

Capítulo V

Derivação

5.1 Noção de derivada

Seja f uma função real de variável real.

Definição:

- Seja $a \in D_f$ e f definida numa vizinhança do ponto $x = a$.

Diz-se que f é **derivável** ou **diferenciável** em $x = a$ se existe e é finito o limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Este limite (quando existe) diz-se a **derivada** ou **diferencial de f em $x = a$** e representa-se por:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

- Uma função f diz-se **derivável** ou **diferenciável** se for diferenciável em todos os pontos do seu domínio.

Exemplo:

1. Calcule a partir da definição, a derivada da função $f(x) = x^2$.

Resolução:

Seja $a \in D_f = \mathbb{R}$. Note-se que f está sempre definida numa vizinhança de qualquer ponto do domínio e portanto faz sentido calcular $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Assim, tem-se que:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a$$

Logo $f'(x) = 2x \quad \forall x \in D_f$.

2. Considere a função definida por $f(x) = \frac{1}{x+5}$. Mostre que f é diferenciável.

Resolução:

Para mostrar que f é diferenciável temos que provar que f é diferenciável em qualquer ponto do $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$.

Consideremos um ponto $a \in D_f$. A função f está sempre definida à direita e a esquerda de qualquer ponto do domínio, pelo que faz sentido determinar

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x+5} - \frac{1}{a+5}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-1}{(x+5)(a+5)} = -\frac{1}{(a+5)^2}$$

Como $f'(a)$ existe e é finita para qualquer $a \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$, concluímos que f é diferenciável.

5.2 Interpretação geométrica da derivada

Tangente ao gráfico da função f (ou à curva de equação $y = f(x)$)

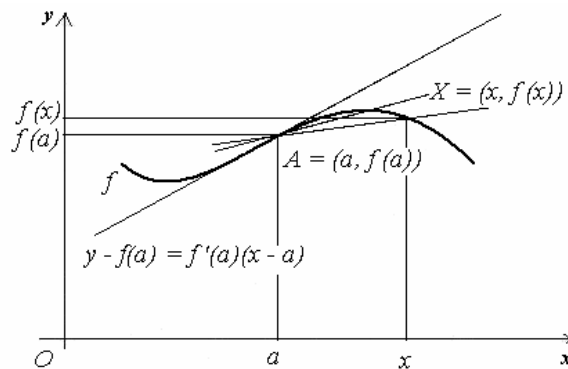
De acordo com a figura seguinte a tangente no ponto $A = (a, f(a))$, obtém-se considerando o limite da recta secante AX fazendo o ponto $X = (x, f(x))$ “aproximar-se” de A , ou seja, quando $x \rightarrow a$.

A equação da recta AX é determinada pelo ponto A e pelo seu declive que é $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Então, equação da recta tangente é determinada pelo ponto A e o seu declive é (caso exista)

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Podemos definir desta forma a equação da recta tangente a f em $x = a$, caso f

seja derivável em $x = a$.



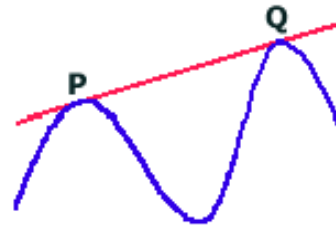
Definição:

Seja f uma função diferenciável em $x = a$ com derivada $f'(a)$. A **equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$** é:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Nota:

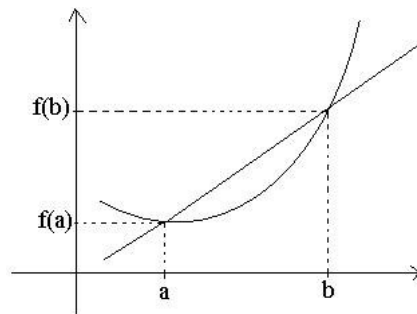
- Se $f'(a) = 0$ então a recta tangente ao gráfico de f é uma recta horizontal.
- Não existem funções diferenciáveis cuja recta tangente seja vertical (porquê?! – a razão é óbvia porque o declive das rectas verticais é ∞ e uma função diferenciável tem derivada finita em cada ponto do seu domínio.)
- A recta tangente ao gráfico de uma função num ponto pode intersectar o gráfico dessa função mais que uma vez. Pode até acontecer coincidir com a recta tangente noutro ponto como é ilustrado na figura abaixo: a recta tangente em P coincide com a recta tangente em Q .

**Noção de velocidade**

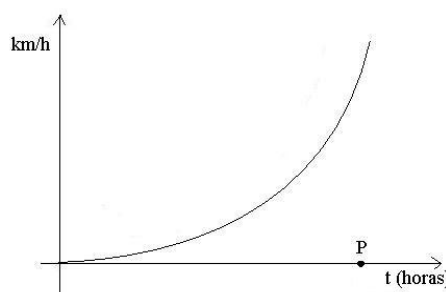
Chama-se **taxa de variação média** de uma função f entre os pontos a e b ao quociente:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geometricamente, a taxa de variação média de uma função f entre os pontos a e b , é o declive da recta definida por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.



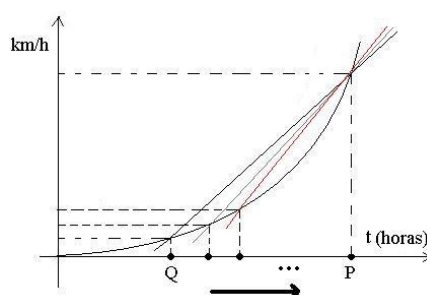
Suponhamos que um automóvel se desloca ao longo de um determinado trajecto e que se pretende saber a velocidade instantânea num instante P .



Ideia:

Considerar um instante Q diferente de P .

À medida que o ponto Q se aproxima de P , a taxa de variação média torna-se cada vez mais próximo da velocidade instantânea no instante P .



Neste caso particular, a taxa de variação média dá-nos a velocidade média (v_m) do veículo entre os instantes Q e P :

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{espaço percorrido}}{\text{tempo gasto}}$$

Recorrendo à definição de limite é possível definir o conceito de *velocidade instantânea*, (v_i), rigorosamente:

$$v_i = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

A *velocidade instantânea* no instante P corresponde ao declive da recta tangente em à função no ponto $(P, f(P))$.

5.3 Derivadas laterais. Interpretação geométrica

Como a derivada de uma função f num ponto $x = a$ é um caso particular de um limite, então também faz sentido calcular derivadas laterais:

$$f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

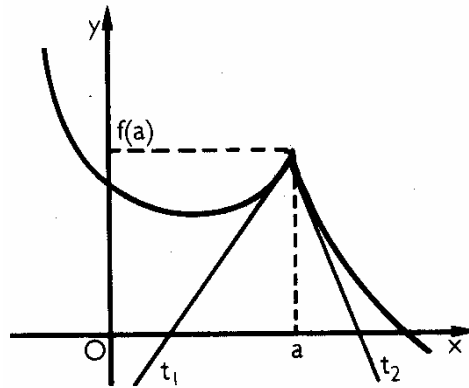
quando tais limites existem, eles são, denominados respectivamente, por *derivada lateral de f à esquerda de $x = a$* e *derivada lateral de f à direita de $x = a$* .

Nota:

- Se as derivadas laterais em $x = a$ são iguais então existe derivada em $x = a$ e tem-se que $f'(a^-) = f'(a) = f'(a^+)$
- Se as derivadas laterais em $x = a$ são distintas então não existe derivada em $x = a$.

Interpretação geométrica das derivadas laterais:

- A derivada à esquerda no ponto $x = a$ identifica-se com o declive da semi-tangente à esquerda de f no ponto $x = a$, (t_1)
- A derivada à direita no ponto $x = a$ identifica-se com o declive da semi-tangente à direita de f no ponto $x = a$, (t_2)
- Uma função tem derivada num ponto se as semi-tangentes nesse ponto estiverem no prolongamento uma da outra, isto é, formarem uma recta.
- Na figura acima as semi-tangentes (t_1) e (t_2) não estão contidas numa mesma recta pelo que não existe derivada no ponto $x = a$.

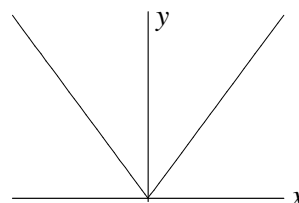


Exemplo:

A função $f(x) = |x|$ não é diferenciável em $x = 0$.

O gráfico de $f(x) = |x|$ está na figura ao lado.

De facto, tem-se que:



$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

($|x| = -x$ para $x < 0$)

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

($|x| = x$ para $x > 0$)

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, não existe $f'(0)$. Logo a função f não é diferenciável (pois existe pelo menos um ponto do domínio onde não existe derivada) apesar de ser contínua em todo o seu domínio.

Nota:

- O domínio da derivada de uma função está sempre contido no domínio dessa função, isto é, $D_{f'} \subseteq D_f$.

Por exemplo:

$$\begin{aligned} \blacksquare f(x) &= x^2 \quad \text{então} \quad f'(x) = 2x \quad D_f = D_{f'} \\ \blacksquare f(x) &= |x| \quad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R} = D_f \end{aligned}$$

- Uma função descontínua não pode ser diferenciável (porquê?!)

No entanto, o recíproco é sempre verdadeiro:

Teorema

Se f é uma função derivável em $x = a$ então f é contínua em $x = a$

(ou equivalentemente, se f é descontínua em $x = a$ então não existe derivada em $x = a$).

Exemplo:

Verificar se existe $f'(1)$ onde $f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{se } x \geq 1 \\ e^{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$.

Resolução:

Note que só faz sentido verificar se uma função é derivável num ponto se ela for contínua nesse ponto.

Mas a função f é descontínua em $x = 1$ pois os limites laterais são distintos:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{x-1} = e^0 = 1 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

pelo que não existe derivada em $x = 1$.

Nota:

A função derivada não é necessariamente contínua. Pode eventualmente nem existir como acontece no exemplo anterior em $x=1$. No exemplo seguinte a função tem derivada em todos os pontos mas não é contínua em $x=0$.

A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

admite derivada em todos os pontos:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

mas como se verifica facilmente não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$, e portanto f' não é contínua.

Atenção!!!

Para calcular $f'(0)$ é necessário recorrer à definição de derivada num ponto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen}(1/x) \text{ que, pelo teorema do encaixe dos limites, vale } 0.$$

5.4 Regras de derivação. Propriedades da derivação.

Notação (de Leibniz) para derivadas:

Dado $y = f(x)$ para além da notação f' ou $f'(x)$, usámos $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{df}{dx}$ ou $\frac{d}{dx} f(x)$. Se quisermos especificar o valor num certo ponto a , além de $f'(a)$, usamos $\frac{df}{dx}(a)$ ou $\frac{df}{dx} \Big|_{x=a}$.

Exemplos: $\frac{d(3x+1)}{dx} = 3$; $\frac{dx^2}{dx} = 2x$; $\frac{dx^2}{dx}(3) = 2 \cdot 3 = 6$.

Regras de derivação

Calcular a derivada de uma função ou a função derivada a partir da sua definição pode ser bastante trabalhoso. Por essa razão, partindo da definição de derivada podemos deduzir várias regras de derivação que adiante indicaremos.

Teorema:

Sejam f e g duas funções deriváveis, então

- $f + g$ é derivável e tem-se $(f + g)' = f' + g'$
- fg é derivável e tem-se $(fg)' = f'g + fg'$
- cf é derivável e tem-se $(cf)' = cf'$, $c \in \mathbb{R}$
- se $g(x) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ é derivável e tem-se $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Derivadas de funções elementares:

1. função constante $c \in \mathbb{R}$	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
2. função linear $c \in \mathbb{R}$	$f(x) = cx$	$f'(x) = c$
3. potência:	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
4. função exponencial $a > 0$:	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln(a)$
5. função sen	$f(x) = \text{sen}(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
6. função $\cos$	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\text{sen}(x)$
7. função tg	$f(x) = \text{tg}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$
8. função cotg	$f(x) = \text{cotg}(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{\text{sen}^2(x)} = -\text{cosec}^2(x)$

Exercícios:

Calcular as derivadas das seguintes funções:

a. $f(x) = 2^x$

b. $f(x) = \sqrt{x}$

c. $f(x) = (x)^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$

d. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

e. $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$

5.5 Derivada da função composta (ou Regra da cadeia).

Teorema (Derivada da função composta ou Regra da Cadeia):

Sejam f e g **funções deriváveis** nos respectivos domínios e seja $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

então

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Na notação de Leibniz, se $u = g(x)$ então $f(g(x)) = f(u)$, e temos

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Exercícios:

Calcule a derivada das seguintes funções:

a. $f(x) = e^{x^2}$

b. $f(x) = 3^{x^2}$

c. $f(x) = \ln x^3$

d. $f(x) = \log x^3$

e. $f(x) = x^x$

f. $f(x) = \text{sen}(5x^2)$

g. $f(x) = \text{tg}(e^{x^2})$

Resolução e.:

Podemos ver f como $x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln x}$. Assim,

$$\begin{aligned} (e^{x \ln x})' &= (x \ln x)' e^{x \ln x} = [(x)' \ln x + x(\ln x)'] e^{x \ln x} = \left[\ln x + \frac{x}{x} \right] e^{x \ln x} \\ &= (\ln x + 1) e^{x \ln x} = x^x (\ln x + 1) \end{aligned}$$

De forma análoga, podemos deduzir a derivada de uma função da forma u^v , onde u e v são funções que dependem de uma variável, por exemplo x :

$$(u^v)' = \underbrace{v' u^v \ln u}_{\text{como exponencial}} + \underbrace{v u^{v-1} u'}_{\text{como polinomial}}$$

Corolário (derivada da função inversa):

Seja f uma função diferenciável e injectiva definida num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Seja $x_0 \in I$ tal que $f'(x_0) \neq 0$, então f^{-1} é derivável em $y_0 = f(x_0)$ e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Exercício:

Determine a derivada de $\arcsen(x)$ para $x \in]-1, 1[$.

Resolução:

A função $\arcsen$ é inversa da função $\sen$ na restrição $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ora $f(x) = \sen x$ é uma função diferenciável e injectiva em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Seja $y_0 = \sen(x_0)$ então o corolário anterior firma que

$$(\arcsen(y_0))' = \frac{1}{(\sen(x_0))'} = \frac{1}{\cos(x_0)}$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria temos

$$\sen^2(x_0) + \cos^2(x_0) = 1 \Rightarrow \cos(x_0) = \sqrt{1 - \sen^2(x_0)} = \sqrt{1 - y_0^2}$$

(note que como $x_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos(x_0)$ é positivo e nunca se anula) e portanto

$$(\arcsen(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercícios: Determine

- | | |
|---|---|
| a. $(\arccos(x))'$ para $x \in]-1, 1[$ | b. $(\arctg(x))'$ para $x \in \mathbb{R}$ |
| c. $(\operatorname{arccotg}(x))'$ para $x \in \mathbb{R}$ | d. $(\log_a(x))'$ para $x \in \mathbb{R}^+$ ($a > 0$) |

Temos portanto as seguintes fórmulas

9. função logaritmo $a > 0$:	$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$
10. função $\arcsen$	$f(x) = \arcsen(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. função $\arccos$	$f(x) = \arccos(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. função $\arctg$	$f(x) = \arctg(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
13. função $\operatorname{arccotg}$	$f(x) = \operatorname{arccotg}(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

Tabelas de Derivadas

Tendo em conta a derivada das funções elementares atrás referidas e a derivada da função composta, podemos escrever as seguintes fórmulas de derivação:

Sejam u e v funções deriváveis, k e $a > 0$ e $a \neq 1$ constantes:

$$1. (u + v)' = u' + v'$$

$$2. (uv)' = u'v + uv'$$

$$3. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$4. (ku)' = ku'$$

$$5. (u^k)' = ku^{k-1}u'$$

$$6. (a^u)' = u'a^u \ln a$$

$$7. (u^v)' = v'u^v \cdot \ln u + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$$

$$8. (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$9. (\operatorname{sen}(u))' = u' \cos(u)$$

$$10. (\cos(u))' = -u' \operatorname{sen}(u)$$

$$11. (\operatorname{tg}(u))' = u' \sec^2(u)$$

$$12. (\cot g(u))' = -u' \operatorname{cosec}^2(u)$$

$$13. (\operatorname{arcsen}(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$14. (\operatorname{arccos}(u))' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$15. (\operatorname{arctg}(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$16. (\operatorname{arc cot} g(u))' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

5.6 Derivadas de ordem superior

Dada uma função f , real de variável real, diferenciável, então f' é também uma função real de variável real. Assim podemos falar na função derivada de f' , ou seja na segunda derivada de f . Em termos práticos f'' obtém-se de f derivando esta duas vezes, ou seja,

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Notação: Se $y = f(x)$:

- primeira derivada de f : f' ou, na notação de Leibniz, $\frac{df}{dx}$ ou $\frac{dy}{dx}$;
- segunda derivada de f : f'' ou, na notação de Leibniz, $\frac{d^2f}{dx^2}$ ou $\frac{d^2y}{dx^2}$;

- terceira derivada de f : f''' ou, na notação de Leibniz, $\frac{d^3 f}{dx^3}$ ou $\frac{d^3 y}{dx^3}$;
- quarta derivada de f : $f^{(4)}$ ou, na notação de Leibniz, $\frac{d^4 f}{dx^4}$ ou $\frac{d^4 y}{dx^4}$;
- ...
- n -ésima derivada de f : $f^{(n)}$ ou, na notação de Leibniz, $\frac{d^n f}{dx^n}$ ou $\frac{d^n y}{dx^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercício:

Calcule as três primeiras derivadas da função $f(x) = \ln(x)$.

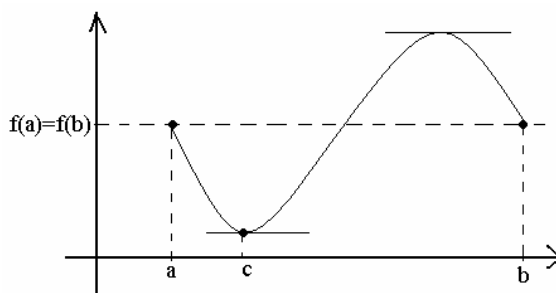
5.7 Teoremas fundamentais sobre derivação

Teorema de Rolle: Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo $]a, b[$.

Se $f(a) = f(b)$ então existe pelo menos um $c \in]a, b[$: $f'(c) = 0$.

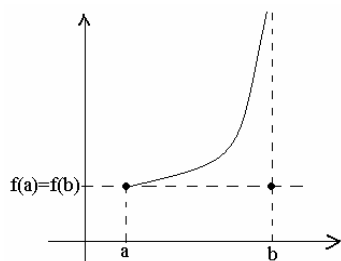
Interpretação geométrica:

O teorema de Rolle afirma que entre dois pontos de uma função (contínua e diferenciável) com a mesma imagem existe pelo menos um ponto do gráfico de f onde a recta tangente é horizontal.



Se alguma das condições do teorema falhar a conclusão do teorema pode não se verificar, por exemplo:

1. Consideremos uma função f cuja representação gráfica é:

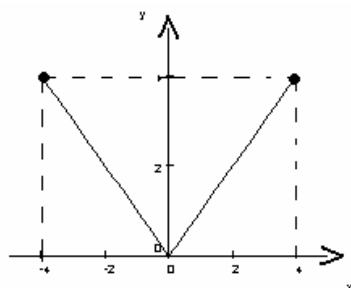


f não é contínua em $x = b$.

Não existe nenhum ponto do intervalo $[a, b]$ cuja recta tangente seja horizontal.

$\therefore$ é essencial a continuidade no intervalo fechado $[a, b]$

2. Seja $f(x) = |x|$, $x \in [-4, 4]$. A representação gráfica de f é:



f não admite derivada em $x = 0$

Não existe nenhum ponto do intervalo $[-4, 4]$ cuja recta tangente seja horizontal.

$\therefore$ é essencial a derivabilidade no intervalo aberto $]a, b[$.

Corolário 1: Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e com derivada no intervalo $]a, b[$.

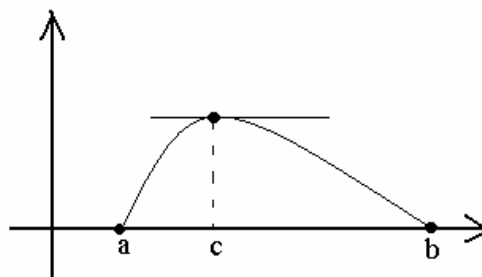
Se a e b são dois zeros de f então existe pelo menos um $c \in]a, b[: f'(c) = 0$.

Interpretação geométrica:

O corolário afirma que entre dois zeros de uma função (contínua e derivável) existe pelo menos um zero da derivada.

Se alguma das condições do teorema falhar a conclusão do teorema pode não se verificar.

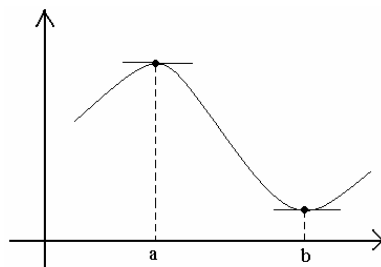
(Exercício: encontrar exemplos...)



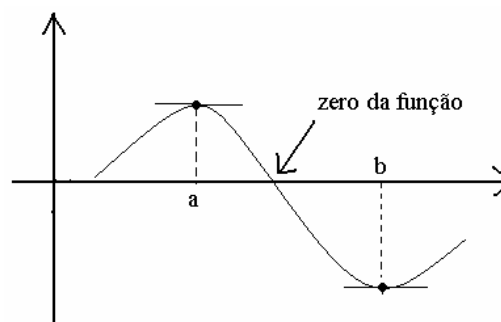
Corolário 2: Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável e $[a, b] \subset I$.

Se a e b são dois zeros de f' , então f tem no máximo um zero entre a e b .

Interpretação geométrica:



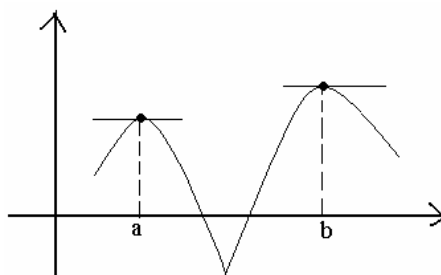
f não tem zeros.



f tem um único zeros.

Se a hipótese da derivabilidade falhar no intervalo $[a, b]$ então a conclusão do corolário pode deixar de ser válida.

Por exemplo:



a e b são dois zeros consecutivos da derivada mas entre a e b existe dois zeros da função.

$\therefore$ é essencial a derivabilidade no intervalo fechado $[a, b]$

Exercício:

A equação $e^x = 1 + x$ admite $x = 0$ como solução.

Mostre que esta equação não pode ter mais nenhuma solução real.

Resolução:

Em primeiro lugar, há que observar que $x = 0$ é efectivamente uma solução da equação dada: $e^0 = 1 + 0$ (proposição verdadeira).

Defina-se $f(x) = e^x - 1 - x$.

Vamos supor que f tem outro zero: $a \neq 0$.

Então pelo primeiro corolário do teorema de Rolle, existe um ponto entre 0 e a (exclusive) tal que a derivada é nula.

Mas $f'(x) = e^x - 1$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ – absurdo pois o teorema de Rolle afirma a existência de um zero da derivada entre 0 e a (exclusive).

O absurdo resultou de supor que f admitia mais do que um zero.

Logo f tem um único zero e portanto a equação dada tem uma única raiz.

Teorema de Darboux: Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo $[a, b]$.

Então $f'(x)$ toma todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$.

Exemplo: A função

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

não pode ser a derivada de nenhuma outra função, pois no intervalo $[-1, 1]$,

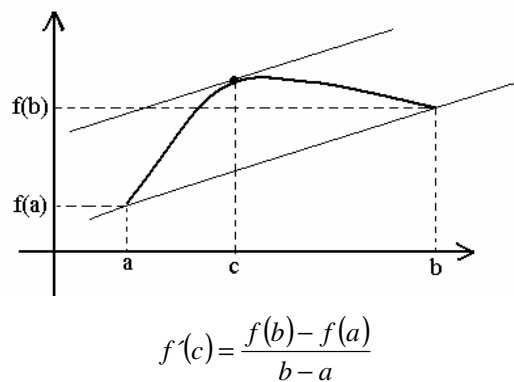
$f'(-1) = -1$, $f'(1) = 1$ e $f'(x)$ não toma valores entre -1 e 1.

Teorema do valor médio ou de Lagrange: Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo $]a, b[$.

Então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Interpretação geométrica:

O teorema de Lagrange afirma que existe um ponto no gráfico de f cujo declive da recta tangente é igual ao da recta que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.



Corolário: Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua (I um intervalo) e $c \in I$.

Se f tem derivada em $I \setminus \{c\}$ e se existem e são iguais $\lim_{x \rightarrow c^+} f'(x) = L = \lim_{x \rightarrow c^-} f'(x)$ então existe $f'(c)$ e $f'(c) = L$.

Exemplo:

A função

$$g(x) = \begin{cases} x & , x > 0 \\ \arctg(x) & , x \leq 0 \end{cases}$$

é contínua (verifique que é contínua em $x=0$), e temos que para $x \neq 0$ $g'(x)$ é

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ \frac{1}{1+x^2} & , x < 0 \end{cases}$$

Como g é contínua e $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x)$ então pelo corolário anterior

existe $g'(x)$ em $x=0$, e $g'(0)=1$.

Aplicação ao cálculo dos limites nas indeterminações $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

O cálculo de limites por vezes não é simples. Utilizando derivação há um resultado, que em certas condições, nos facilita muito esse cálculo:

Proposição (Regra de Cauchy): Sejam f e g duas funções definidas em $]a, b[$ e $c \in [a, b]$, tal que:

- f e g são deriváveis em $]a, b[\setminus \{c\}$
- $g'(x) \neq 0$, $x \in]a, b[\setminus \{c\}$
- $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$
- $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou é ∞ (*)

Então

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observação:

A regra de Cauchy também se aplica para limites no infinito, $c = \pm\infty$, e para limites laterais, $c = b^-$ ou $c = a^+$.

Repare que “(*)” não se trata da derivada do quociente!!!

Por vezes esta regra é também designada por **regra de L'Hospital** (ou L'Hôpital), mas esta não é tão geral e só é formulada para aplicar à indeterminação $\frac{0}{0}$.

Exercícios: Calcule os seguintes limites:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

resolução: temos uma indeterminação $\frac{0}{0}$, aplicando a regra de Cauchy,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$

resolução: temos uma indeterminação $\frac{0}{0}$, aplicando a regra de Cauchy,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1.$$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}$

resolução: temos uma indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$, aplicando a regra de Cauchy (n vezes),

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty.$$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

resolução: temos uma indeterminação $\frac{0}{0}$, aplicando a regra de Cauchy,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$

resolução: temos uma indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$, aplicando a regra de Cauchy,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{2x+1}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin^2(x)}$ (é necessário aplicar a Regra de Cauchy duas vezes)

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{e^x - e^{\sin(x)}}$ (é necessário aplicar a Regra de Cauchy duas vezes)

Nota:

Quando temos indeterminações da forma $\infty \cdot 0$ ou $\infty - \infty$ por vezes, podemos transformá-las em indeterminações da forma $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$ para podermos aplicar a regra de Cauchy, como podemos ver nos exemplos seguintes:

9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x^2}$

resolução: temos uma indeterminação $\infty \cdot 0$, **não podemos aplicar a regra de**

Cauchy directamente, mas como $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{x^2}}$ ficamos com

uma indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$ e agora podemos aplicar a regra de Cauchy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x e^{x^2}} = \frac{1}{-\infty} = 0.$$

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(3e^x - 1)]$

resolução: temos uma indeterminação $\infty - \infty$, **não podemos aplicar a regra de**

Cauchy directamente, mas como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(3e^x - 1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln e^x - \ln(3e^x - 1)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left[\frac{e^x}{3e^x - 1} \right] \\ &= \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3e^x - 1} \right] \quad \text{pois } \ln(x) \text{ é contínua} \end{aligned}$$

ficámos com uma indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$ e agora podemos aplicar a regra de

Cauchy

Outras indeterminações:

No cálculo de limites da forma $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ por vezes somos conduzidos às seguintes indeterminações:

$$1^\infty \quad 0^0 \quad \infty^0$$

Estas indeterminações levantam-se recorrendo à seguinte igualdade:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)}$$

onde $f(x) > 0$, $\forall x \in D_f$ e $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Prova:

Se existe e é positivo, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ então

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = A &\Leftrightarrow e^{\lim_{x \rightarrow a} \left[\ln f(x)^{g(x)} \right]} = A \quad (\text{pois } e^{\ln f(x)} = f(x)) \\ &\Leftrightarrow e^{\lim_{x \rightarrow a} \left[g(x) \ln f(x) \right]} = A \quad (\text{pois } \ln f(x) \text{ é contínua}) \\ &\Leftrightarrow e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)} = A \quad (\text{propriedades da função } \ln) \end{aligned}$$

Nota:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = e^k \quad k \in \mathbb{R}$$

Exercícios:

Calcule os seguintes limites:

11. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

resolução: temos uma **indeterminação** 0^0 , fazendo $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln(x)]}$ temos uma

indeterminação $0 \cdot \infty$, fazendo $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln(x)}{1/x} \right]}$ temos uma indeterminação

$\frac{\infty}{\infty}$ e podemos aplicar a regra de Cauchy:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln(x)}{1/x} \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1/x}{-1/x^2} \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{-x^2}{x} \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x)} = e^0 = 1.$$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg}(x)^{\operatorname{sen}(x)}$

13. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg}(x)^{\cos(x)}$

14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x)^{\frac{x+1}{x^2}}$

15. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 3x)^{\frac{1}{2x}}$

16. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos(x))^{\frac{1}{\cos(x)}}$

17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

Resolução:

Repare que não existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sen}(x)$.

Mas, $\frac{-1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$ e como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 0$ (ver o teorema de encaixe de limites).

5.8 Aplicações da derivada ao estudo das funções

5.8.1 Pontos críticos e intervalos de monotonia

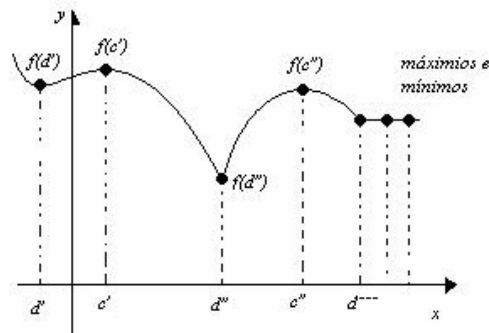
Definição:

Seja f uma função e $c \in D_f$. Diz-se que $f(c)$ é um **extremo relativo** de f se em $x = c$ ocorre um máximo ou um mínimo.

Por exemplo, a função representada ao lado tem:

- máximos em $x = c'$ e $x = c''$
- mínimos em $x = d'$, $x = d''$ e $x = d'''$.

Note que os dois últimos pontos assinalados no gráfico da função são simultaneamente máximos e mínimos.



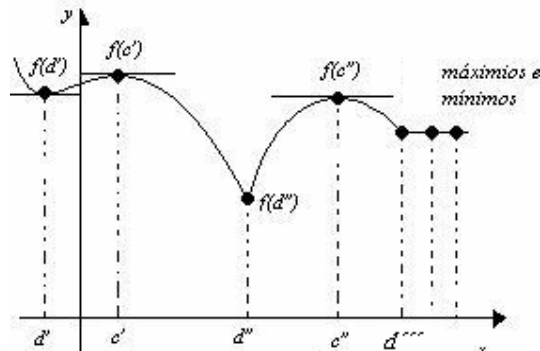
Teorema:

Seja f uma função que tem um extremo relativo em $x = c \in D_f$ (i.e., $f(c)$ é um máximo ou um mínimo local) então ou $f'(c) = 0$ ou não existe $f'(c)$.

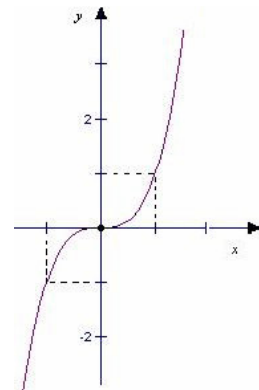
Como consequência do teorema anterior resulta que os pontos candidatos a extremos relativos de uma função f encontram-se entre os zeros da função derivada e/ou os pontos do domínio de f que não admitem derivada. A estes pontos chamamos **pontos críticos**.

Nota:

- $f'(c) = 0$ significa que a tangente ao gráfico de f em $x = c$ é horizontal, situação que ocorre em $x = d'$, $x = c'$ e $x = c''$;
- $f'(c)$ não existir significa que as semi-tangentes ao gráfico de f em $x = c$ têm declives distintos, como acontece em $x = d''$ e $x = d'''$.



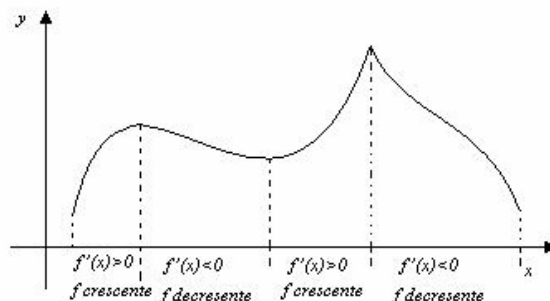
O recíproco deste teorema é falso, isto é, pelo facto de $f'(c) = 0$ não se pode concluir que $f(c)$ seja um extremo. Por exemplo, $f(x) = x^3$ tem derivada $f'(x) = 3x^2$, e $f'(0) = 0$, e no entanto $f(0)$ não é máximo nem mínimo de f . Conclusão: nem todo o ponto crítico é um extremo.



Corolário do teorema de Lagrange – Monotonia:

Seja f uma função derivável no intervalo $]a, b[$, então:

- se $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente crescente;
- se $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente decrescente;
- se $f'(x) = 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é constante.

**Como decidir se um ponto crítico é máximo ou mínimo relativo?****Critério da 1ª derivada para classificação de extremos:**

Seja f uma função contínua em $c \in]a, b[$ e derivável em $]a, b[\setminus \{c\}$. Se $x = c$ é um ponto crítico de f e

- f' passa de positiva para negativa em $x = c$, então $f(c)$ é máximo relativo;
- f' passa de negativa para positiva em $x = c$, então $f(c)$ é mínimo relativo;
- $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a, b[$, então $f(c)$ não é extremo relativo.

Critério da 2ª derivada para classificação de extremos:

Seja f uma função derivável em $]a, b[$, com $c \in]a, b[$, e $f'(c) = 0$:

- se $f''(c) < 0$ então f tem um máximo relativo em $x = c$ ($f(c)$ é máximo relativo)
- se $f''(c) > 0$ então f tem um mínimo relativo em $x = c$ ($f(c)$ é mínimo relativo).

Este pode ser compreendido quando analisarmos a concavidade da função f , de que falaremos em seguida.

Exercício:

Determine os extremos relativos e indique os intervalos de monotonia das seguintes funções:

a. $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & , \text{ se } x < 0 \\ \log_2(x+1) & , \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$

b. $g(x) = x^3 - x$

c. $h(x) = x^{1/3}(8 - x)$

Resolução de c.:

$D_h = \mathbb{R}$ e h é contínua, pois é o produto de funções contínuas ($\sqrt[3]{x}$ é uma função irracional e $8 - x$ é uma função polinomial)

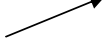
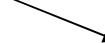
Note que se existir algum ponto onde a função seja descontínua então ele deve ser considerado como ponto crítico.

Cálculo da primeira derivada:

$$h'(x) = \frac{8-x}{3x^{2/3}} - x^{1/3} = \frac{8-x}{3\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[3]{x} = \frac{8-4x}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2}{3}x^{-2/3}(2-x);$$

Pontos críticos:

- $x = 0$ porque $0 \in D_h$ mas $0 \notin D_{h'}$,
- $x = 2$ pois $h'(2) = 0$

	$-\infty$	0		2	$+\infty$
Sinal de h'	+	n.d.	+	0	-
h					

n.d. – não definida

Extremos relativos:

Máximos relativos: $h(2)$; Mínimos relativos: não tem;

Note que

- $h(0)$ não é um extremo pois à volta de $x = 0$, h' não muda de sinal;

- alternativamente, podemos utilizar o teste da 2ª derivada para concluir que em $x = 2$ ocorre um máximo pois:

$$\left. \begin{array}{l} h'(2) = 0 \\ h''(x) = \frac{-4(x+4)}{9x^{5/3}} \\ h''(2) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(2) \text{ é um máximo}$$

Intervalos de monotonia:

h é crescente se $x \in]-\infty, 2[$;

h é decrescente se $x \in]2, +\infty[$.

Quais os pontos que se devem considerar na elaboração do quadro para o estudo da monotonia de uma função f ?

Devem ser considerados os seguintes pontos:

- pontos críticos, i.e. pontos tais que $f'(x) = 0$ ou pontos onde não existe $f'(x)$;
- pontos de descontinuidades de f e
- no caso do domínio ser um intervalo ou união de intervalos há que considerar os extremos que pertencem ao domínio.

5.8.2 Pontos de inflexão e concavidades

Vimos que o sinal de f' dá-nos informação sobre a monotonia da função f . Analogamente, podemos estudar o sinal de f'' para determinar a monotonia de f' . Assim, se f é duas vezes derivável no intervalo $]a, b[$ e

- se $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f' é crescente;
- se $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f' é decrescente.

Ora, geometricamente, f' ser crescente significa que à medida que x cresce o declive da recta tangente a f aumenta e que o gráfico da função (à volta do ponto x) fica acima de cada tangente (ver figura ao lado).

De forma análoga, f' ser decrescente significa que à medida que x cresce o declive da recta tangente a f diminui e que o gráfico da função (à volta de x) fica abaixo de cada tangente (ver figura ao lado).



Definição:

Seja f uma função, diz-se que $c \in D_f$ é um **ponto de inflexão** se f muda a concavidade à volta de $x = c$.

Teorema:

Seja f uma função que tem um ponto de inflexão em $x = c \in [a, b]$ então ou $f''(c) = 0$ ou não existe $f''(c)$.

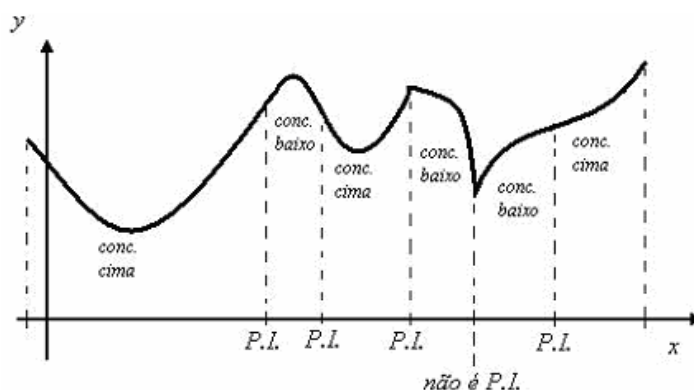
Como consequência do teorema anterior resulta que os pontos candidatos a pontos de inflexão de uma função f encontram-se entre os zeros da segunda derivada da função e/ou os pontos do domínio de f que não admitem segunda derivada.

O recíproco deste teorema é falso, isto é, pelo facto de $f''(c) = 0$ não se pode concluir que $x = c$ é um ponto de inflexão. Por exemplo, $f(x) = x^4$ tem segunda derivada $f''(x) = 12x^2$, e $f''(0) = 0$, e no entanto $x = 0$ não é ponto de inflexão (porque à volta de $x = 0$, f não muda a concavidade) conforme se pode ver na figura ao lado.

Teorema (teste da concavidade)

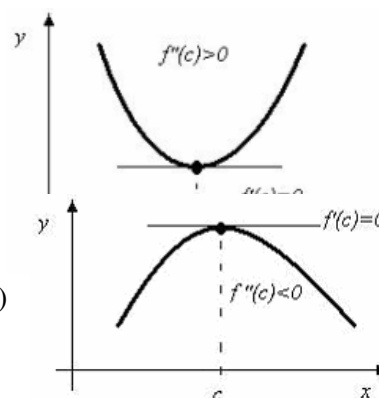
Seja f uma função duas vezes derivável em $]a,b[$.

- Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in]a,b[$, então f tem concavidade voltada para cima;
- Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in]a,b[$, então f tem concavidade voltada para baixo.



Podemos agora compreender o “**Cr terio da 2  derivada para classificação dos extremos**” atrás enunciado:

- se temos $f'(c) = 0$ (a tangente em $x = c$   horizontal),
e se $f''(c) > 0$ (a concavidade é voltada para cima)
então $f(c)$ é um mínimo (ver figura ao lado).
- se temos $f'(c) = 0$ (a tangente em $x = c$   horizontal),
e se $f''(c) < 0$ (a concavidade é voltada para baixo)
então $f(c)$ é um máximo (ver figura ao lado).



Exercício:

Determine os pontos de inflexão e a concavidade das seguintes funções:

- $f(x) = x^{2/3}(5+x)$
- $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 3$
- $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 17$
- $h(x) = |(x+1)(x-1)^2|$

Resolução da alínea a.:

$D_f = \mathbb{R}$ e f é contínua pois é o produto de funções contínuas ($\sqrt[3]{x^2}$ é uma função irracional e $5+x$ é uma função polinomial)

Note que se existir algum ponto onde a função seja descontínua então ele deve ser considerado como ponto crítico.

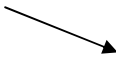
Cálculo da primeira derivada:

$$f'(x) = \frac{2(5+x)}{3x^{1/3}} + x^{2/3} = \frac{10+5x}{3x^{1/3}}$$

Embora não seja pedido no enunciado do exercício, vamos fazer o estudo dos pontos críticos, extremos relativos e intervalos de monotonia.

Pontos críticos:

- $x=0$ porque $0 \in D_f$ mas $0 \notin D_{f'}$
- $x=-2$ pois $f'(-2)=0$

	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	-	n.d	+
f					

n.d. – não definida

Extremos relativos: Máximos relativos: $f(-2)$; Mínimos relativos: $f(0)$.

Atenção!!!

Apesar de não existir derivada em $x=0$, f é contínua em $x=0$ e f' muda de sinal em torno de $x=0$ e portanto pelo critério da 1ª derivada para classificação de extremos podemos concluir que $f(0)$ é um mínimo relativo.

Muita atenção!!! se f não fosse contínua em $x=0$ mas $0 \in D_f$ ter-se-ia que analisar os limites laterais para poder concluir se existia ou não extremo nesse ponto.

Intervalos de Monotonia:

f estritamente crescente: se $x \in]-\infty, -2[$ e se $x \in]0, +\infty[$

f estritamente decrescente: $x \in]-2, 0[$.

Cálculo da segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{10}{9} \left(\frac{x-1}{x^{4/3}} \right)$$

Candidatos a pontos de inflexão:

- $x = 0$ porque $0 \in D_f$ mas $0 \notin D_{f'}$
- $x = 1$ pois $f''(1) = 0$

	$-\infty$	0		1	$+\infty$
Sinal de f''	-	n.d.	-	0	+
f	$\cap$		$\cap$		$\cup$

Pontos de inflexão: $x = 1$ (**note que:** o ponto de inflexão é o “valor da abcissa” ao contrário dos extremos que se referem ao “valor da ordenada”.)

Atenção!!!

Apesar de $x = 0$ não ser zero da 2ª derivada poderia ser ponto de inflexão, bastaria que à sua volta o sinal de f'' mudasse.

Sentido da concavidade:

f tem concavidade voltada para baixo: se $x \in]-\infty, 1[$

f tem concavidade voltada para cima: se $x \in]1, +\infty[$.

Quais os pontos que se devem considerar na elaboração do quadro para o estudo das concavidades de uma função f ?

Devem ser considerados os seguintes pontos:

- pontos candidatos a pontos de inflexão, i.e. pontos tais que $f''(x) = 0$ ou pontos onde não existe $f''(x)$;
- pontos de descontinuidades de f e
- no caso do domínio ser um intervalo ou união de intervalos há que considerar os extremos que pertencem ao domínio.

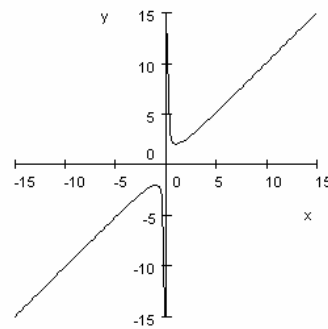
5.8.3 Assíntotas

Seja f uma função real de variável real.

Ideia intuitiva de assíntota:

Uma recta é uma assíntota de uma função se o seu gráfico se aproxima indefinidamente dessa recta e no limite confunde-se com a própria recta.

Consideremos a função definida por $f(x) = x + \frac{1}{x}$, cuja representação gráfica é:



Esta função não está definida em $x = 0$.

O que é que acontece quando x se aproxima de zero?

À medida que x se aproxima de zero, quer pela direita quer pela esquerda, os correspondentes valores de $f(x)$ “explodem”, isto é, crescem sem limite. Podemos então

escrever: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } x \rightarrow 0^- \\ +\infty & \text{se } x \rightarrow 0^+ \end{cases}$

Neste caso, dizemos que a recta $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico de f .

Como determinar as equações das assíntotas verticais do gráfico de uma função?

Para identificar os pontos onde eventualmente o gráfico admite uma assíntota determina-se:

- D_f ;
- os pontos $a \in D_f$ onde a função é descontínua;
- no caso do domínio ser um intervalo ou união de intervalos devem-se considerar os pontos extremos tais que $a \notin D_f$;
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ quando fazem sentido.

Se algum destes limites for $\pm \infty$, a recta $x = a$ diz-se uma *assíntota vertical* do gráfico de f (unilateral ou bilateral conforme exista um ou dois limites laterais infinitos, respectivamente).

Exercício:

Determine, caso existam, as assíntotas verticais dos gráficos das seguintes funções:

a. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Resolução:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 > 0\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

f é contínua porque é quociente entre uma função polinomial e uma função irracional.

Pontos onde podem existir assíntotas verticais: $x = -1$ e $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$\therefore x = -1$ e $x = 1$ são duas assíntotas verticais do gráfico de f .

b. $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

Resolução:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

f é contínua porque é diferença e quociente de funções contínuas (exponencial, constante e polinomial).

Pontos onde podem existir assíntotas verticais: $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad (\text{pela Regra de Cauchy})$$

$\therefore x = 0$ não é assíntota vertical do gráfico de f .

$\therefore$ o gráfico de f não tem assíntotas verticais.

c. $f(x) = \begin{cases} \ln(4 - x^2) & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Resolução:

$$\begin{aligned}
 D_f &= \{x \in \mathbb{R} : (4 - x^2 > 0 \wedge x \geq 0) \vee (x \neq 0 \wedge x < 0)\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : (-2 < x < 2 \wedge x \geq 0) \vee (x \neq 0 \wedge x < 0)\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 2 \vee x < 0\} \\
 &=]-\infty, 2[
 \end{aligned}$$

f é contínua em todo o seu domínio excepto em $x = 0$:

Para $x > 0$, f é contínua porque é composta de funções contínuas (logarítmica com polinomial). Para $x < 0$, f é contínua porque é uma função racional.

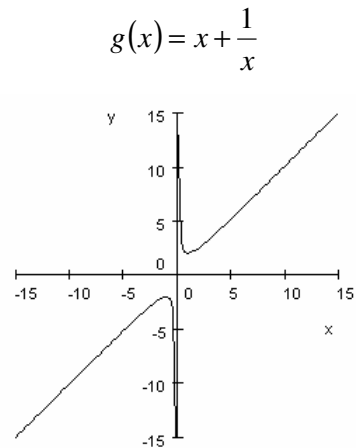
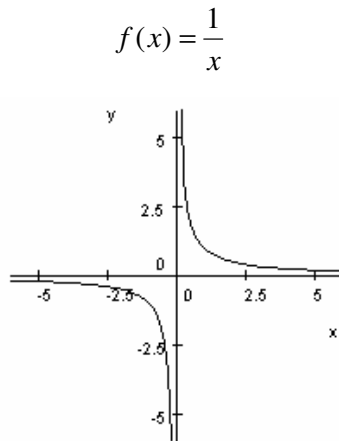
Para $x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^2 + 4) = \ln(4) \neq -\infty = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, logo f é descontínua em $x = 0$.

Pontos onde podem existir assíntotas verticais: $x = 0$ e $x = 2$.

(Exercício ...)

Assíntotas não verticais:

Consideremos as funções representadas graficamente:



Quando $x \rightarrow +\infty$ o gráfico da função f aproxima-se da recta $y = 0$. Quando $x \rightarrow -\infty$ o gráfico da função f aproxima-se da recta $y = 0$.

Dizemos que a recta $y = 0$ é uma assíntota horizontal (bilateral).

No caso da função g , quando $x \rightarrow \pm\infty$ o gráfico da função g aproxima-se da recta $y = x$.

$\left(\text{Note-se que } g(x) - x = \frac{1}{x} \text{ e } \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ quando } x \rightarrow \pm\infty \right)$

A existência de assíntotas não verticais (horizontais e oblíquas) depende do comportamento da função quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.

Se a recta $y = mx + b$ é uma assíntota não vertical do gráfico da função, quando $x \rightarrow +\infty$, é porque o gráfico da função se aproxima cada vez mais da recta quando $x \rightarrow +\infty$.

(De modo inteiramente análogo se diria quando $x \rightarrow -\infty$).

Suponhamos que $x \rightarrow +\infty$. Temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

Desta expressão vamos determinar as constantes m e b .

Determinação de m :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

Dividindo por x vem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - (mx + b)}{x} = 0 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - \frac{mx}{x} - \frac{b}{x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - m = 0 \\ &\Leftrightarrow m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \end{aligned}$$

Logo, $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Determinação de b :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} b \Leftrightarrow b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$$

Logo, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$.

Em geral é mais fácil determinar as assíntotas horizontais do que as oblíquas, pelo que há vantagem em **começar por verificar se uma função tem assíntotas horizontais**.

Para isso, basta calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, e caso este seja finito e igual a b , então $y = b$ é assíntota horizontal (quando $x \rightarrow +\infty$), e já não existe assíntota oblíqua (quando $x \rightarrow +\infty$).

Para analisar o comportamento da função quando $x \rightarrow -\infty$, procede-se do modo análogo.

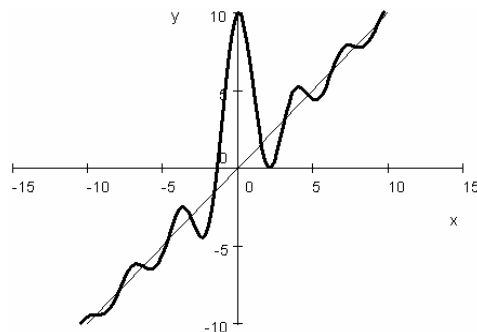
Notas:

- A existência de assíntotas não verticais (horizontais ou oblíquas) pressupõe que as expressões $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ tenham sentido, isto é, que o domínio da função contenha um intervalo ilimitado do tipo $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$.
- Se $m = 0$ então a assíntota, a existir, é horizontal.
- Se $m = \infty$ então o gráfico da função não tem assíntotas oblíquas (nem horizontais, claro!)
- Se uma função tem uma assíntota horizontal quando $x \rightarrow +\infty$ então não pode ter simultaneamente uma oblíqua quando $x \rightarrow +\infty$. Porquê?
- Uma função pode ter uma assíntota horizontal e outra oblíqua desde que uma seja quando $x \rightarrow +\infty$ e outra quando $x \rightarrow -\infty$.
- O gráfico de uma função pode intersectar no máximo uma vez uma assíntota vertical (caso em que a função é descontínua num ponto mas está definida nesse ponto).
- O gráfico de uma função pode intersectar mais do que uma vez uma assíntota não vertical.

Por exemplo, consideremos a função definida

$$\text{por } f(x) = \begin{cases} \frac{5\sin(2x)}{x} + x & \text{se } x \neq 0 \\ 10 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

cuja representação gráfica é:



(exercício: Verifique que a recta $y = x$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de f).

Exercício:

Determine, caso existam, as assíntotas não verticais dos gráficos das seguintes funções:

a. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Resolução:

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = -1$$

Note que nos dois limites anteriores não se consegue resolver as indeterminações aplicando a Regra de Cauchy (experimente!).

$\therefore y = 1$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$ e $y = -1$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.

$$\text{b. } f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

Resolução:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad (\text{Regra de Cauchy})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{-1}{-\infty} = 0$$

$\therefore y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$ e o gráfico de f não tem assíntotas horizontais quando $x \rightarrow +\infty$.

Assíntotas oblíquas:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

$\therefore$ o gráfico de f não admite assíntotas oblíquas quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\text{c. } f(x) = \begin{cases} \ln(4 - x^2) & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Resolução:

$$D_f =]-\infty, 2[.$$

Neste caso não faz sentido verificar se a função tem assíntotas oblíquas quando $x \rightarrow +\infty$.

Assíntotas horizontais quando $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$\therefore y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f .

5.8.4 Esboço de gráficos

Para esboçar o gráfico de uma função deve-se sempre que possível seguir as seguintes etapas:

- Indicar o domínio;
- Determinar os zeros (caso existam);
- Estudar a paridade;
- Estudar a continuidade;
- Identificar as assíntotas;
- Estudar a monotonia e indicar os extremos relativos;
- Determinar o sentido das concavidades do gráfico e indicar os pontos de inflexão.
- Depois destas “etapas cumpridas” tenta-se esboçar o gráfico, indicando por último o contradomínio.

Exercício:

Considere a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x + e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

1. Faça o estudo da função referindo os seguintes aspectos:

- | | |
|--------------------|----------------------------|
| a. Domínio | f. Extremos relativos |
| b. Paridade | g. Intervalos de monotonia |
| c. Continuidade | h. Pontos de inflexão |
| d. Assíntotas | i. Concavidades |
| e. Pontos críticos | |

2. Faça um esboço do gráfico de f .
3. Indique o contradomínio de f .

Resolução:

1.

a. Domínio: $\mathbb{R}$ b. Paridade:

$$f(-x) = 1 - x + e^{\frac{1}{x}} \neq f(x) \quad \forall x \neq 0$$

$$f(-x) = 1 - x + e^{\frac{1}{x}} \neq -f(x) \quad \forall x \neq 0$$

Portanto, f não é par nem ímpar.c. Continuidade

Se $x \neq 0$, f é contínua porque é soma de uma função polinomial $1+x$ com a função $e^{-\frac{1}{x}}$ sendo que esta é a composta da função exponencial com uma função racional, $-\frac{1}{x}$.

$$\text{Se } x = 0 \text{ então } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + x + e^{-\frac{1}{x}}\right) = 1 + \infty = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + x + e^{-\frac{1}{x}}\right) = 1 + 0 = 1.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, f é descontínua em $x = 0$.

Conclusão: f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

d. Assíntotas:

- Assíntotas verticais:

Pontos onde pode existir assíntotas verticais: $x = 0$.

Já vimos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + x + e^{-\frac{1}{x}}\right) = 1 + \infty = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + x + e^{-\frac{1}{x}}\right) = 1 + 0 = 1$$

$\therefore x = 0$ é uma assíntota vertical (unilateral) do gráfico de f .

- Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + x + e^{-\frac{1}{x}}\right) = 1 \pm \infty + 1 = \pm\infty$$

$\therefore$ o gráfico de f não admite assíntotas horizontais.

- Assíntotas oblíquas:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + x + e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + x + e^{-\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + e^{-\frac{1}{x}} \right) = 2$$

$\therefore y = x + 2$ é uma assíntota oblíqua bilateral.

1º derivada:

f é descontínua em $x = 0$ pelo que neste ponto não está definida a derivada.

$$\text{Se } x \neq 0, f'(x) = 1 + \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{x^2 + e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$$

e. Pontos críticos

$x = 0$ pois $0 \in D_f$ mas $0 \notin D'_f$.

Não existe outro pontos críticos porque a função derivada não tem zeros:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x^2 + e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + e^{-\frac{1}{x}} = 0 \wedge x^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{e^{-\frac{1}{x}} = -x^2}_{\text{impossível}} \wedge x \neq 0 \end{aligned}$$

(A derivada nunca se anula pois $e^{-\frac{1}{x}} > 0 \quad \forall x$ e $-x^2 \leq 0$)

f. Extremos relativos:

	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de f'	+	n.d.	+
f			

(n.d. – não definida)

Como f é descontínua em $x = 0$ é necessário ver o que acontece as imagens em torno deste ponto:

- $f(0) = 0$
- para $x > 0$ é fácil ver que $f(x) = 1 + x + e^{-\frac{1}{x}} > 1$
- para $x < 0$ já vimos que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$
- existe uma vizinhança em torno de $x = 0$ onde $f(0)$ é a menor imagem e portanto $f(0)$ é um mínimo relativo.

Nota: apesar de $f(0)$ ser um mínimo, a primeira derivada em torno de $x = 0$ não muda de sinal, mas isto não contradiz o **critério da 1ª derivada para classificação de extremos** pois neste critério exige-se que a função seja contínua o que não acontece (a função dada é descontínua em $x = 0$).

g. Intervalos de monotonia:

f é estritamente crescente se $x \in]-\infty, 0[$ e se $x \in]0, +\infty[$.

(**nota:** é incorrecto afirmar que a função é estritamente crescente em todo o seu domínio, basta analisar o que se passa à volta de $x = 0$).

2ª derivada: Se $x \neq 0$, $f''(x) = \frac{(1-2x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}$

Pontos candidatos a pontos de inflexão:

- $x = 0$ pois não está definida a segunda derivada mas $0 \in D_f$
- $x = \frac{1}{2}$ pois $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

h. Pontos de inflexão:

	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f''	+	n.d.	+	0	-
f	∪		∪		∩

n.d. – não definida

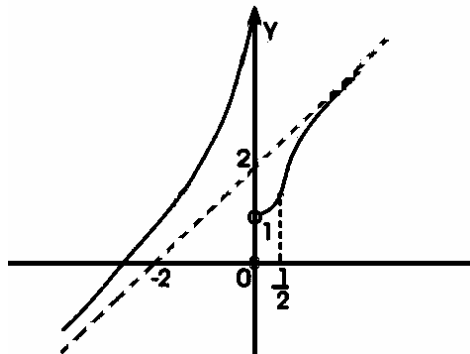
Portanto $x = \frac{1}{2}$ é um ponto de inflexão.

i. Concavidades:

Voltada para cima se $x \in]-\infty, 0[$ e se $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$

Voltada para baixo se $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

2. Esboço do gráfico



Apesar da função f ter dois zeros, não é fácil determinar um deles pois implica a resolução da equação $1 + x = e^{\frac{1}{x}}$.

3. Contradomínio: $CD_f = \mathbb{R}$.

5.8.5 Extremos absolutos

Já sabemos, pelo teorema de Weierstrass, que uma função definida num intervalo fechado $[a, b]$ atinge um máximo e um mínimo

Como proceder para encontrar os extremos de uma função definida num intervalo fechado $[a, b]$?

1. Determinar os pontos críticos de f no intervalo $]a, b[$.
2. Calcular a imagem de cada um dos pontos críticos obtido em 1.
3. Calcular as imagens dos extremos $f(a)$ e $f(b)$.
4. Os valores máximo e mínimo de f em $[a, b]$, caso existam, são o maior e o menor valores da função calculados em 2 e 3.

Exercício:

Considere a função f definida por $f(x) = x^3 - 12x$ onde $x \in [-3, 5]$.

Calcule os extremos absolutos de f .

Resolução:

$D_f = [-3, 5]$ porque $x \in [-3, 5]$.

f é contínua pois é polinomial.

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

A derivada está definida em todos os pontos, pelos que os pontos críticos se existirem terão que anular a derivada.

Pontos críticos: $x = -2$ e $x = 2$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Para determinar os extremos absolutos basta calcular as imagens dos pontos críticos e dos extremos do domínio da função f e compará-las. O valor da maior imagem será o máximo absoluto e o valor da menor imagem será o mínimo absoluto.

Como $f(-3) = 9$; $f(-2) = 16$; $f(2) = -4$ e $f(5) = 65$ resulta que 65 é o máximo absoluto e -4 é o mínimo absoluto.

Exercício:

Calcule os extremos absolutos, caso existam, da função definida por $f(x) = 4x^2 - 2x^4$ para $x \in [-2, 2]$.

Resolução:

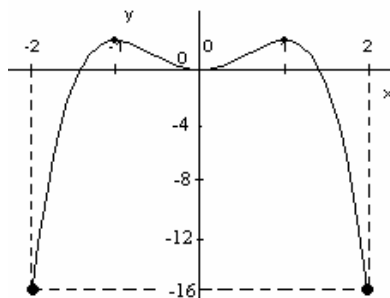
$D_f = [-2, 2]$ pois $x \in [-2, 2]$; f é contínua pois é polinomial.

$$f'(x) = 8x - 8x^3$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 8x(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1 \end{aligned}$$

Pontos críticos: $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$.

Como $f(-2) = -16$; $f(-1) = 2$; $f(0) = 0$; $f(1) = 2$ e $f(2) = -16$ resulta que 2 é o máximo absoluto e -16 é o mínimo absoluto.



Nota: quando consideramos $f(x) = 4x^2 - 2x^4$ definida em $\mathbb{R}$ podemos verificar facilmente pela análise do quadro da monotonia da função:

	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	-	0	+	0	-
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

que a função definida em $\mathbb{R}$

- tem um máximo absoluto $f(-1) = f(1) = 2$
- mas não tem mínimo absoluto: $f(0) = 0$ é um mínimo mas não é absoluto.

5.8.6 Problemas de optimização

Etapas da resolução de um problema de optimização:

- **Ler** atentamente o problema – fundamental!
- Identificar as incógnitas.
- Fazer um esquema do problema representando as incógnitas e as quantidades conhecidas.
- Encontrar as possíveis condições a que estão sujeitas as incógnitas.
- Expressar a função a otimizar em função de uma única incógnita.
- Encontrar os pontos críticos e extremos da função anteriormente obtida.
- **Dar resposta** ao problema.

Problema:

Determine dois números positivos cujo produto seja máximo e a sua soma seja 40.

Resolução:

- Identificar as variáveis

Sejam x e y os números procurados.

- Restrições das variáveis:

Sabe-se que:

- $x > 0$, $y > 0$
- $x + y = 40$ ($\Leftrightarrow y = 40 - x$)

- Função a maximizar:

Função produto: $xy = x(40 - x)$

Defina-se $f(x) = x(40 - x)$

- Determinar pontos críticos de f :

$$D_f =]0, +\infty[\quad (\text{note-se que } x > 0)$$

f é continua no seu domínio porque é polinomial.

$$f(x) = x(40 - x) \Rightarrow f'(x) = 40 - 2x$$

Pontos críticos: $x = 20$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 40 \Leftrightarrow x = 20$$

	0		20	$+\infty$
Sinal de f'		+	0	-
f	n.d.			

n.d. – não definida

Logo em $x = 20$ ocorre um máximo relativo

Como a função não está definida nos extremos do D_f , o máximo encontrado é o máximo absoluto.

• Resposta do problema:

Os números procurados são: $x = 20$ e $y = 40 - x = 40 - 20 = 20$.

Nota: o enunciado pede os números que maximizam o produto e não o produto máximo que seria $f(20) = 20(40 - 20) = 400$.

Problema:

Qual o ponto pertencente à hipérbole de equação $xy = 1$, de abcissa positiva, que está mais próximo da origem.

Resolução:

• Identificar as variáveis

Seja (x, y) o ponto da hipérbole procurado.

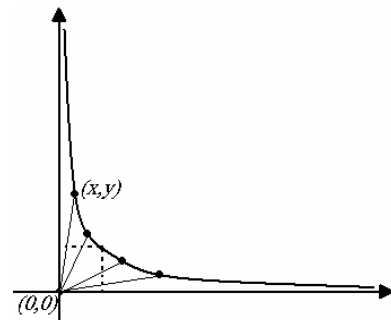
• Restrições das variáveis:

Sabe-se que:

- $x > 0$
- $xy = 1 \left(\Leftrightarrow y = \frac{1}{x} \right)$

• Esquema do problema:

Ideia: coloca-se um ponto sobre o ramo da hipérbole cujas abcissas são positivas e para cada um destes pontos determina-se o comprimento do segmento que une o ponto (x, y) à origem – este processo sugere qual deve ser a função a otimizar.



• Função a minimizar:

Pretende-se minimizar o comprimento do segmento que une os pontos $(0,0)$ e (x, y) :

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$$

Defina-se $d(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$

Nota: O mínimo da função d , caso exista, é atingido no mesmo ponto que o mínimo da função $f = d^2$.

Por simplicidade dos cálculos vamos trabalhar com a função f definida por:

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

- Determinar pontos críticos de f :

$$D_f =]0, +\infty[\quad (\text{note-se que } x > 0)$$

f é contínua no seu domínio porque é soma de funções racionais

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$$

Pontos críticos: $x = 1$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{2}{x^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 1 = 0 \wedge x^3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0 \wedge x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 1) \wedge x \neq 0$$

Note que $-1 \notin D_f$ pelo que não é ponto crítico.

	0		1	$+\infty$
Sinal de f'		-	0	+
f	n.d.			

n.d. – não definida

Logo em $x = 1$ ocorre um mínimo relativo.

Como a função não está definida nos extremos do D_f , o mínimo encontrado é o mínimo absoluto.

- Resposta do problema:

O ponto procurado da hipérbole tem coordenadas $(1,1)$ pois $y = \frac{1}{x}$.

Nota: o enunciado pede o ponto da hipérbole de abscissa positiva que está mais próximo da origem e não a distância da origem à hipérbole que seria $d(1) = \sqrt{1^2 + \frac{1}{1^2}} = \sqrt{2}$.

5.9 Exercícios

1. Determine, utilizando a definição, a derivada das seguintes funções:

a. $f(x) = \frac{1}{x+5}$ para $x = a$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$;

b. $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{se } x > 0 \\ \frac{x^2+2x}{2} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ para $x = 0$;

c. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 3}$ para $x = 2$.

2. Determine as primeiras derivadas das seguintes funções, utilizando as regras de derivação:

a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$

b. $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 3}$

c. $f(x) = e^{\sqrt{x+2}}$

d. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

e. $f(x) = \log_2 \sqrt{x}$

f. $f(x) = \cos(4x^2 + 3x)$

g. $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{x^2}$

3. Calcule $\frac{d^2 y}{dx^2}$ para:

a. $y = \operatorname{sen}^2 x$;

b. $y = \operatorname{arctg}(x^2)$;

c. $y = \frac{1}{2} x^2 e^x$ e verifique que satisfaz $y'' - 2y' + y = e^x$.

4. Determine as seguintes derivadas, utilizando a regra da cadeia:

a. $\frac{ds}{dt}(1)$ sabendo que $s = 3r^2 - 2\sqrt{r+1}$ e $r = t^3 + t^2 + 1$;

b. $\frac{dz}{dt}$ sabendo que $z = y^2 + \log y$ e $y = \operatorname{arcsen}(t)$.

5. Determine a equação da recta tangente e da recta normal às seguintes curvas, nos respectivos pontos indicados:

a. $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ no ponto $(-2, 5)$;

b. $2y = 1 + x^3 y$ para $x = 1$;

c. $y = e^{1-x^2}$ nos pontos de intersecção com a recta $y = 1$.

6. Considere a função definida por $f(x) = \sqrt{x}$. A recta tangente ao gráfico de f e paralela à recta de equação $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$ tem de equação:
 - a. $y = 2x$
 - b. $y = \frac{x+1}{2}$
 - c. $y = \frac{x}{2} + 1$
 - d. $y = -2x + 1$
7. Qual das seguintes funções admite a recta de equação $y = x$ como recta tangente nalgum ponto?
 - a. $f(x) = \sin(x)$
 - b. $f(x) = \cos(x)$
 - c. $f(x) = e^x$
 - d. $f(x) = \ln(x)$
8. Seja g a função real de variável real definida por $g(x) = 2^x - \sin^2(x)$. A tangente ao gráfico de g , no ponto de abcissa zero passa pelo ponto de coordenadas:
 - a. $(0; \ln 2)$;
 - b. $(\ln 2; 1 - \ln 2)$;
 - c. $(\ln 2; \ln 2)$;
 - d. $(1; 1 + \ln 2)$;
9. Diga justificando se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:
 - a. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} \cos(\pi - x), & x < 1 \\ e^{x-1}, & 1 \leq x \leq 2 \\ e(x-1), & x > 2 \end{cases}$, $\exists c \in]0, 1[$, tal que $f'(c) = 2$;
 - b. Sendo f a função da alínea anterior, $\exists c \in]1, 2[$, tal que $f'(c) = e - 1$;
10. Mostre que a equação: $x^2 - x \sin(x) - \cos(x) = 0$, tem duas e só duas soluções para $x \in [-\pi, \pi]$.
11. Determine os seguintes limites utilizando a regra de Cauchy (ou de L'Hôpital):
 - a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{e^x + e^{-x} - 2}$
 - b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$
 - c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
 - d. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(1-x)}$
 - e. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^2 + x)^x$
 - f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 9)^{1/x}$
 - g. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2/(2+\ln(x))}$
 - h. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin(x)}$
 - i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{e^{1/x}}$
12. Indique o valor lógico das seguintes afirmações, justificando a sua resposta:

- 12.1. Se f é descontínua para $x = a$ então f' tem pelo menos um assíntota vertical;
- 12.2. Se $f' = g'$ então $f = g$;
- 12.3. Se f é contínua então existe f' ;
- 12.4. Se f é derivável então f é contínua;
13. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, e seja g a função definida por $g(x) = f(x+1)$. A recta de equação $y = 2x + 4$ é a única assíntota do gráfico de f .
- Qual das seguintes é a única assíntota do gráfico de g ?
- a. $y = 2x - 4$; b. $y = 2x - 6$;
c. $y = 2x + 6$; d. $y = 2x + 4$;
14. O gráfico da função h , definida por $h(x) = 2x - 1 + \frac{1}{|x| - 1}$:
- a. Não tem assíptotas verticais. b. Tem exactamente duas assíptotas, uma vertical e uma oblíqua.
c. Tem três assíptotas, duas verticais d. Tem três assíptotas, duas verticais e uma oblíqua.
E uma horizontal.
15. Na figura encontra-se representada parte do gráfico de uma função h , de domínio $[0,5[\cup]5,+\infty[$. As rectas de equações $x=5$ e $y=3$ são as únicas assíptotas do gráfico de h .
- Qual o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{3 + e^{-x}}$
- a. $+\infty$; b. 0; c. 1; d. 5;
-
16. Considere-se uma função g , de domínio $[0,+\infty[$, contínua em todo o seu domínio.

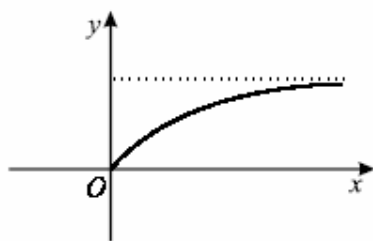
Sabe-se que:

- O gráfico de g tem uma única assíntota;

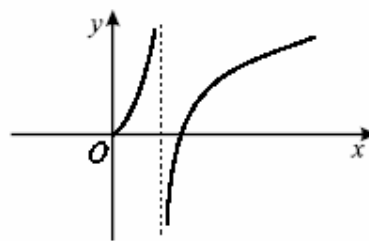
$$-\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2} ;$$

Quais dos seguintes gráficos poderão representar parte do gráfico da função g e, a tracejado, a sua assíntota?

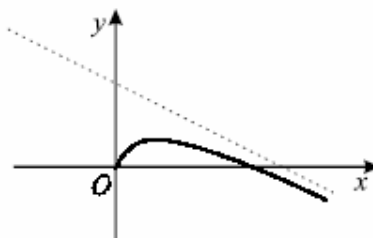
(A)



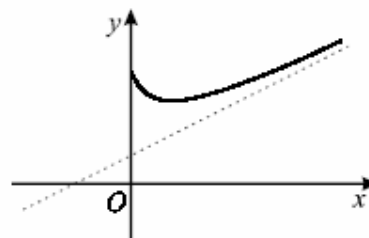
(B)



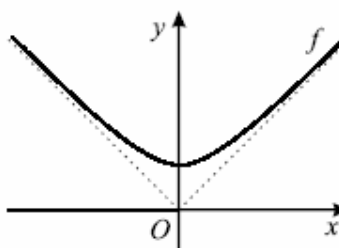
(C)



(D)

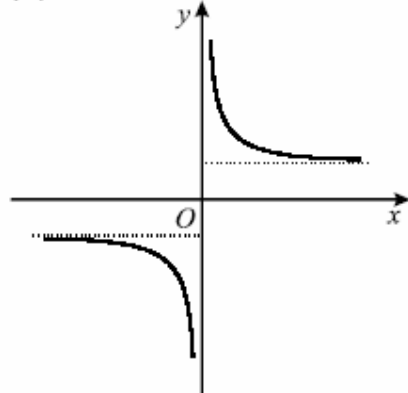


17. Na figura seguinte está representada parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$, contínua em todo o seu domínio. A bissetriz dos quadrantes pares e a bissetriz dos quadrantes ímpares são assíntotas do gráfico de f .

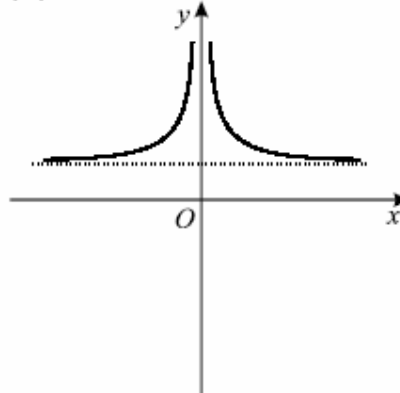


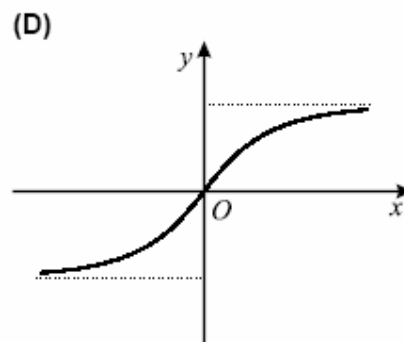
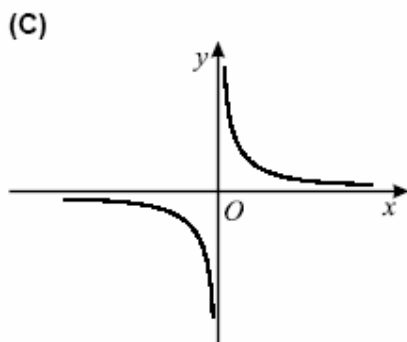
Indique dos gráficos seguintes poderá representar parte do gráfico da função g , definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

(A)



(B)

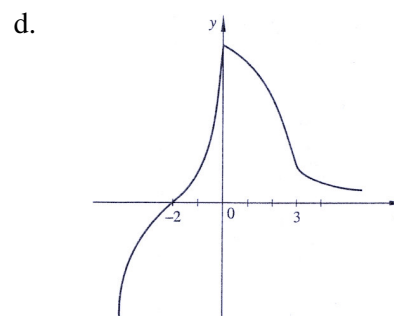
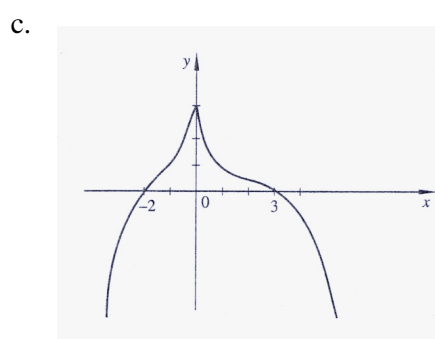
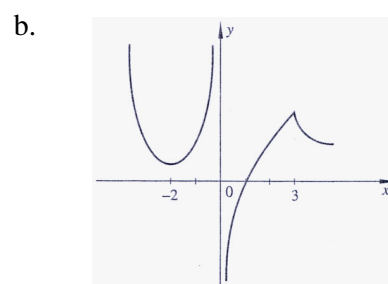
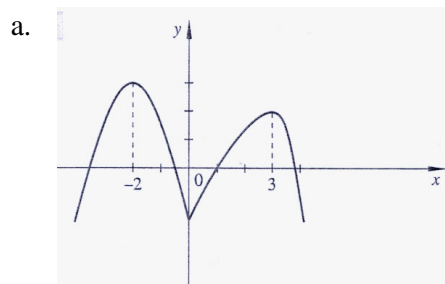




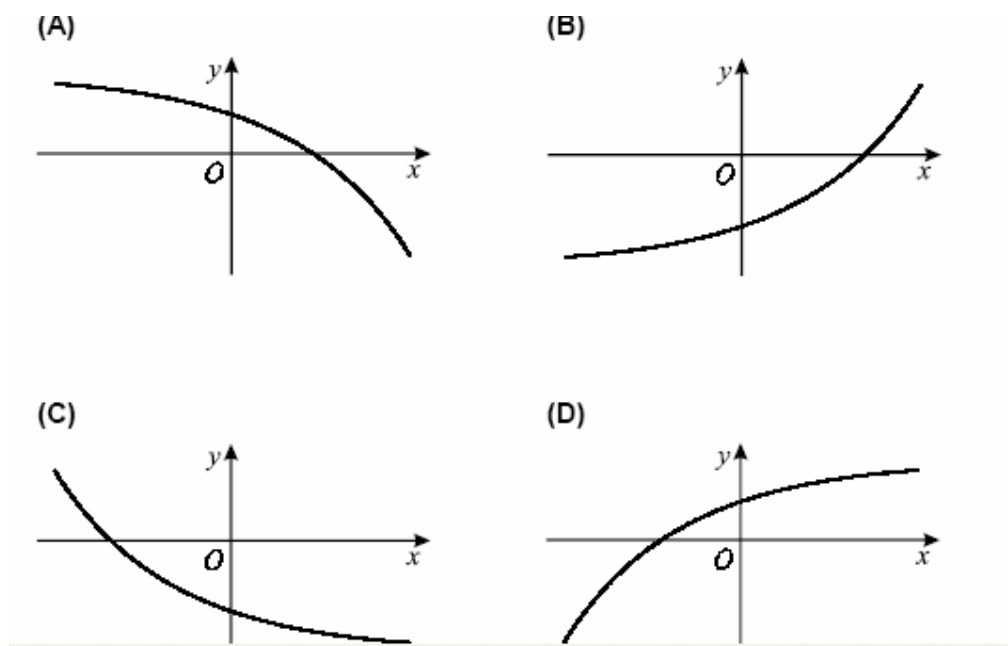
18. Considere uma função g , real de variável real, tal que:

		-2		0		3	
$g'(x) \times g''(x)$	-	0	+	n.d.	+	0	-

Qual das seguintes representações gráficas poderá representar a função g ?



19. Seja f , uma função de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que a primeira e a segunda derivada de f são negativas em $\mathbb{R}$. Quais dos seguintes gráficos poderá representar parte do gráfico de f ?



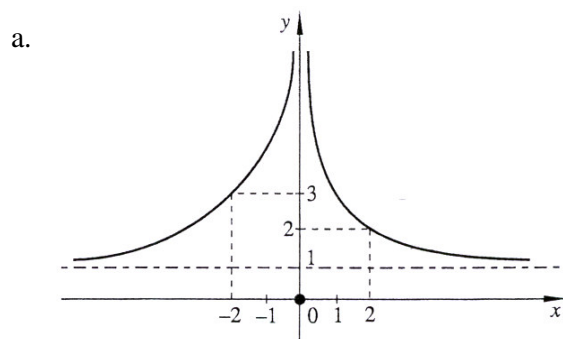
20. Seja f uma função polinomial definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, que tem um ponto de inflexão para $x=3$, um extremo relativo para $x=1$ e um zero igual a 1. Quais os valores das constantes a , b e c ?

- a. $a = -9$; $b = 15$; $c = 1$ b. $a = -9$; $b = 15$; $c = -7$
 c. $a = 9$; $b = 15$; $c = -7$ d. $a = 9$; $b = -15$; $c = 1$

21. De uma função f sabe-se que:

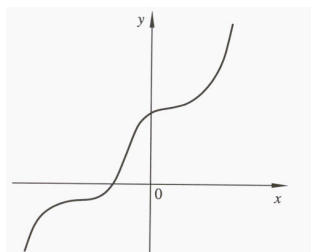
- f é par;
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$;
- $f(0) = 0$.

Então, f pode ser definida por:

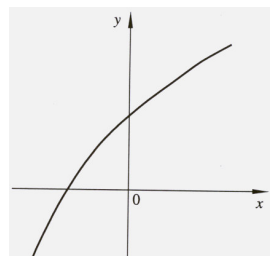


b. $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$

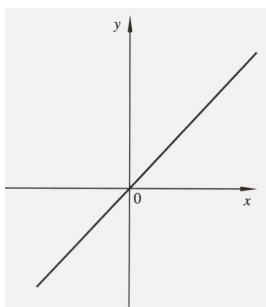
a.



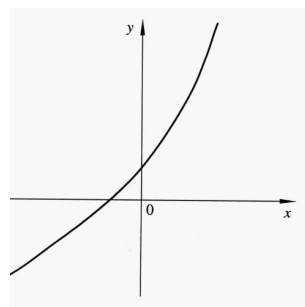
b.



c.



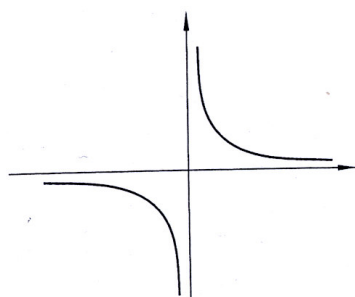
d.



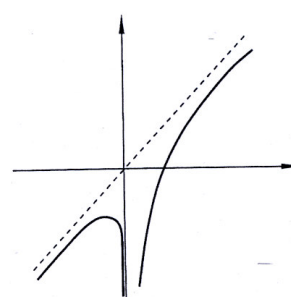
25. Considere o conjunto $A =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ e sejam $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e $f': A \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis. Tendo em conta a tabela seguinte, indique qual dos gráficos representa a função f ?

		0	
f'	-		+
f''			

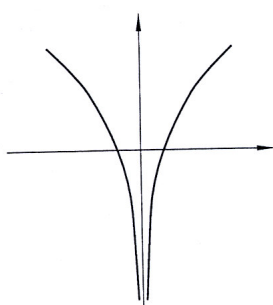
a.



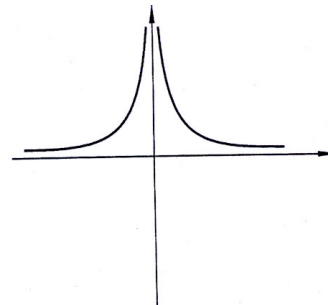
b.



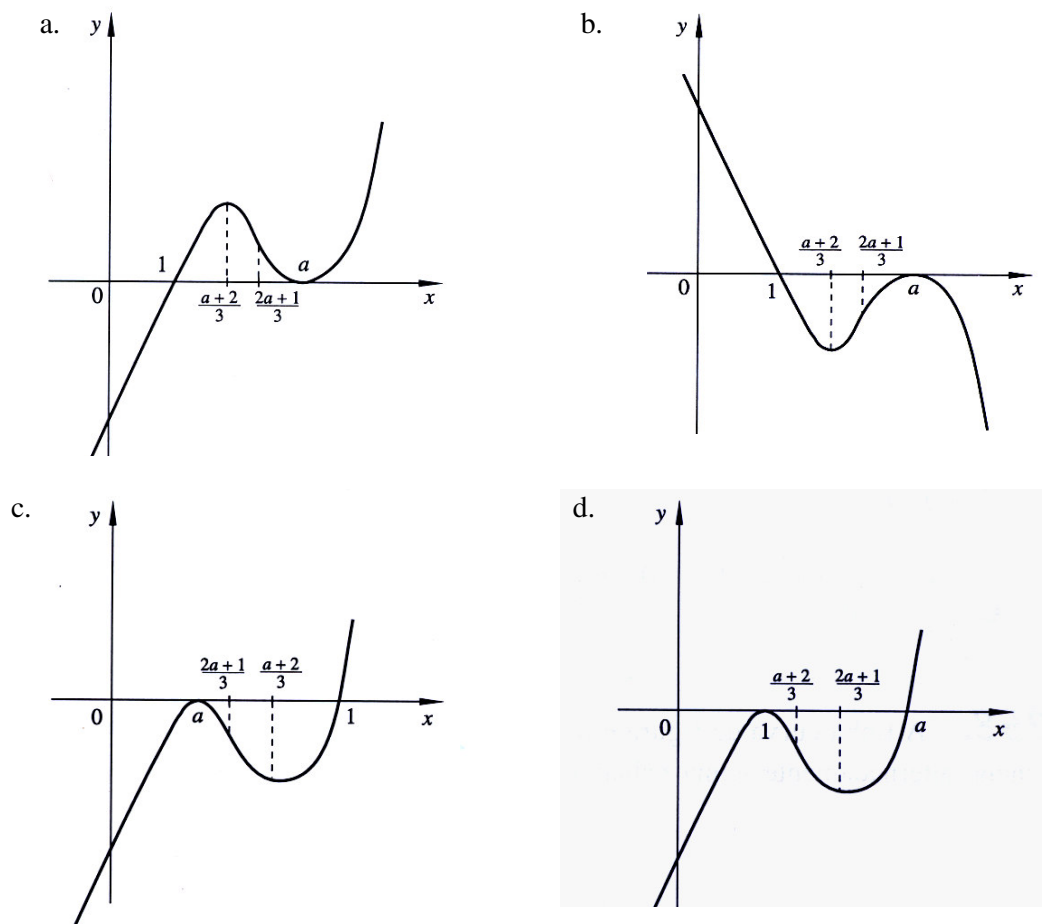
c.



d.

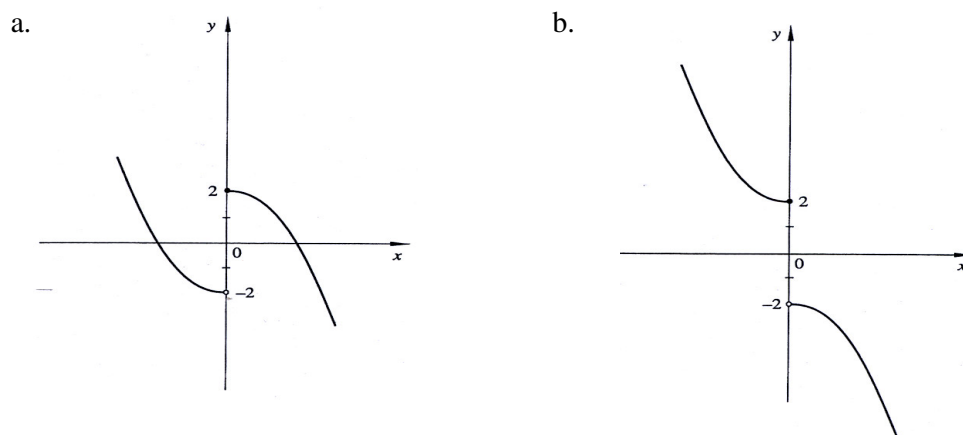


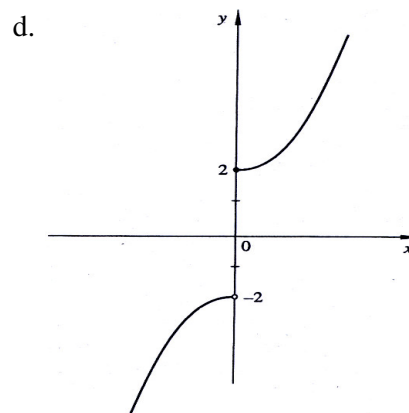
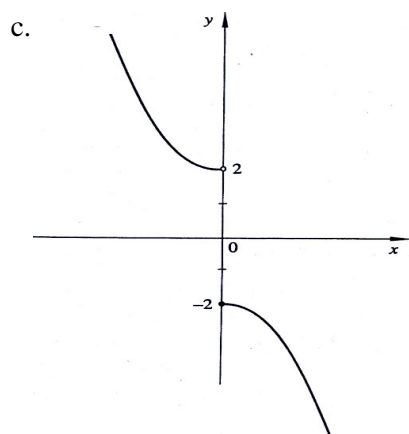
26. Seja $F : x \rightarrow (x-1)(x-a)^2$ com $a > 1$. Verifique se alguma das representações gráficas abaixo indicadas é a representação da função F , e em caso afirmativo indique qual.



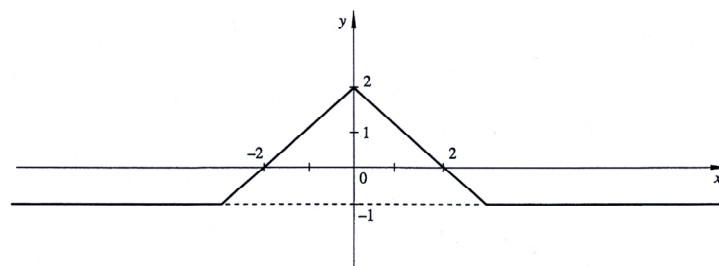
27. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$, $g(0) = 2$

e a função $|g|$ é diferenciável em $\mathbb{R}$. A representação gráfica de g pode ser:

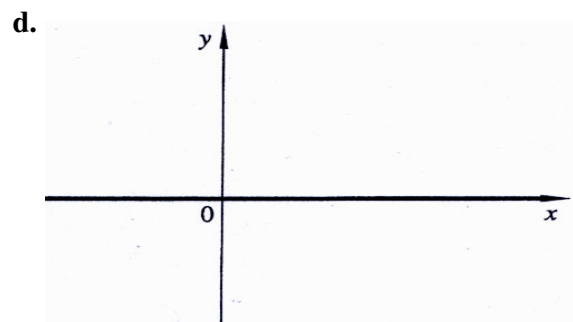
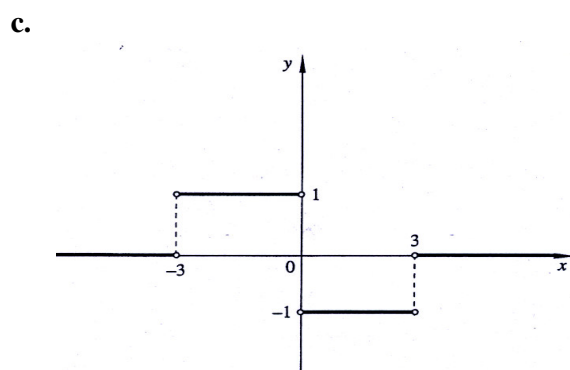
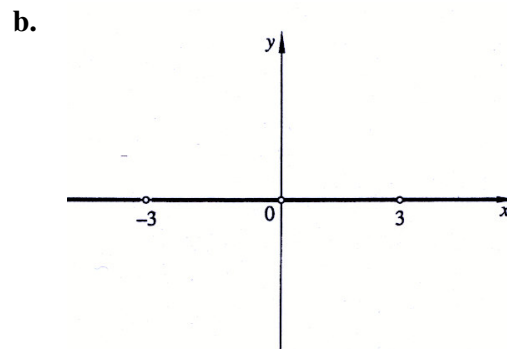
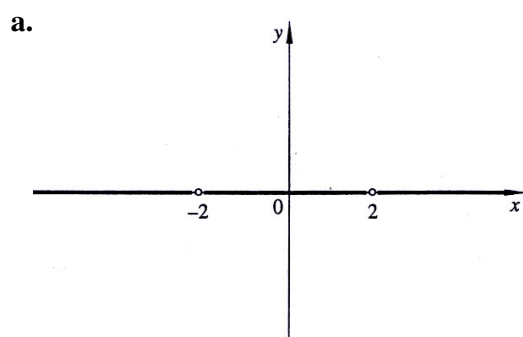




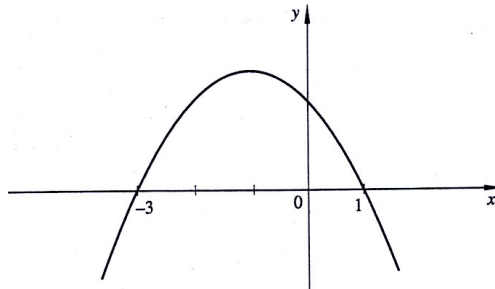
28. Considere a função real de variável real f cuja representação gráfica é:



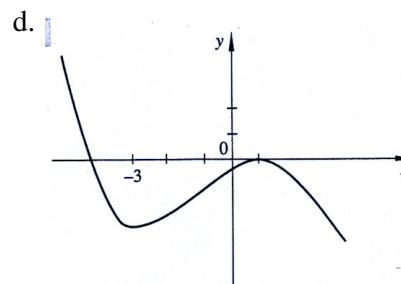
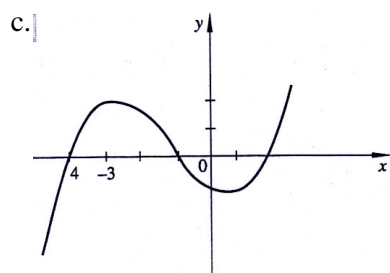
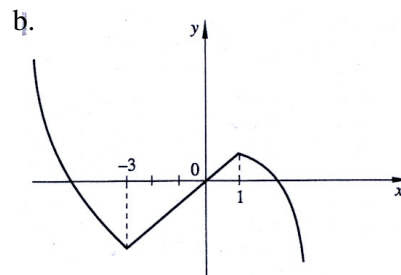
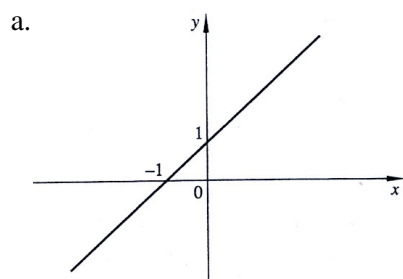
Qual dos seguintes gráficos representa $f''(x)$?



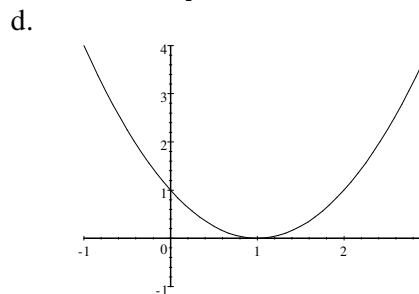
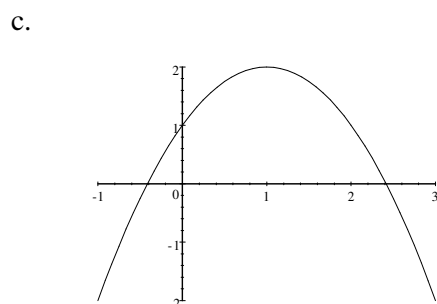
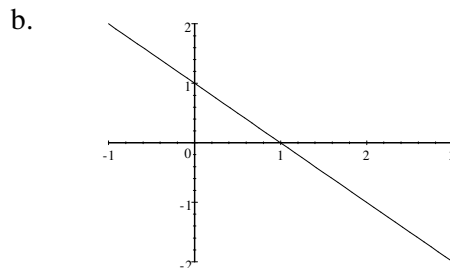
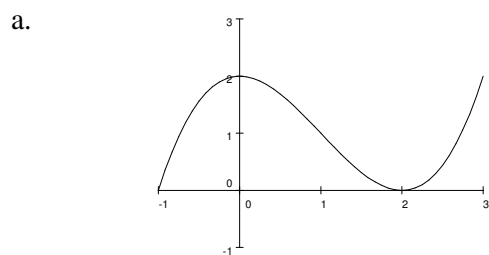
29. Sabendo que o gráfico da função derivada f' é:



Qual dos gráficos seguintes poderá representar a função f ?



30. Seja g uma função cujo gráfico tem um ponto de inflexão de abscissa $x = 1$. Indique qual dos seguintes gráficos pode representar a segunda derivada de g , g'' .



31. Considere a função f , real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-1/x} & , x < 0 \\ \frac{1-x}{e^x} & , x \geq 0 \end{cases}$$

- Faça o estudo da função f , indicando: Domínio, zeros, assíntotas, pontos críticos, intervalos de monotonia, pontos de inflexão e concavidades;
- Faça um esboço da função f .

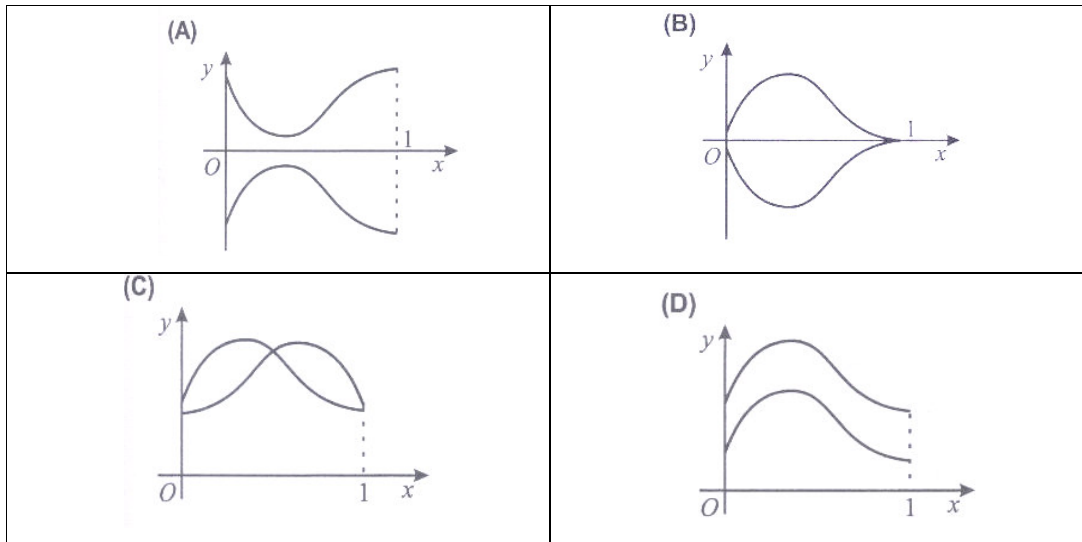
32. Considere a função definida por $f(x) = x e^{-x^2/2}$ para $x \geq 0$.

- Determine os pontos críticos e os intervalos de monotonia da função f .
- Determine as concavidades e os pontos de inflexão da função f .

33. Sejam f e g duas funções reais de variável real, com domínio $[0, 1]$. Sabe-se que

$$f'(x) = g'(x), \quad \forall x \in [0, 1]$$

Em qual das figuras podem estar representados os gráficos de f e g ?



34. Seja f uma função real de variável real, definida e contínua em $\left[-\frac{2}{\pi}, \infty\right]$ por

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-x} + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ k \arccos\left(-\frac{\pi x}{2}\right) & \text{se } -\frac{2}{\pi} \leq x < 0 \end{cases}$$

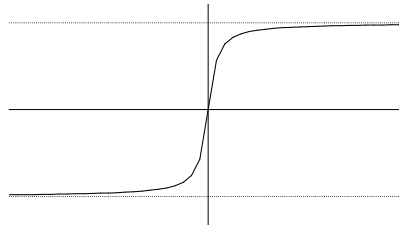
Qual das seguintes equações é uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = 1$.

- $y = \frac{2}{e}x + 1 - \frac{1}{e}$
- $y = 1 + \frac{1}{e}$
- $y = -\frac{1}{e}(x+1)$
- $y = 0$

35. Considere a função g definida por $g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x \neq 1 \\ k, & x = 1 \end{cases}$.
- Estude as assíntotas do gráfico de g .
 - Determine o valor de k de modo que g seja contínua à esquerda em $x = 1$.
 - Análise a existência de $g'(1)$.
 - Mostre que $g''(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}}(2x-1)}{(x-1)^4}$.
 - Estude g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

36. Considere a função g definida por $g(x) = \ln(2e^x - 1)$.
- Mostre que o domínio de g é $]-\ln 2, \infty[$.
 - Mostre que $g''(x) = \frac{-2e^x}{(2e^x - 1)^2}$.
 - Estude o sentido da concavidade do gráfico de g .
 - Investigue que assíntotas existem para o gráfico de g .

37. A figura seguinte é parte da representação gráfica da função $\arctg(x)$.



Seja $k \in \mathbb{R}$, considere a função f definida por $f(x) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$.

- Mostre que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Determine o valor de k de modo que f seja contínua à direita em $x = 0$.
- Análise a existência de $f'(0)$.
- Mostre que $f'(x) = \frac{-1}{x^2 + 1}$ e $f''(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$, para $x \neq 0$.
- Determine as assíntotas ao gráfico de $f'(x)$.
- Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = 1$.
- Considere $k = -\pi/2$. Sobre o gráfico de f determine: intervalos de monotonia; extremos relativos; sentido das concavidades e pontos de inflexão.

38. Considere a função real de variável real:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)\ln(x+1) & \text{se } x > -1 \\ e^{x^2+5x+6} - 1 & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

- Estude a continuidade de f .
- Averigüe se f é diferenciável em $x = -1$.
- Mostre que o Teorema de Rolle se aplica à função f no intervalo $[-2, -3]$ e determine o ponto $c \in]-2, -3[$ tal que $f'(c) = 0$.

39. Considere a função real de variável real:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)\ln(x+1) & \text{se } x > -1 \\ e^{x^2+5x+6} - 1 & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

- Estude a diferenciabilidade de f no ponto $x = 0$;
- Note que $f(-1) = 0 = f(1)$. O Teorema de Rolle permite assegurar a existência de pelo menos um zero no intervalo $] -1, 1[$? Justifique.

40. Seja $k \in \mathbb{R}$, uma constante, considere a função real de variável real definida por

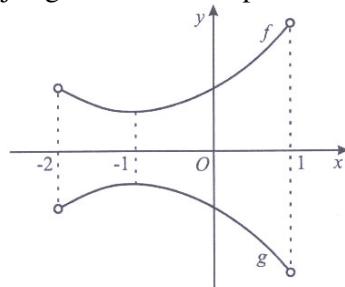
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ k & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, justificando detalhadamente.
- Determine o valor de k para o qual f é contínua.
- Calcule $f'(x)$, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Determine $f'(0)$.
- Comente a afirmação: “*Toda a função derivável tem derivada contínua*”.
- Considere a função g definida por

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2}, \quad x \in \left[\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi} \right] \setminus \{0\}.$$

- Determine a imagem, ou contradomínio, da função g , isto é, D'_g .
- Caracterize $g^{-1}(x)$, indicando o seu domínio, contradomínio e expressão analítica.

41. Indique o valor lógico das seguintes afirmações **justificando** devidamente a sua opção.
- Seja f uma função contínua no intervalo $[-1,1]$, tal que $f(1) = f(-1)$, então existe $c \in [-1,1]$ tal que $f'(c) = 0$.
 - Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, se f é uma função contínua com domínio $\mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = b$, então podemos concluir que $f'(a) = b$.
 - Se uma função f verifica $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ então f tem uma assíntota horizontal.
 - Toda a função derivável tem derivada contínua.
 - A derivada da função $g(x) = \sin(x) \ln(x)$ admite pelo menos um zero no intervalo $[1, \pi]$.
 - Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não constante, contínua e derivável. Se $f(a) = f(b)$ então f tem pelo menos um extremo.
 - Se $f'(x) \neq 0$ em todo o seu domínio, então f não tem extremos.
 - Uma função contínua não pode ter assíntotas verticais.
 - Sejam f e g duas funções cujos gráficos estão representados na figura seguinte,



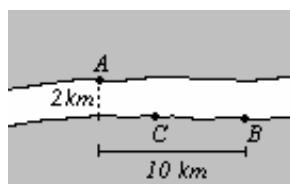
então podemos concluir que o conjunto solução de $f'(x) < g'(x)$ é $] -2, -1[$.

Problemas de otimização:

42. Seja a um número positivo e sejam x e y números positivos que verificam a condição: $x^2 + y^2 = a^2$. Prove que de entre todos os números x e y que verificam a condição dada, a sua soma é máxima quando $x = y$.
43. Pretende-se cortar um arame de 40 cm de comprimento em duas partes, com uma delas construir um quadrado e com a outra delas construir uma circunferência, de modo que a soma das áreas das superfícies limitadas por cada uma das duas figuras seja máxima. Como deve ser cortado o arame?

44. Considere a Elipse de equação de equação: $2x^2 + y^2 = 2$.
- Prove que a área dos rectângulos inscritos na Elipse, com os lados paralelos aos eixos de simetria da elipse é dada por $A(x) = 4x\sqrt{2-x^2}$, sendo x a abcissa do vértice do rectângulo que pertence ao 1º quadrante.
 - De entre a família de rectângulos mencionados na alínea anterior, determine as dimensões dos rectângulos que têm área máxima
45. Determine o raio da base e a altura de um cilindro de volume máximo que pode ser inscrito numa superfície esférica de raio 10 cm.
46. Uma folha de papel contém 400 cm^2 de texto impresso. Sabe-se, ainda, que as margens inferiores e laterais medem 2 cm cada e a margem superior mede 3 cm. Determine as dimensões da folha que levam a uma economia de papel.
47. Pretende cortar-se uma placa laminar rectangular de um tronco de madeira de secção circular de raio $\sqrt{2}$ m. Quais as dimensões da placa de forma a que a sua área seja máxima?
48. Qual o ponto pertencente à hipérbole de equação $xy = 1$, de abcissa positiva, que está mais próximo da origem?
49. Formule matematicamente o seguinte problema, identificando:
- as variáveis,
 - a função a otimizar,
 - e explique como obter a localização do ponto C, **sem resolver integralmente o problema.**

“De acordo com a figura seguinte,



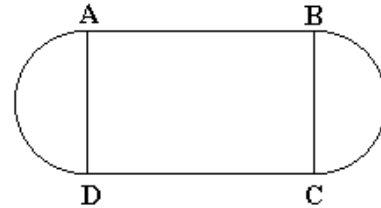
pretende-se construir um gasoduto de um local A para um local B que se encontram em margens opostas de um rio.

O gasoduto irá passar por baixo do rio, ligando o ponto A (numa margem. ao ponto C (na margem oposta., e seguirá pela margem do rio ligando C a B, tal como é ilustrado na figura.

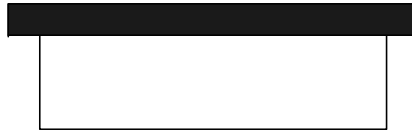
Se o custo da construção do gasoduto é 5 vezes mais caro quando passa por baixo do rio, determine a localização do ponto C de modo a minimizar os custos de construção do canal.”

50. A seguinte figura representa uma superfície constituída por um rectângulo [ABCD] e dois semi-círculos de diâmetro [AD] e [BC].

Sabendo que a área do rectângulo é de $200m^2$, determine o perímetro mínimo que a figura pode ter.



51. Considere um campo aberto, de forma rectangular, que na parte norte está ladeado por um muro (veja a figura).



O dono desse campo tem 500 metros de arame e com esse arame pretende construir uma vedação rectangular. Sendo o muro um dos lados da vedação, qual é a área máxima que ele consegue vedar?

52. Pretende-se construir um depósito, com a forma de um paralelepípedo de base quadrada, com capacidade para $500m^3$, de modo que o seu custo seja mínimo. O preço, por metro quadrado, da base e do topo do depósito é de €50, enquanto que o das paredes é de €35. Que dimensões deverá ter o depósito.

53. Pretende-se vedar um terreno rectangular. Em dois lados opostos (de comprimento a metros) será usada uma vedação com custo de 4 €/metro e a vedação a usar nos outros dois lados (de comprimento b metros) custa 3 €/metro (de acordo com a figura). Quais serão as dimensões do terreno de maior área que se conseguirá vedar gastando-se 1200 €.

