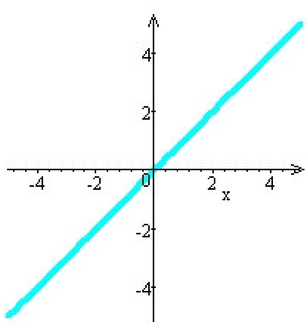
Capítulo IV

Funções Contínuas

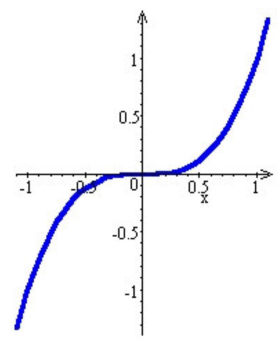
4.1 Noção de Continuidade

Uma ideia muito básica de função contínua é a de que o seu gráfico pode ser traçado ***sem levantar o lápis do papel***; se houver necessidade de interromper o traço do gráfico para o continuar noutro local então é porque ocorre uma "descontinuidade".

De acordo com esta ideia, observando as figuras seguintes, vemos que f e g são contínuas,

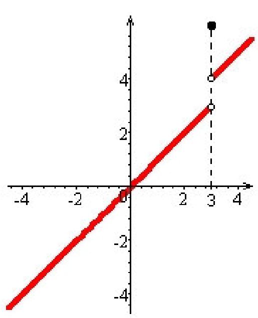


$f(x) = x$

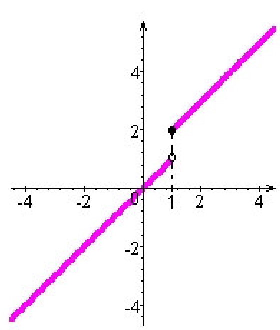


$g(x) = x^3$

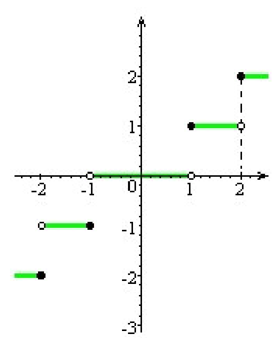
enquanto que as funções h, j e k são descontínuas (respectivamente em $x = 1$; $x = 3$ e $x \in Z \setminus \{0\}$)



$j(x) = \begin{cases} x & se \quad x < 3 \\ 6 & se \quad x = 3 \\ x+1 & se \quad x > 3 \end{cases}$

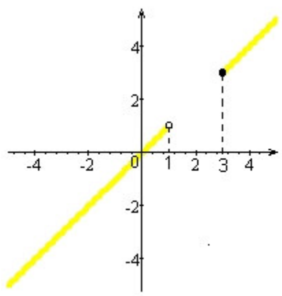


$h(x) = \begin{cases} x & se \quad x < 1 \\ x+1 & se \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

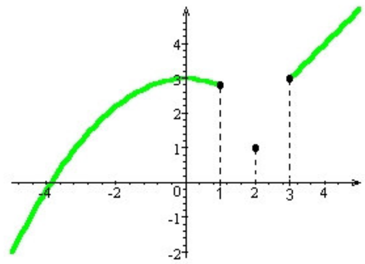


$k(x) = Trunc(x)$

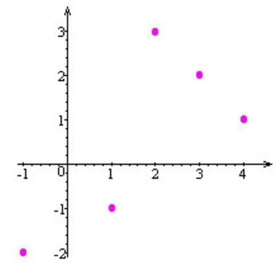
E quanto às funções m, n e l?



$$l(x) = \begin{cases} x & se \quad x < 1 \\ x & se \quad x \geqslant 3 \end{cases}$$



$$m(x) = \begin{cases} -\frac{1}{5}x^2 + 3 & se \quad x \leqslant 1 \\ 1 & se \quad x = 2 \\ x & se \quad x \geqslant 3 \end{cases}$$



$$n(x) = \begin{cases} -2 & se \quad x = -1 \\ -1 & se \quad x = 1 \\ 3 & se \quad x = 2 \\ 2 & se \quad x = 3 \\ 1 & se \quad x = 4 \end{cases}$$

O que acontece nestas três funções é que as possíveis descontinuidades encontram-se nos extremos dos respectivos domínios.

Pergunta: *Serão estas três funções descontínuas?*
Resposta: *Não.*

Como temos "falado", o conceito de continuidade num ponto $x = a$ está relacionado com o comportamento da função numa vizinhança de $f(a)$ e em $f(a)$. Isto recorda-nos o conceito de limite, assim:

Definição:

1. *Se $a \in D_f$ e f está definida numa vizinhança de $x = a$, diz-se que f* ***é contínua em*** *$x = a$ quando e só quando*
   - *existe $\lim_{x \to a} f(x)$ e*
   - $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

2. *Se $a \in D_f$ e f não está definida numa vizinhança de $x = a$ (isto é, a é um ponto isolado) então f é contínua em $x = a$.*

3. *Se* $a \in D_f$ *e* f *está definida numa vizinhança de* $x = a$, *diz-se que* f ***é descontínua em*** $x = a$ *se*

- *não existe* $\lim_{x \to a} f(x)$ *(isto é, os limites laterais são diferentes, ou são infinitos, ou simplesmente não existem) ou*
- $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

4. *Diz-se que* f *é uma* ***função contínua*** *se é contínua para todo ponto* $a \in D_f$.

A definição formal de continuidade é a seguinte:

Seja $f : D_f \subset IR \to IR$ *e* $a \in D_f$.

Diz-se que f *é uma* ***função contínua no ponto*** a, *se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Isto quer dizer que:

f *é uma* ***função contínua no ponto*** a se

– **para qualquer** intervalo centrado em $f(a)$ do tipo $]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$ (relativamente às ordenadas),

– existe pelo menos um intervalo da forma $]a - \delta, a + \delta[$, onde a imagem de qualquer ponto pertence ao intervalo $]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$.

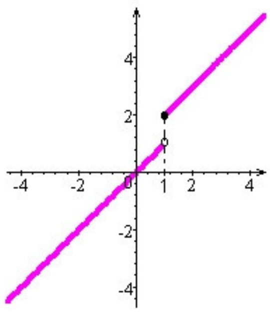
Compare esta definição com a de limite. Estas definições são parecidas, o que altera é que em vez de L temos $f(a)$, e em vez de $]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}$ temos $]a - \delta, a + \delta[$.

Definição:

Se $a \in D_f$, f *diz-se* ***contínua à direita de*** $x = a$ *se* $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

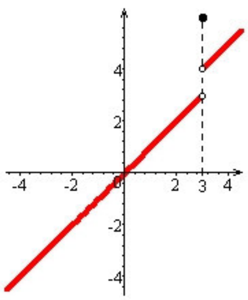
Se $a \in D_f$, f *diz-se* ***contínua à esquerda de*** $x = a$ *se* $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Exemplos:



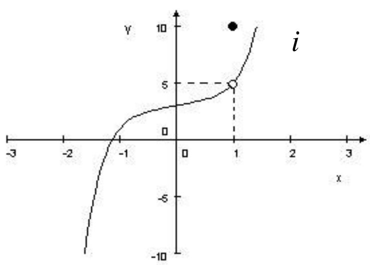
$$h(x)=\begin{cases} x & , x<1 \\ x+1 & , x\geq 1 \end{cases}$$

h não é contínua em $x=1$ porque $\lim_{x\to 1^-} h(x)=1\neq 2=\lim_{x\to 1^+} h(x)$.
(Pode dizer-se que é contínua à direita em $x=1$).

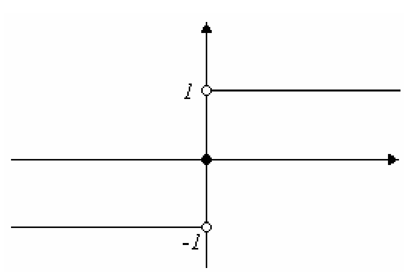


$$j(x)=\begin{cases} x & , x<3 \\ 6 & , x=3 \\ x+1 & , x>3 \end{cases}$$

j não é contínua em $x=3$ pois $\lim_{x\to 3^-} j(x)=3\neq 4=\lim_{x\to 3^+} j(x)$ (j não é continua à esquerda nem à direita de $x=3$)

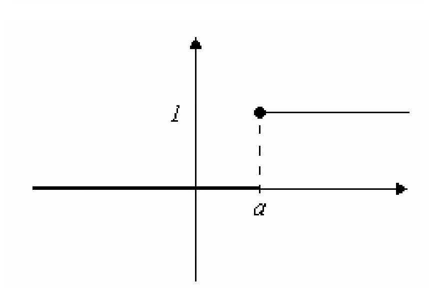


i não é contínua em $x=1$ pois $\lim_{x\to 1} i(x)=5\neq 10=i(1)$

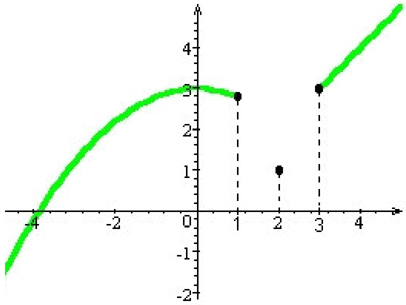


A **função Sinal** definida por $Sng(x)=\begin{cases} 1 & , x>0 \\ 0 & , x=0 \\ -1 & , x<0 \end{cases}$

não é uma função contínua em $x=0$ pois $\lim_{x\to 0^-} Sng(x)=-1\neq 1=\lim_{x\to 0^+} Sng(x)$.

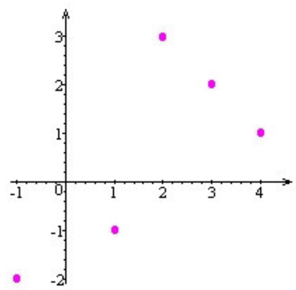


A **função Heaviside** definida por $H(x-a)=\begin{cases} 1 & , x\geq a \\ 0 & , x<a \end{cases}$ não é uma função contínua em $x=a$ pois $\lim_{x\to a^-} H(x-a)=0\neq 1=\lim_{x\to a^+} H(x-a)$, no entanto é continua à direita de $x=a$

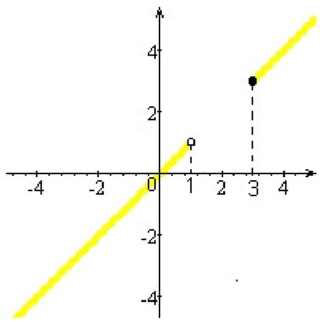


$$m(x)=\begin{cases} \dfrac{-x^2}{3}+3 & , x\le 1 \\ 1 & , x=2 \\ x & , x\ge 3 \end{cases}$$

- m é contínua em $x=1$ e $x=3$ pois $\lim_{x\to 1} m(x) = \lim_{x\to 1^-} m(x) = m(1)$ e $\lim_{x\to 3} m(x) = \lim_{x\to 3^+} m(x) = m(3)$;
- m é contínua em $x=2$ pois é um ponto isolado.

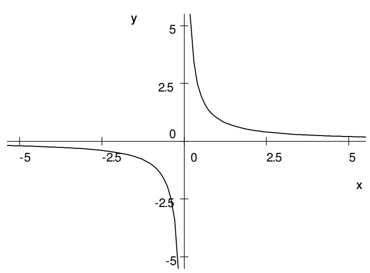


$$n(x)=\begin{cases} -2 & , x=-1 \\ -1 & , x=1 \\ 3 & , x=2 \\ 2 & , x=3 \\ 1 & , x=4 \end{cases}$$ é contínua pois todos os pontos do seu domínio $D_n=\{-1,1,2,3,4\}$ são pontos isolados.

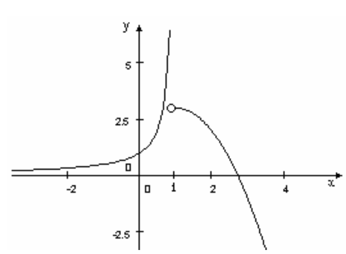


$$l(x)=\begin{cases} x & , x<1 \\ x & , x\ge 3 \end{cases}$$

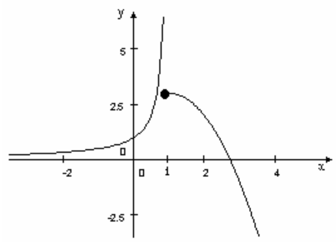
- não tem sentido analisar a continuidade de l em $x=1$ pois $1\notin D_l$
- l é contínua em $x=3$ pois $\lim_{x\to 3} l(x) = \lim_{x\to 3^+} l(x) = 3 = l(3)$.



A função $f(x)=\dfrac{1}{x}$ é contínua (em todo o seu domínio).
O ponto onde poderia surgir dúvida era $x=0$ mas $x=0\notin D_f$.



A função $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & x<1 \\ 3-(x-1)^2 & x>1 \end{cases}$ é contínua (em todo o seu domínio).
Onde poderia haver dúvidas era em $x=1$ mas $1\notin D_f$.



A função $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & x<1 \\ 3-(x-1)^2 & x\geq 1 \end{cases}$ não é contínua (em $x=1$), porque $1\in D_f$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1-x}=+\infty$.

Nota:

Ao contrário da definição de limite, só tem sentido falar em continuidade de uma função f em $x=a$ se $a\in D_f$, e interessa o que se passa numa vizinhança do ponto a (incluindo a) e também a imagem do ponto a.

4.2 Propriedades das funções contínuas

Teorema:

1. *Sejam f e g duas funções contínuas em a. Então as funções $f\pm g$; cf ($c\in IR$); fg; $\dfrac{f}{g}$ ($g(a)\neq 0$) também são funções contínuas em a.*
2. *Se g é continua em a e f é contínua em $g(a)$, então $f\circ g$ é contínua em a.*
3. *Se $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ e se f é contínua em b então*

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

(Exemplos: $\lim\limits_{x\to a} e^{f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ e $\lim\limits_{x\to a} sen(f(x))=sen\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$)

Proposição:

As funções polinomiais, racionais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas directas e trigonométricas inversas <u>são funções contínuas</u>.

Exercício:

Mostre que a função f definida por $f(x)=\begin{cases} arcsen\left(\frac{x}{2}\right) & se\ \ -2\leq x\leq 0 \\ \frac{x^2+1}{\ln x} & se\ \ x>0 \end{cases}$ é contínua.

Resolução:

O domínio de f é $\left[-2,+\infty\right[\backslash\{1\}$ (*verifique*)!

- Se $x\in\left[-2,0\right[$ a função é definida por $arcsen\left(\frac{x}{2}\right)$, esta é uma função contínua **pois** é composta da função inversa trigonométrica $arcsen(x)$ com a função polinomial $\frac{x}{2}$, ambas funções contínuas.
- Se $x\in\left]0,+\infty\right[\backslash\{1\}$ a função é definida por $\frac{x^2+1}{\ln(x)}$, esta é uma função contínua **pois** é quociente da função polinomial x^2+1 com a função logaritmo $\ln(x)$ que pela proposição anterior sabemos tratar-se de funções contínuas.

- Falta analisar a continuidade em $x=0$:
  - $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} arcsen\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{\ln(x)} = \frac{0}{-\infty} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$;
  - $f(0)=arcsen(0)=0$

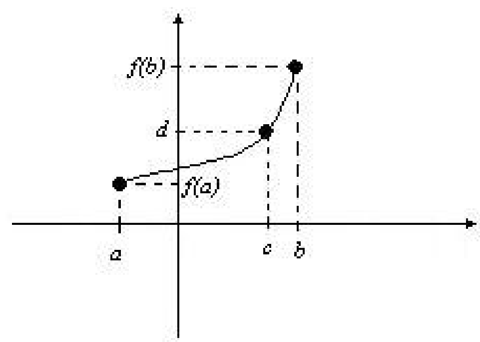
  Logo f é contínua em $x=0$ pois verifica-se $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

4.3 Teoremas fundamentais sobre continuidade

Teorema dos valores intermédios ou de Bolzano:

Seja f uma função <u>contínua</u> no <u>intervalo fechado</u> $[a,b]$.

Se d está entre $f(a)$ e $f(b)$ então existe $c \in \left]a,b\right[$ tal que $f(c)=d$.



Note que a condição de continuidade é fulcral neste resultado pois caso não se verifique a conclusão do teorema pode não ser válida.

<u>*Exemplo:*</u>

Seja f definida no intervalo fechado $[0,2]$ tal que $f(x)=\begin{cases} x & se \quad 0 \le x < 1 \\ 2 & se \quad x=1 \\ x+2 & se \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$

Não existe nenhum elemento $c \in [0,2]$ tal que $f(c)=\frac{3}{2}$.

O intervalo onde esta função está definida é fechado mas a função <u>não é contínua</u> no ponto $x=1$.

Este teorema tem particular interesse na obtenção de zeros (raízes) de funções reais.

Corolário:

Seja f uma função <u>contínua</u> no <u>intervalo fechado</u> $[a,b]$.

*Se $f(a).f(b)<0$ então existe **pelo menos** um zero no intervalo $c \in \left]a,b\right[$, isto é,*

$\exists \quad c \in \left]a,b\right[\quad : \quad f(c)=0$

Exercício:

Mostre que a função $f(x)=x^4-3x^3+5$ tem pelo menos um zero intervalo $]-1,2[$.

Resolução:

Como f é uma função polinomial é contínua em IR, e em particular é contínua no intervalo fechado $[-1,2]$.

Além disso, $f(-1)=9$ e $f(2)=-3$.

Como $f(-1).f(2)<0$, o corolário afirma que existe pelo menos um zero no intervalo $[-1,2]$.

Como $f(-1)\neq 0$ e $f(2)\neq 0$, podemos garantir a existência de um zero da função f no intervalo aberto $]-1,2[$.

Exercício:

Mostre, utilizando o teorema de Bolzano (ou o seu corolário) que a equação

$$x^3-3x^2+2x+1=0$$

tem pelo menos uma raiz real.

Resolução:

Defina-se $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ no intervalo fechado $[-1,0]$.

f é uma função polinomial, logo é contínua em IR e em particular no subconjunto $[-1,0]$.

Como $f(-1)\cdot f(0)=-5\times 1<0$ o corolário anterior afirma que existe pelo menos um $c\in[-1,0]$: $f(c)=0$, ou seja, a equação $x^3-3x^2+2x+1=0$, no intervalo $[-1,0]$ tem pelo menos a solução $x=c$, ficando desde já provada a existência de pelo menos uma raiz real.

Teorema (de Bolzano):

Seja $I\subset IR$ um intervalo qualquer e $f:I\to IR$, uma função <u>contínua</u> num <u>intervalo</u> I. Então $f(I)$, isto é, a imagem do intervalo $I\subset IR$, é ainda um intervalo (não necessariamente do mesmo tipo de $I\subset IR$).

Exemplo: $f : I = [-\pi/2, \pi/2] \to IR$ tal que $f(x) = sen(x)$, é contínua e $f(I) = [-1,1]$;

$g : I =]-2,2[\to IR$ tal que $f(x) = |x|$, é contínua e $f(I) = [0,2[$.

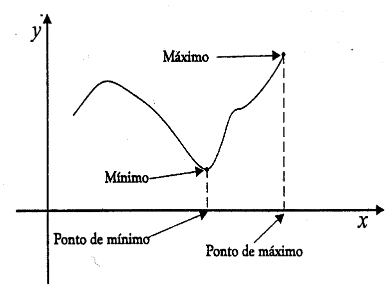
Teoremas:

- *Seja $I \subset IR$ um intervalo qualquer e $f : I \to IR$, uma função contínua e injectiva. Então f é estritamente monótona.*
- *Seja $I \subset IR$ um intervalo qualquer e $f : I \to IR$, uma função monotona no intervalo I ; se $f(I)$ é um intervalo então f é contínua.*

Teorema (continuidade da função inversa):

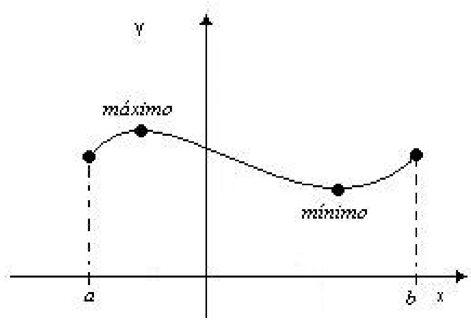
Seja f é uma função contínua e injectiva definida num intervalo $I \subset IR$. Então f^{-1} é contínua.

Como foi definido atrás, seja $f : D \to IR$ e $c \in D_f$, diz-se que $f(c)$ é um máximo (absoluto) de f se $f(x) \le f(c) \quad \forall x \in D$, e, diz-se que $f(c)$ é um mínimo (absoluto) de f se $f(c) \le f(x) \quad \forall x \in D$.



Teorema de Weierstrass:

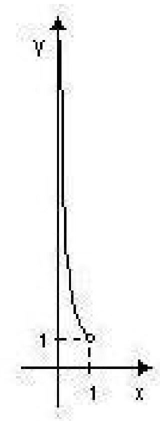
Se f é uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$ então f atinge o valor máximo e o valor mínimo.



É claro que se f é uma função constante, $f(x) = c$ definida no intervalo $[a,b]$ então é óbvio que a constante c é o valor máximo e mínimo de f.

Nota:

Se alguma das condições do teorema falhar a conclusão do teorema poderá não se verificar.



Exemplos:

1. Seja $f(x)=\dfrac{1}{x}$ definida no intervalo aberto $]0,1[$.

Esta função não tem máximo nem mínimo. Repare que não se pode aplicar o teorema de Weierstrass porque o intervalo onde esta função está definida não é fechado (embora f seja contínua pois é quociente de funções polinomiais).

2. Seja agora f definida no intervalo fechado $[0,1]$ tal que

$$f(x)=\begin{cases} 1 & se \quad x=0 \\ 2x & se \quad 0<x<1 \\ 1 & se \quad x=1 \end{cases}$$

A função f não é contínua nos pontos $x=0$ e $x=1$, e portanto não se pode aplicar o teorema de Weierstrass (relembrar que nos pontos extremos do domínio só a continuidade lateral deve ser verificada). É fácil ver que esta função também não tem máximo nem mínimo.

4.4. Exercícios

1. Indique o valor lógico das seguintes afirmações, justificando devidamente a sua opção.
   a. Se f é uma função contínua então $D_f = IR$;
   b. Se $D_f = IR$ então f é uma função contínua;
   c. Se $D_f = IR - \{1\}$ então f não é uma função contínua;
   d. Se f é uma função contínua então f é injectiva;
   e. Se f é uma função injectiva então f é contínua;

2. Seja $f: R \to R$ a função definida por $f(x) = xe^{1-|x|}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira:
   a. f é ímpar e contínua em *IR*;
   b. f é par e contínua em *IR*;
   c. f é ímpar, descontínua no ponto *0* e contínua em $\mathrm{IR} \setminus \{0\}$;
   d. f é contínua em $\mathrm{IR} \setminus \{0\}$ e $f(x) \geq 0$, $\forall x \in IR$;

3. Seja $f: IR \to IR$ a função definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. A função f é :
   a. periódica
   b. par
   c. ímpar
   d. contínua em *IR*
   e. as afirmações feitas nas alíneas anteriores são todas falsas

4. Investigue a continuidade das seguintes funções nos pontos indicados:

   a. $f(x) = \begin{cases} x^2 sen\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$ em *x=0*

   b. $f(x) = \begin{cases} \ln(x+2), & x \geq -1 \\ -x-1 \quad , & x < -1 \end{cases}$ em *x=-1*

5. Considere a função contínua $f: [-1, +\infty[\to IR$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} c \times arcsen(x) + 1 & se \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x}{x+1} & se \quad x > 1 \end{cases}$$

   onde *c* é uma constante real e $-\dfrac{\pi}{2} \leq arcsen(x) \leq \dfrac{\pi}{2}$. Qual o valor de *c*?

   a. $-\dfrac{1}{\pi}$ b. $-\pi$ c. $-\dfrac{2}{\pi}$ d. -1

6. Calcule *p* de modo que a função *f* seja contínua

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + px + 2 & , \quad x \neq 3 \\ 3 & , \quad x = 3 \end{cases}$$

7. Para um certo valor de k positivo, é contínua a função f definida por

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \le 0 \\ \ln(x+k) & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

a. -1 b. 0 c. 1 d. 2

8. Seja $f: IR \to IR$ uma função periódica com período $T > 0$ e contínua em IR.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

a. f tem máximo e mínimo.
c. f pode não ter máximo nem mínimo.
b. f pode não ter máximo.
d. f pode não ter mínimo.

9. Seja h a função, de domínio IR, definida por

$$h(x)=\begin{cases} 1+e^x & \text{se} \quad x<0 \\ 2 & \text{se} \quad x=0 \\ 3x+2 & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$$

Relativamente à continuidade da função h, no ponto 0, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

a. É contínua.
b. É contínua à esquerda e descontínua à direita.
c. É contínua à direita e descontínua à esquerda.
d. É descontínua à esquerda e à direita.

10. Considere a função g, de domínio IR, definida por

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & \text{se} \quad x<0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{se} \quad x=0 \\ \dfrac{sen(x)}{2x} & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, estude a função g quanto à continuidade no ponto 0 (deve indicar, justificando, se a função é contínua nesse ponto e, no caso de não ser, se se verifica a continuidade à esquerda ou à direita, nesse mesmo ponto).

11. De uma função f, contínua no intervalo [1,3], sabe-se que $f(1)=7$ e $f(3)=4$. Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

    a. A função f tem pelo menos um zero no intervalo [1,3]

    b. A função f não tem zeros no intervalo [1,3]

    c. A equação $f(x)=5$ tem pelo menos uma solução no intervalo [1,3]

    d. A equação $f(x)=5$ não tem solução no intervalo [1,3]

12. Considere uma função real de variável real, f, monótona num intervalo fechado $[a,b]$ onde $f(a)$ e $f(b)$ têm o mesmo sinal.

    Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira.

    a. A equação $f(x)=0$ tem uma solução em $[a,b]$.

    b. A equação $f(x)=0$ tem infinitas soluções em $[a,b]$.

    c. A equação $f(x)=0$ não tem solução em $[a,b]$.

    d. Nada se pode concluir acerca do número de soluções da equação $f(x)=0$ em $[a,b]$.

13. Considere a função

$$g(x)=\begin{cases} x^2 & se \quad x\in[0,1[\\ x+2 & se \quad x\in[1,2] \end{cases}$$

    Explique porque é que o teorema de Bolzano não garante a existência de um elemento $x\in[0,2]$ que verifique $f(x)=2$.

14. Considere a função *h*, real de variável real, definida por

$$h(x)=\begin{cases} 2x+\arccos(x) & \textbf{se} \quad \mathbf{0}\le x<1 \\ 2 & \textbf{se} \quad x=1 \\ \dfrac{x+5}{3} & \textbf{se} \quad \mathbf{1}<x\le 4 \end{cases}$$

    a. Mostre que h é contínua em todo o seu domínio.

    b. Aplicando o teorema de Bolzano, mostre que: $\exists \quad c\in[0,4]: h(c)=c$.

15. Considere a função $f: IR \rightarrow IR$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}(1+\ln x) & se \quad x>0\\ (k+1)(x^3-x+2) & se \quad x\le 0\end{cases}$$

a. Determine o valor do parâmetro k de modo que a função f seja contínua em todo o seu domínio.

b. Considere $k=0$. Justifique a existência de pelo menos um zero da função f no intervalo $[-2,-1]$.

16. Indique o valor lógico das seguintes afirmações, justificando devidamente a sua opção.

a. Se $f: I \rightarrow IR$ é contínua e I é um intervalo, então f é limitada.

b. Se $f: I \rightarrow IR$ é contínua e I é um intervalo fechado, então f é limitada.

c. Seja f uma função contínua no intervalo $[-1,1]$, tal que $f(-1)=-1$ e $f(1)=2$, então a equação $f(x)=1$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]-1,1[$.

d. Se $|f|$ é contínua em IR então f é contínua em IR.

e. Se $f: [2,5] \rightarrow IR$ é uma função crescente tal que $f(2)=3$ e $f(5)=7$, então existe um elemento $c \in]2,5[$ tal que $f(c)=5$.

f. Para que uma função seja contínua num ponto basta que os limites laterais nesse ponto existam.

g. Se uma função $f: IR \rightarrow IR$ tem apenas uma descontinuidade no ponto de abcissa $x=-1$, então a função definida por $g(x)=f(|x|)$ é contínua.

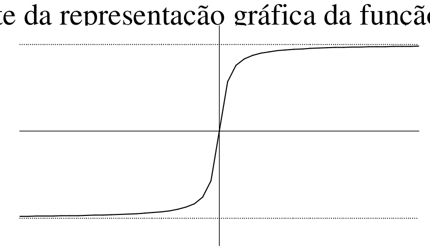
17. Seja f uma função real de variável real, definida e *contínua* em $\left]-\frac{2}{\pi},\infty\right[$ por

$$f(x)=\begin{cases}xe^{-x}+1 & se \quad x\ge 0\\ k\arccos\left(-\frac{\pi x}{2}\right) & se \quad -\frac{2}{\pi}\le x<0\end{cases}$$

Qual o valor de k?

a. 0 b. $\frac{2}{\pi}$ c. 1 d. $\frac{1}{\pi}$

18. A figura seguinte é parte da representação gráfica da função $arctg(x)$.



Seja $k \in IR$, considere a função *f* definida por $f(x) = \begin{cases} arctg\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ k & , x = 0 \end{cases}$.

a. Mostre que *f* é contínua em $IR \setminus \{0\}$.

b. Determine o valor de k de modo que *f* seja contínua à direita em $x = 0$.

19. Considere a função *g* definida por $g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & , x \neq 1 \\ k & , x = 1 \end{cases}$.

Determine o valor de k de modo que g seja contínua à esquerda em $x = 1$.

20. Analise a continuidade da função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & se \quad x \neq 0 \\ 1 & se \quad x = 0 \end{cases}.$$

21. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1 - x^2) & se \quad x \geq 0 \\ e^x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

a. Determine o domínio de f.

b. Estude a continuidade de f.

22. Estude a continuidade da função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)\ln(x+1) & se \quad x > -1 \\ e^{x^2+5x+6} - 1 & se \quad x \leq -1 \end{cases}.$$

23. Seja $k \in IR$, uma constante, considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) & se \quad x \neq 0 \\ k & se \quad x = 0 \end{cases}$$

a. Mostre que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, justificando detalhadamente.

b. Determine o valor de k para o qual f é contínua.

24. Analise a continuidade da função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)e^x & se \quad x \geq 0 \\ \frac{1}{x+2} - 1 & se \quad x < 0 \end{cases}$$