1)dx + \int \frac{13x-12}{x^2+x-12}dx$$

Um dos integrais resultantes é imediato e o outro tem grau do numerador menor que o grau do denominador.

Vamos começar por calcular $\int \frac{13x-12}{x^2+x-12}dx$.

Factorização do denominador: $x^2+x-12=(x-3)(x+4)$

Na decomposição em fracções parciais poderemos encontrar os denominadores:

$$x-3 \quad e \quad x+4$$

Vamos decompor a função integrando em fracções parciais:

$$\begin{aligned}\frac{13x-12}{x^2+x-12} &= \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+4}\\ &= \frac{(A+B)x+(4A-3B)}{(x-3)(x+4)}\end{aligned}$$

Como temos uma igualdade e os denominadores são iguais então temos que ter forçosamente os numeradores iguais, isto é:

$$13x-12=(A+B)x+(4A-3B)$$

Igualando as potências de x, temos

$$\begin{cases}A+B=13\\4A-3B=-12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=13-B\\52-7B=-12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=\dfrac{27}{7}\\B=\dfrac{64}{7}\end{cases}$$

Pelo que

$$\begin{aligned}\int \frac{13x-12}{x^2+x-12}dx &= \frac{27}{7}\int\frac{dx}{x-3}+\frac{64}{7}\int\frac{dx}{x+4}\\ &= \frac{27}{7}ln|x-3|+\frac{64}{7}ln|x+4|+C\end{aligned}$$

Conclusão:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x^2+x-12}dx &= \int (x-1)dx+\int\frac{13x-12}{x^2+x-12}dx\\ &= \frac{x^2}{2}-x+\frac{27}{7}ln|x-3|+\frac{64}{7}ln|x+4|+C\end{aligned}$$

6.6 Outras técnicas de primitivação:

Primitivas de funções trigonométricas,

Substituições trigonométricas,

Racionalização de algumas de algumas funções.

6.6.1. Integração de funções trigonométricas:

Vamos agora ocuparmo-nos dos integrais do tipo

$$\boxed{\int sen^m(x)cos^n(x)dx}$$

onde n, m são números inteiros positivos.

Já sabemos que:

- $\int sen(x)dx = -cos(x) + C$ $\qquad (m = 1, \quad n = 0)$
- $\int cos(x)dx = sen(x) + C$ $\qquad (m = 0, \quad n = 1)$

É fácil ver que:

- $$\boxed{\int sen(x)cos^n(x)dx = -\int \underbrace{-sen(x)}_{u'}\underbrace{cos^n(x)}_{u^n}dx = -\frac{cos^{n+1}(x)}{n+1} + C, \qquad n \neq -1}$$

  Note que se $n = -1$ temos

  $$\int sen(x)cos^{-1}(x)dx = \int \frac{sen(x)}{cos(x)}dx = -\int \frac{\overbrace{-sen(x)}^{u'}}{\underbrace{cos(x)}_{u}}dx = -ln|cos(x)| + C$$

  ou seja, $\int tg(x)dx = -ln|cos(x)| + C$

- $$\boxed{\int sen^m(x)cos(x)dx = \int \underbrace{cos(x)}_{u'}\underbrace{sen^m(x)}_{u^n}dx = \frac{sen^{m+1}(x)}{m+1} + C, \qquad m \neq -1}$$

  Note que se $m = -1$ temos

$$\int sen^{-1}(x)cos(x)dx = \int \frac{\overbrace{cos(x)}^{u'}}{\underbrace{sen(x)}_{u}}dx = ln|sen(x)| + C$$

ou seja, $\int cot\,g(x)dx = ln|sen(x)| + C$

Exemplos:

a. $\int sen(x)cos(x)dx = -\frac{cos^2(x)}{2} + C = \frac{sen^2(x)}{2} + C$

b. $\int sen(x)cos^2(x)dx = -\frac{cos^3(x)}{3} + C$

c. $\int cos(x)sen^2(x)dx = \frac{sen^3(x)}{3} + C$

Algum dos expoentes ímpar:

Procedimento: Destaca-se uma unidade à potência impar e o factor resultante passa-se à co-função através da fórmula fundamental da trigonometria:

Exemplos:

a. $\int sen^2(x)cos^3(x)dx$

$$\int sen^2(x)cos^3(x)dx = \int sen^2(x)cos(x)cos^2(x)dx = \int sen^2(x)cos(x)\left[1 - sen^2(x)\right]dx$$

C

$$= \int sen^2(x)cos(x)dx - \int sen^4(x)cos(x)dx$$

ada um dos integrais resultantes é imediato, logo

$$\int sen^2(x)cos^3(x)dx = \frac{sen^3(x)}{3} - \frac{sen^5(x)}{5} + C$$

b. $\int sen^6(x)cos^5(x)dx$

Comecemos por escrever $cos^5(x) = cos(x)\underbrace{cos^4(x)}_{exp.par} = cos(x)\left(cos^2 x\right)^2$.

Pela fórmula fundamental da trigonometria tem-se que $cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$,

donde $cos^5(x) = cos(x)\underbrace{cos^4(x)}_{exp.\,par} = cos(x)\left(cos^2 x\right)^2 = cos(x)\underbrace{\left[1 - sen^2 x\right]^2}_{\text{qaundo se desenvolve o quadrado fica tudo em função de seno}}$.

Assim,

$$\int sen^6(x)cos^5(x)dx = \int sen^6(x)cos(x)cos^4(x)dx = \int sen^6(x)cos(x)\left[cos^2 x\right]^2 dx$$

$$= \int sen^6(x)cos(x)\left[1 - sen^2 x\right]^2 dx$$

$$= \int sen^6(x)cos(x)\left[1 - 2sen^2(x) + sen^4(x)\right]dx$$

$$= \int sen^6(x)cos(x)dx - 2\int sen^8(x)cos(x)dx + \int sen^{10}(x)cos(x)dx$$

Cada um dos integrais resultantes é imediato, logo

$$\int sen^6(x)cos^5(x)dx = \frac{sen^7(x)}{7} - 2\frac{sen^9(x)}{9} + \frac{sen^{11}(x)}{11} + C$$

c. $\int sen^3(x)cos^3(x)dx$

$$\int sen^3(x)cos^3(x)dx = \int sen^3(x)cos(x)cos^2(x)dx = \int sen^3(x)cos(x)\left[1 - sen^2(x)\right]dx$$

C

$$= \int sen^3(x)cos(x)dx - \int sen^5(x)cos(x)dx$$

ada um dos integrais resultantes é imediato, logo

$$\int sen^3(x)cos^3(x)dx = \frac{sen^4(x)}{4} - \frac{sen^6(x)}{6} + C$$

d. $\int sen^7(x)cos^5(x)dx$

Comecemos por escrever $cos^5(x) = cos(x)\underbrace{cos^4(x)}_{exp.\,par} = cos(x)\left(cos^2 x\right)^2$.

Pela fórmula fundamental da trigonometria tem-se que $cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$,

donde

$$cos^5(x) = cos(x)\underbrace{cos^4(x)}_{exp.\,par} = cos(x)\left(cos^2 x\right)^2 = cos(x)\underbrace{\left[1 - sen^2 x\right]^2}_{\text{qaundo se desenvolve o quadrado fica tudo em função de seno}}$$

Assim,

$$\int sen^7(x)cos^5(x)dx = \int sen^7(x)cos(x)cos^4(x)dx = \int sen^7(x)cos(x)\left[cos^2 x\right]^2 dx$$
$$= \int sen^7(x)cos(x)\left[1 - sen^2 x\right]^2 dx$$
$$= \int sen^7(x)cos(x)\left[1 - 2sen^2(x) + sen^4(x)\right]dx$$
$$= \int sen^7(x)cos(x)dx - 2\int sen^9(x)cos(x)dx + \int sen^{11}(x)cos(x)dx$$

Cada um dos integrais resultantes é imediato, logo

$$\int sen^7(x)cos^5(x)dx = \frac{sen^8(x)}{8} - \frac{sen^{10}(x)}{5} + \frac{sen^{12}(x)}{12} + C$$

e. $\int sen^5(x)cos^2(x)dx$

$$\int sen^5(x)cos^2(x)dx = \int \underbrace{sen^4(x)}_{passar\ a\ cos} sen(x)cos^2(x)dx = \int \left(sen^2 x\right)^2 sen(x)cos^2(x)dx$$
$$= \int \left(1 - cos^2 x\right)^2 sen(x)cos^2(x)dx$$
$$= \int \left(1 - 2cos^2 x + cos^4 x\right)sen(x)cos^2(x)dx$$
$$= \int sen(x)cos^2(x)dx - 2\int sen(x)cos^4(x)dx + \int sen(x)cos^6(x)dx$$

Cada um dos integrais resultantes é imediato, logo

$$\int sen^5(x)cos^2(x)dx = -\frac{cos^3(x)}{3} + 2\frac{cos^5(x)}{5} - \frac{cos^7(x)}{7} + C$$

f. $\int sen^3(x)cos^4(x)dx$

$$\int sen^3(x)cos^4(x)dx = \int sen(x)sen^2(x)cos^4(x)dx = \int sen(x)\left(1 - cos^2(x)\right)cos^4(x)dx$$

C

$$= \int sen(x)cos^4(x)dx - \int sen(x)cos^6(x)dx$$

ada um dos integrais resultantes é imediato e fica como exercício…

<u>Ambas as potências pares:</u>

Recordar:

- $sen(a+b)=sen(a)cos(b)+sen(b)cos(a)$

  No caso particular em que $a=b$ tem-se $\boxed{sen(2a)=2sen(a)cos(a)}$

- $cos(a+b)=cos(a)cos(b)-sen(a)sen(b)$

  No caso particular em que $a=b$ tem-se $\boxed{cos(2a)=cos^2(a)-sen^2(a)}$

  Como $cos^2(a)=1-sen^2(a)$ tem-se que $\boxed{sen^2(a)=\frac{1-cos(2a)}{2}}$ (*)

  Como $sen^2(a)=1-cos^2(a)$ tem-se que $\boxed{cos^2(a)=\frac{1+cos(2a)}{2}}$ (**)

<u>Exemplos:</u>

a. $\int sen^2(x)cos^2(x)dx$

$$\int sen^2(x)cos^2(x)dx=\int [sen(x)cos(x)]^2 dx=\int\left[\frac{2sen(x)cos(x)}{2}\right]^2 dx$$
$$=\frac{1}{4}\int sen^2(2x)dx \qquad por\ (*)$$
$$=\frac{1}{4}\int\frac{1-cos(4x)}{2}dx$$

O integral resultante é imediato e fica como exercício...

b. $\int sen^4(x)cos^2(x)dx$

Note que agora não pode usar a mesma técnica da alínea anterior porque o expoente não é o mesmo.

Neste caso como estamos a trabalhar com potências pares é necessário para o arco-duplo através das fórmulas (*) e/ou (**).

$$\begin{aligned}\int sen^4(x)cos^2(x)dx &= \int sen^2(x)sen^2(x)cos^2(x)dx\\ &= \int \frac{1-cos(2x)}{2}\cdot\frac{1-cos(2x)}{2}\cdot\frac{1+cos(2x)}{2}dx\\ &= \frac{1}{8}\int(1-cos(2x))\underbrace{((1-cos(2x))(1+cos(2x)))}\\ &= \frac{1}{8}\int(1-cos(2x))(1-cos^2(2x))dx\\ &= \frac{1}{8}\int(1-cos(2x))sen^2(2x)dx\\ &= \frac{1}{8}\int sen^2(2x)dx-\frac{1}{8}\int cos(2x)sen^2(2x)dx\\ &= \frac{1}{8}\int\frac{1-cos(4x)}{2}dx-\frac{1}{8}\int cos(2x)sen^2(2x)dx \qquad por\ (**)\end{aligned}$$

Os integrais resultantes são imediatos e ficam como exercício...

<u>Consideremos integrais do tipo</u>

$$\boxed{\int\frac{sen^m(x)}{cos^n(x)}dx}, \boxed{\int\frac{cos^n(x)}{sen^m(x)}dx}$$

onde n, m são números inteiros positivos.

Já sabemos que:

- $\int tg(x)dx = \int\frac{sen(x)}{cos(x)}dx = -ln|cos(x)|+C$
- $\int cot\,g(x)dx = \int\frac{cos(x)}{sen(x)}dx = ln|sen(x)|+C$

É fácil ver que:

- $\boxed{\int\frac{sen(x)}{cos^n(x)}dx = -\int\underbrace{-sen(x)}_{u'}\underbrace{cos^{-n}(x)}_{u^{-n}}dx = \frac{1}{(n-1)cos^{n-1}(x)}+C, \qquad n\neq 1}$
- $\boxed{\int\frac{cos(x)}{sen^m(x)}dx = \int\underbrace{cos(x)}_{u'}\underbrace{sen^{-m}(x)}_{u^{-m}}dx = -\frac{1}{(m-1)sen^{m-1}(x)}+C, \qquad m\neq 1}$

<u>Exemplos:</u>

a. $\int \frac{sen(x)}{cos^2(x)}dx = \frac{1}{cos(x)} + C$

b. $\int \frac{sen(x)}{cos^3(x)}dx = \frac{1}{2cos^2(x)} + C$

c. $\int \frac{cos(x)}{sen^2(x)}dx = -\frac{1}{sen(x)} + C$

<u>Para outros expoentes:</u>

Procedimento: Usar integração por partes e aplicar fórmulas trigonométricas.

<u>Exemplos:</u>

a. $\int \frac{sen^2(x)}{cos^3(x)}(x)dx$

$$\int \frac{sen^2(x)}{cos^3(x)}dx = \int \underbrace{sen(x)}_{g}\underbrace{\frac{sen(x)}{cos^3(x)}}_{f'}dx = \frac{senx}{2cos^2 x} - \int \frac{1}{2cos\, x}dx$$

$$= \frac{sec(x)tg(x)}{2} - \frac{1}{2}\int sec(x)dx$$

$$= \frac{sec(x)tg(x)}{2} - \frac{ln|sec(x)+tg(x)|}{2} + C$$

b. $\int \frac{sen^4(x)}{cos^3(x)}dx$

$$\int \frac{sen^4(x)}{cos^3(x)}dx = \int \frac{sen^2(x)sen^2(x)}{cos^3(x)}dx = \int \frac{[1-cos^2(x)]sen^2(x)}{cos^3(x)}dx$$

$$= \int \frac{sen^2(x)}{cos^3(x)}dx - \int \frac{sen^2(x)}{cos(x)}dx$$

$$= \int \frac{sen^2(x)}{cos^3(x)}dx - \int sec(x)dx + \int cos(x)dx$$

Usando a alínea anterior e a tabela de primitivas facilmente se conclui que

$$\int \frac{sen^4(x)}{cos^3(x)}dx = \frac{sec(x)tg(x)}{2} - \frac{3\,ln|sec(x)+tg(x)|}{2} + sen(x) + C$$

c. $\int \frac{sen^3(x)}{cos^5(x)}dx$

$$\int \frac{sen^3(x)}{cos^5(x)}dx = \int \frac{sen^2(x)sen(x)}{cos^5(x)}dx = \int \frac{[1-cos^2(x)]sen(x)}{cos^5(x)}dx$$
$$= \int \frac{sen(x)}{cos^5(x)}dx - \int \frac{sen(x)}{cos^3(x)}dx$$

Cada um dos integrais resultantes é imediato e fica como exercício…

d. $\int \frac{sen^5(x)}{cos^3(x)}dx$

$$\int \frac{sen^5(x)}{cos^3(x)}dx = \int \frac{sen^2(x)sen^3(x)}{cos^3(x)}dx = \int \frac{(1-cos^2(x))sen^3(x)}{cos^3(x)}dx$$
$$= \int \frac{sen^3(x)}{cos^3(x)}dx - \int \frac{sen^3(x)}{cos(x)}dx$$
$$= \int \frac{(1-cos^2(x))sen(x)}{cos^3(x)}dx - \int \frac{(1-cos^2(x))sen(x)}{cos(x)}dx$$
$$= \int \frac{sen(x)}{cos^3(x)}dx - 2\int \frac{sen(x)}{cos(x)}dx + \int cos(x)sen(x)dx$$

Cada um dos integrais resultantes é fácil de calcular e fica como exercício…

e. $\int \frac{sen^5(x)}{cos^2(x)}dx$

$$\int \frac{sen^5(x)}{cos^2(x)}dx = \int \frac{sen^2(x)sen^3(x)}{cos^2(x)}dx = \int \frac{(1-cos^2(x))sen^3(x)}{cos^2(x)}dx = \int \frac{sen^3(x)}{cos^2(x)}dx - \int sen^3(x)dx$$
$$= \int \frac{(1-cos^2(x))sen(x)}{cos^2(x)}dx - \int (1-cos^2(x))sen(x)dx$$
$$= \int \frac{sen(x)}{cos^2(x)}dx - 2\int sen(x)dx + \int sen(x)cos^2(x)dx$$

Cada um dos integrais resultantes é imediato e fica como exercício…

f. $\int \frac{sen^3(x)}{cos^4(x)}dx$

$$\int \frac{sen^3(x)}{cos^4(x)}dx = \int \frac{sen^2(x)sen(x)}{cos^4(x)}dx = \int \frac{(1-cos^2(x))sen(x)}{cos^4(x)}dx$$
$$= \int \frac{sen(x)}{cos^4(x)}dx - \int \frac{sen(x)}{cos^2(x)}dx$$

Cada um dos integrais resultantes é imediato e fica como exercício…

g. $\int \frac{sen^2(x)}{cos^2(x)}dx$

$$\int \frac{sen^2(x)}{cos^2(x)}dx = \int \frac{1-cos^2(x)}{cos^2(x)}dx = \int sec^2(x)dx - \int dx = tg(x) - x + C$$

h. $\int \frac{sen^4(x)}{cos^2(x)}dx$

$$\int \frac{sen^4(x)}{cos^2(x)}dx = \int \frac{sen^2(x)sen^2(x)}{cos^2(x)}dx = \int \frac{\left(1-cos^2(x)\right)sen^2(x)}{cos^2(x)}dx$$

$$= \int \frac{sen^2(x)}{cos^2(x)}dx - \int sen^2(x)dx$$

$$= \int \frac{sen^2(x)}{cos^2(x)}dx - \int \frac{1-cos(2x)}{2}dx$$

Os integrais resultantes são fáceis de calcular e ficam como exercício...

i. $\int \frac{sen^2(x)}{cos^4(x)}dx$

$$\int \frac{sen^2(x)}{cos^4(x)}dx = \int \underbrace{\frac{sen(x)}{cos^4(x)}}_{f'}\underbrace{sen(x)}_{g}dx = \frac{sen(x)}{3cos^3(x)} - \int \frac{1}{3cos^2(x)}dx = \frac{sen(x)}{3cos^3(x)} - \frac{1}{3}tg(x) + C$$

<u>**Consideremos integrais do tipo**</u>:

$$\boxed{\int \frac{1}{sen^m(x)cos^n(x)}dx},$$

onde n, m são números inteiros positivos.

Para este tipo de integrais não faremos um estudo exaustivo ficam apenas quatro exemplos:

a.

$$\int \frac{1}{sen(x)cos(x)}dx = \int \frac{2}{2sen(x)cos(x)}dx = \int 2\,cos\,ec(2x)dx$$

$$= ln\left|cos\,ec(2x) + cot\,g(2x)\right| + C$$

b. $\int \frac{1}{sen^2(x)cos(x)}dx = \int \frac{1+cot\,g^2(x)}{cos(x)}dx = \int sec(x)dx - \int \frac{cos(x)}{sen^2(x)}dx$

Os integrais que resultam são fáceis de calcular e ficam como exercício…

c. $$\int \frac{1}{\cos^3(x)}dx = \int \frac{sen^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^3(x)}dx = \int \underbrace{\frac{sen(x)}{\cos^3(x)}}_{f'}\underbrace{sen(x)}_{g}dx + \int \sec(x)dx$$

O primeiro integral calcula-se usando primitivação por partes, o segundo é imediato pelo que o resto da resolução do exercício fica como exercício.

d.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{sen^4(x)\cos^3(x)}dx &= \int \frac{tg^2(x)+1}{sen^4(x)\cos(x)}dx \\ &= \int \frac{1}{sen^2(x)\cos^3(x)}dx - \int \frac{1}{sen^4(x)\cos(x)}dx \\ &= \int \frac{tg^2(x)+1}{sen^2(x)\cos(x)}dx - \int \frac{\overbrace{sen^2(x)+\cos^2(x)}^{=1}}{sen^4(x)\cos(x)}dx \\ &= \int \frac{1}{\cos^3(x)}dx - 2\int \frac{1}{sen^2(x)\cos(x)}dx - \int \frac{\cos(x)}{sen^4(x)}dx\end{aligned}$$

(exercício...)

<u>Estudemos por último os integrais do tipo</u>

$$\boxed{\int sen(ax)cos(bx)dx},\ \boxed{\int sen(ax)sen(bx)dx},\ \boxed{\int cos(ax)cos(bx)dx}$$

onde a,b são reais não nulos.

Recordar

- $sen(a+b) = sen(a)cos(b) + sen(b)cos(a)$

  $sen(a-b) = sen(a)cos(b) - sen(b)cos(a)$

  de onde de deduz que: $\boxed{sen(a)cos(b) = \frac{sen(a+b)+sen(a-b)}{2}}$ (1)

- $cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)$

  $cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sen(a)sen(b)$

  de onde se deduz que: $\boxed{sen(a)sen(b) = \frac{cos(a-b)-cos(a+b)}{2}}$ (2)

$$\boxed{cos(a)cos(b) = \frac{cos(a+b) + cos(a-b)}{2}} \qquad (3)$$

<u>*Exemplos:*</u>

a. $\int sen(3x)cos(5x)dx$

Comparando com a fórmula (1) temos $a = 3x$ *e* $b = 5x$ *pelo que*

$$\int sen(3x)cos(5x)dx = \int \frac{sen(8x) + sen(-2x)}{2} dx = \int \frac{sen(8x) - sen(2x)}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int sen(8x)dx - \frac{1}{2}\int cos(2x)dx$$

Os integrais que resultam são imediatos e ficam como exercício...

b. $\int sen(3x)sen(2x)dx$

Comparando com a fórmula (2) temos $a = 3x$ *e* $b = 2x$ *pelo que*

$$\int sen(3x)sen(2x)dx = \int \frac{cos(x) - cos(5x)}{2} dx = \frac{1}{2}\int cos(x)dx - \frac{1}{2}\int cos(5x)dx$$

Os integrais que resultam são imediatos e ficam como exercício...

c. $\int cos(4x)cos(2x)dx$

6.6.2. Substituições Trigonométricas

No cálculo de primitivas quando aparecem alguns tipos de radicais fazem-se as substituições a seguir indicadas:

I. Primitivas do tipo:

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{a^2 - u^2}\right) dx}$$

onde $R\left(x, \sqrt{a^2 - u^2}\right)$ é uma função racional $a > 0$ e u é função de x:

<u>Substituição:</u> $u = a\,sen(t)$

Logo,

$$\sqrt{a^2 - u^2} = a\,cos(t) \qquad du = a\,cos(t)\,dt$$

pois, $\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2 - (a\,sen(t))^2} = \sqrt{a^2\left(1 - sen^2(t)\right)} = a\sqrt{cos^2(t)} = a\,cos(t)$

e $\dfrac{du}{dt} = a\,cos(t) \Leftrightarrow du = a\,cos(t)\,dt$

<u>Nota:</u> *No fim da primitiva, para voltar à variável inicial há que ter em conta o seguinte:*

- $u = a\,sen(t) \Leftrightarrow arcsen\left(\dfrac{u}{a}\right) = t$
- $u = a\,sen(t) \Leftrightarrow sen(t) = \dfrac{u}{a}$
- $\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos(t) \Leftrightarrow \cos(t) = \dfrac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a}$
- *tendo em conta o 2º e 3º ponto, podemos fazer a substituição de todas as funções trigonométricas directas:* $tg(t) = \dfrac{sen(t)}{cos(t)}$; $\mathbf{cotg}(t) = \dfrac{cos(t)}{sen(t)}$;

  $sec(t) = \dfrac{1}{cos(t)}$; $\mathbf{cosec}(t) = \dfrac{1}{sen(t)}$.

Nota: Podemos fazer a substituição $u = a\cos(t)$ e nesse caso temos: $\sqrt{a^2 - u^2} = a\ sen(t)$ e $du = -a\,sen(t)\,dt$.

Exemplo: $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Resolução:

Fazendo $x = sen(t)$ *temos* $dx = \cos(t)\,dt$ *e* $\sqrt{1-x^2} = \cos(t)$*:*

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int cos(t)\big(cos(t)\,dt\big) = \int cos^2(t)dt = \int \frac{1+cos(2t)}{2}dt$$

$$= \int \frac{1}{2}dt + \int \frac{cos(2t)}{2}dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\frac{sen(2t)}{2} + C$$

Como $sen(2\alpha) = 2sen(\alpha)\cos(\alpha)$ *temos* $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\frac{2sen(t)cos(t)}{2} + C$

Para voltar à variável inicial (tal como refere a Obs.1) há que ter em conta que $sen(t) = x$ $\cos(t) = \sqrt{1-x^2}$ *e que* $t = arcsen(x)$*, logo*

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}arcsen(x) + \frac{1}{2}\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{2} + C.$$

II. Primitivas do tipo:

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{u^2 - a^2}\right)dx}$$

onde $R\left(x, \sqrt{u^2 - a^2}\right)$ é uma função racional $a > 0$ e u é função de x:

Substituição: $u = a\sec(t)$

Logo,

$\sqrt{u^2 - a^2} = a\ tg(t)$ $du = a\sec(t)tg(t)\,dt$

Como $\left(sec(t)\right)' = sec(t)tg(t)$ e $sen^2(t) + cos^2(t) = 1 \underset{\substack{dividindo \\ por\ cos^2 t}}{\Longleftrightarrow} tg^2(t) + 1 = sec^2(t)$ temos:

$\dfrac{du}{dt} = a\sec(t)tg(t) \Leftrightarrow du = a\sec(t)tg(t)\ dt$ e

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{\left(a\sec(t)\right)^2 - a^2} = \sqrt{a^2\left(\sec^2(t) - 1\right)} = a\sqrt{tg^2(t)} = a\,tg(t)$$

Nota: *No fim da primitiva, para voltar à variável inicial há que ter em conta o seguinte:*

- $u = a\sec(t) \Leftrightarrow u = a\dfrac{1}{\cos(t)} \Leftrightarrow \cos(t) = \dfrac{a}{u}$
- $u = a\sec(t) \Leftrightarrow arccos\left(\dfrac{a}{u}\right) = t$
- $\sqrt{u^2 - a^2} = a\ tg(t)$

  $\Leftrightarrow \sqrt{u^2 - a^2} = a\dfrac{sen(t)}{\cos(t)} \Leftrightarrow sen(t) = \cos(t)\dfrac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a} \Leftrightarrow sen(t) = \dfrac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}$
- *tendo em conta o 2º e 3º ponto, podemos fazer a substituição de todas as funções trigonométricas directas.*

Exemplo: $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2 - 1}}dx$

<u>*Resolução:*</u>

Fazendo $2x = \sec(t)$ *temos* $dx = \dfrac{1}{2}\sec(t)tg(t)\,dt$, $\sqrt{4x^2 - 1} = tg(t)$ *e* $x^2 = \dfrac{\sec^2(t)}{4}$ *:*

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2 - 1}} = \frac{4}{2}\int \frac{\sec(t)tg(t)}{\sec^2(t)tg(t)}dt = 2\int \frac{1}{\sec(t)}dt = 2\int \cos(t)dt = sen(t) + C$$

Como $2x = \sec(t) \Leftrightarrow \cos(t) = \dfrac{1}{2x}$ *e* $\sqrt{4x^2 - 1} = tg(t) \Leftrightarrow sen(t) = \dfrac{1}{2x}\sqrt{4x^2 - 1}$ *temos*

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2 - 1}}dx = sen(t) + C = \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{2x} + C.$$

III. Primitivas do tipo:

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{a^2+u^2} \right) dx}$$

onde $R\left(x, \sqrt{a^2+u^2}\right)$ é uma função racional $a > 0$ e u é função de x:

Substituição: $u = a\,tg(t)$

Logo,

$$\sqrt{a^2+u^2} = a\ \sec(t) \qquad du = a\ \sec^2(t)\,dt$$

Porque $(tg(t))' = sec^2(t)$ e $sen^2(t) + cos^2(t) = 1 \underset{\substack{dividindo \\ por\ cos^2 t}}{\Leftrightarrow} tg^2(t) + 1 = sec^2(t)$ temos:

$$\frac{du}{dt} = a\sec^2(t) \Leftrightarrow du = a\sec^2(t)\,dt \text{ e}$$

$$\sqrt{a^2+u^2} = \sqrt{a^2 + (a\,tg(t))^2} = \sqrt{a^2\left(1+tg^2(t)\right)} = a\sqrt{\sec^2(t)} = a\sec t)$$

Nota: *No fim da primitiva, para voltar à variável inicial há que ter em conta o seguinte:*

- $u = a\,tg(t) \Leftrightarrow arctg\left(\dfrac{u}{a}\right) = t$
- $\sqrt{a^2+u^2} = a\ \sec(t) \Leftrightarrow \sqrt{a^2+u^2} = \dfrac{a}{\cos(t)} \Leftrightarrow \cos(t) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+u^2}}$
- $u = a\,tg(t) \Leftrightarrow u = a\dfrac{sen(t)}{\cos(t)} \Leftrightarrow sen(t) = \dfrac{u}{\sqrt{a^2+u^2}}$
- *tendo em conta o 2º e 3º ponto, podemos fazer a substituição de todas as funções trigonométricas directas.*

Exemplo: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$

Resolução:

Fazendo $x = 3tg(t)$ *temos* $dx = 3\sec^2(t)\,dt$ *e* $\sqrt{x^2+9} = 3\sec(t)$*:*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \int \frac{3\,sec^2(t)}{3\,sec(t)}dt = \int sec(t)dt = ln\left|sec(t) + tg(t)\right| + C = ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{x}{3}\right| + C.$$

Exercício: Calcule:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$ (sugestão: $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$).

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+8x-3}}$ (sugestão: $-4x^2+8x-3=-4(x-1)^2+1=1-(2x-2)^2$).

6.6.3. Racionalização de algumas de algumas funções

Vamos ver com podemos racionalizar primitivas que envolvam as funções $sen(x)$ e $\cos(x)$

$$\boxed{\int R(sen(x), cos(x))dx}$$

onde $R(sen(x), cos(x))$ é uma função racional:

Substituição: $tg\left(\frac{x}{2}\right)=t$

onde $sen(x)$ e $cos(x)$ e dx são substituídos por:

$$sen(x)=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

As igualdades anteriores são obtidas das seguintes identidades trigonométricas:

$$sen\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{2tg(x)}{1+tg^2(x)} \text{ e } \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1-tg^2(x)}{1+tg^2(x)}.$$

dx obtém-se da forma seguinte: $tg\left(\frac{x}{2}\right)=t \Leftrightarrow x=2arctg(t)$ logo, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

Exemplos:

a. $\int \frac{1}{1+sen(x)+cos(x)}dx$

Resolução:

Fazendo $tg\left(\frac{x}{2}\right)=t$ *temos:*

$$\int \frac{dx}{1+sen(x)+cos(x)} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{1}{1+t}dt = ln|1+t|+C = ln\left|1+tg\left(\frac{x}{2}\right)\right|+C$$

b. $\int sec(x)dx = \int \frac{1}{cos(x)}dx$

Resolução: *Fazendo* $tg\left(\frac{x}{2}\right)=u$ *temos:*

$$\int \frac{1}{cos(x)}dx = \int \frac{1}{\frac{1-u^2}{1+u^2}}.\frac{2du}{1-u^2} = \int \frac{2}{1-u^2}du = \int\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)du$$

$$= ln|1+u|+ln|1-u|+C$$

$$= ln\left(\frac{|1+u|}{|1-u|}\right)+C = ln\left(\frac{\left|1+tg\left(\frac{x}{2}\right)\right|}{\left|1-tg\left(\frac{x}{2}\right)\right|}\right)+C$$

$$= ln|sec(x)+tg(x)|+C$$

c. $\int \frac{dx}{1-sen(x)}$

Resolução: *Fazendo* $tg\left(\frac{x}{2}\right)=y$ *temos:*

$$\int \frac{dx}{1-sen(x)} = \int \frac{1}{1-\frac{2y}{1+y^2}}.\frac{2}{1+y^2}dy = \int \frac{1+y^2}{1+y^2-2y}.\frac{2}{1+y^2}dy$$

$$= 2\int \frac{1}{(y-1)^2}dy = 2\frac{-1}{y-1}+C = \frac{2}{1-tg\left(\frac{x}{2}\right)}+C$$

Exercício: Calcule as seguintes primitivas:

1. $\int \dfrac{dx}{3+5\cos(x)}$

2. $\int \dfrac{dx}{sen(x)+\cos(x)}$

3. $\int \dfrac{1+tg(x)}{1-tg(x)}dx$

4. $\int \dfrac{dx}{1+3\cos^2(x)}$

6.7 Exercícios

1. Calcule as seguintes primitivas:

a. $\int x^3 \quad dx$

b. $\int 4x^3-3x^2+5 \quad dx$

c. $\int (x^2+1)^3 \quad dx$

d. $\int \dfrac{1}{(x+1)^2} \quad dx$

e. $\int (x^2+2)^3.2x \quad dx$

f. $\int (x^3+1)^4.x^2 \quad dx$

g. $\int \dfrac{3x}{\sqrt[5]{1+5x^2}} \quad dx$

h. $\int \dfrac{-2}{x^3-3x^2+3x-1} \quad dx$

i. $\int \dfrac{2}{x} \quad dx$

j. $\int (x+3)^{-1} \quad dx$

k. $\int \dfrac{\ln(x)}{x} \quad dx$

l. $\int (x+3)^{-1} \quad dx$

m. $\int 2^x \quad dx$

n. $\int 2\cos(2x) \quad dx$

o. $\int sen(\frac{x}{3}) \quad dx$

p. $\int \dfrac{arctg(x)}{1+x^2} \quad dx$

q. $\int \dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}} \quad dx$

r. $\int \dfrac{1}{\sqrt[3]{5x}} \quad dx$

2. Determina as seguintes primitivas:

a. $\int \dfrac{x+1}{\sqrt{x}} \quad dx$, fazendo a substituição $x=t^2$;

b. $\int \dfrac{\ln(x)}{x} \quad dx$, fazendo a substituição $\ln(x)=t$;

3. Calcula os seguintes integrais, utilizando a técnica de primitivação por substituição, se necessário:

a. $\int \sqrt{2x+1}\, dx$

b. $\int \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}\, dx$

c. $\int \frac{2x}{(x^2+2)\sqrt{x^4+4x^2+3}}\, dx$

d. $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+3x+1}}\, dx$

4. Calcule as seguintes primitivas, utilizando a primitivação por partes:

a. $\int xe^x \; dx$

b. $\int e^{x^2} x^3 \; dx$

c. $\int \ln(x) \; dx$

d. $\int \ln^2(x) \; dx$

e. $\int x\sqrt{2-3x} \; dx \; dx$

f. $\int \frac{x\ln(x+1)}{1+x}\, dx$

g. $\int \frac{\ln^2(x)}{x^2} \; dx$

h. $\int sen(\ln(x))\, dx$

i. $\int xsen(x) \; dx$

j. $\int sen^2(x) \; dx$

k. $\int (x^2+1)\cos(x)\, dx$

l. $\int arctg(x) \; dx$

m. $\int e^x \cos(x) \; dx$

5. Determine a função f definida em IR^+ que verifica as condições $f'(x) = 4x\ln(x)$ e $f(1) = 2$.

6. Calcule os seguintes integrais de funções racionais:

a. $\int \frac{1}{x^2-9}\, dx$

b. $\int \frac{5x-12}{x(x-4)}\, dx$

c. $\int \frac{x+2}{3x^2-12x+12}\, dx$

d. $\int \frac{-15x^2+50x-25}{3x^3-4x}\, dx$

e. $\int \frac{x^4}{x^4-1}\, dx$

f. $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{x^4+2x^2-3}\, dx$

g. $\int \frac{x^4}{2x^3-4x^2+8x-16}\, dx$

h. $\int \frac{2x^4-2x^3+6x^2-5x+1}{x^3-x^2+x-1}\, dx$

i. $\int \frac{x^4+8x^2}{2x^3-2x^2+18x-18}\, dx$

j. $\int \frac{x^5}{2x+1}\, dx$

k. $\int \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}\, dx$

l. $\int \frac{t+1}{t^4+t^2}\, dt$

m. $\int \frac{x+1}{x(x^2-2x+2)}\, dx$

n. $\int \frac{x^4}{(x-1)(x+1)(x+2)}\, dx$

o. $\int \frac{x^2+1}{12+3x^2}\, dx$

7. Determine a primitiva da função $f(x) = \dfrac{3}{9x^2 + 6x + 2}$ que toma o valor $\dfrac{5\pi}{4}$, para $x = 0$.

8. Determine a função f tal que $f''(x) = \dfrac{8}{(x+1)^3}$, $f'(1) = -1$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

9. Calcule os integrais das seguintes funções trigonométricas:

a. $\int \cos\left(\frac{x}{5}\right) sen\left(\frac{x}{5}\right) dx$
b. $\int sen^2(x)\cos(x)dx$
c. $\int tg(2x)dx$

d. $\int x \cot g(x^2)dx$
e. $\int \frac{\cos^2(x)}{sen^4(x)} dx$
f. $\int \cos ec\left(\frac{x}{3}\right)dx$

g. $\int \frac{sen(x)+\cos(x)}{\cos(x)} dx$
h. $\int \frac{\sec(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})} dx$
i. $\int sen^2(5x)dx$

j. $\int \cos^3(x)dx$
k. $\int \sec^3(x)dx$
l. $\int sen^2(x)\cos^3(x)dx$

m. $\int sen^4(3x)\cos^5(3x)dx$
n. $\int sen^3\left(\frac{x}{2}\right)\cos^5\left(\frac{x}{2}\right)dx$
o. $\int sen^2(2x)\cos^4(2x)dx$

p. $\int sen^2(x)\cos^2(x)dx$
q. $\int tg^3(2x)\sec(2x)dx$
r. $\int sen(3x)sen(2x)dx$

s. $\int sen(3x)\cos(5x)dx$
t. $\int \cos(4x)\cos(2x)dx$
u. $\int \sqrt{sen(x)}\cos(x)dx$

v. $\int tg^5(x)dx$
w. $\int \sqrt{1-\cos(x)}dx$
x. $\int (1+\cos(3x))^{\frac{3}{2}} dx$

y. $\int \frac{1}{\sqrt{1-sen(2x)}} dx$
z. $\int tg^3(3x)\sec^4(3x)dx$
α. $\int \frac{sen\, x}{\cos^3 x} dx$

β. $\int \frac{sen^2 x}{\cos x} dx$

10. Calcule as seguintes primitivas, utilizando as substituições trigonométricas, sempre que necessário:

a. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}} dx$
b. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}} dx$
c. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}} dx$

d. $\int \sqrt{x^2+5}dx$
e. $\int \frac{1}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$
f. $\int \frac{1}{1+senx} dx$

g. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}dx$ h. $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}dx$ i. $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx$

j. $\int \frac{1+sen(x)}{1+\cos(x)}dx$ k. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-2x^2}}dx$ l. $\int \frac{x^3}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}dx$

m. $\int x^2\sqrt{2-x^2}\,dx$

11. Calcule os integrais das seguintes funções usando o método que achar mais conveniente.

a. $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^2}}\,dx$ **b.** $\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$ **c.** $\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{3+2x}}\,dx$

d. $\int \frac{1}{e^{2x}-2e^x}\,dx$ **e.** $\int \frac{\arccos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ **f.** $\int \left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\,dx$

g. $\int \arcsin^2(x)\,dx$ **h.** $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$ **i.** $\int \frac{7^x}{7^x-7^{-x}}\,dx$

j. $\int \frac{3x^2+5x}{x^3+x^2-x-1}\,dx$ **k.** $\int \sin^3(x)\cdot\sec^2(x)\,dx$ **l.** $\int \frac{x\arctan(x)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

m. $\int \frac{1}{\left(x^2-4x+4\right)\left(x^2-4x+5\right)}\,dx$ **n.** $\int \frac{x^2+3}{(x+1)^4}\,dx$ **o.** $\int \frac{\cos(\pi x)}{e^x}\,dx$

p. $\int \frac{1+\sin(x)}{\sin(x)+\sin(x)\cos(x)}\,dx$ **q.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ **r.** $\int \frac{3-2x}{5x^2+7}\,dx$

s. $\int \frac{3-4x}{\left(1-2\sqrt{x}\right)^2}\,dx$ **t.** $\int x\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$ **u.** $\int \frac{1}{e^x+4e^{-x}}\,dx$

v. $\int \frac{1}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)}\,dx$ **w.** $\int \sin^5(x)\,dx$ **x.** $\int \frac{x+5}{x+4}(x+2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

y. $\int e^{x^3}\left(\frac{1}{3}+x^3\right)dx$ **z.** $\int \sqrt{1+e^x}\,dx$