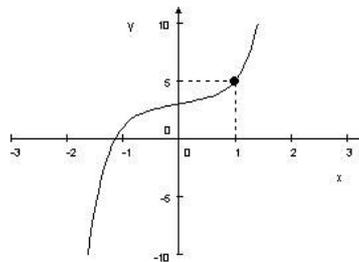


Capítulo III

Limite de Funções

3.1 Noção de Limite

Dada uma função f , o que é que significa $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$?



A ideia intuitiva do que queremos dizer com isto é:

quando x toma valores cada vez mais próximos de 1, a respectiva imagem, $f(x)$, aproxima-se do valor 5.

Definição:

Diz-se que existe e que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

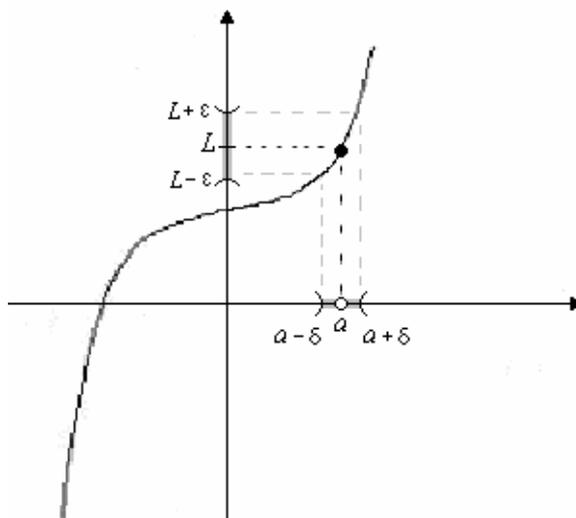
quando e só quando $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Explicamos o que quer dizer, em linguagem corrente, a última fórmula.

Diz-se que o $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ é L se

- **para qualquer** intervalo centrado em L do tipo $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$ (relativamente às ordenadas),

- existe pelo menos um intervalo da forma $]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}$, onde a imagem de qualquer ponto pertence ao intervalo $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$.



Nota:

- De acordo com a definição, só tem sentido calcular $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ se a função está definida numa vizinhança de a , isto é, ou imediatamente antes de a (se existe $\delta > 0$ tal que $]a - \delta, a[\subset D_f$) ou imediatamente depois de a (se existe $\delta > 0$ tal que $]a, a + \delta[\subset D_f$).

Por exemplo, não faz sentido calcular $\lim_{x \rightarrow -2} \ln(x)$ pois $-2 \notin D_{\ln(x)} =]0, \infty[$, mas tem sentido calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x)$ pois qualquer valor à direita de 0 pertence $D_{\ln(x)}$.

- De acordo com a definição de limite, para calcular $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ não interessa o que se passa em a (pode até acontecer que $a \notin D_f$), o que importa é o que se passa imediatamente antes e depois de a .

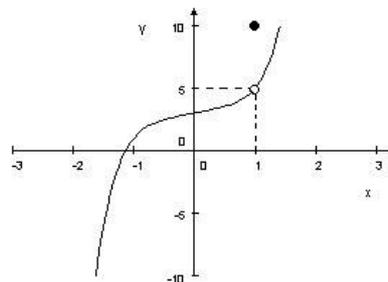
Exemplos:

1)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$$

e

$$f(1) = 10$$

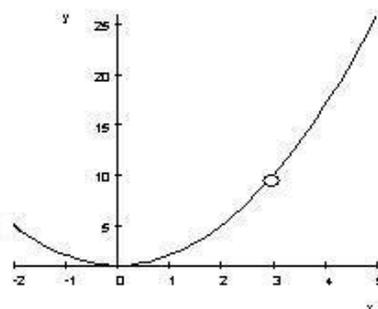


2)

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 10$$

e

$$f(3) \text{ não existe}$$



3.2 Propriedades dos Limites

Muitas funções do cálculo podem ser obtidas como somas, diferenças, produtos, quocientes e potências de funções simples. Vamos enunciar algumas propriedades, que resultam da própria definição de limite, e podem ser usadas para simplificar o cálculo do limite de funções menos simples.

Teorema (Unicidade de Limite)

Seja f uma função definida numa vizinhança de a .

O limite de f em a , quando existe, é único.

Teorema (Propriedades algébricas dos limites)

Sejam f e g duas funções definidas numa vizinhança de $a \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R} \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = m \in \mathbb{R}, \text{ e seja } c \text{ uma constante. Então}$$

- a. $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l + m$
- b. $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = lm$
- c. $\lim_{x \rightarrow a} (cf)(x) = \lim_{x \rightarrow a} c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cl$
- d. $\lim_{x \rightarrow a} (f)^n(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n = l^n, n \in \mathbb{N}$
- e. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{l}{m}, \text{ se } m \neq 0$
- f. $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \geq 0 \text{ se } n \text{ par} \right)$

Teorema

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e g é uma função limitada numa vizinhança de a ($x \neq a$), então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0.$$

No teorema anterior a condição “ g é uma função limitada numa vizinhança de x ($x \neq a$)” quer dizer que existe uma constante C tal que $|g(x)| \leq C$ em todo o ponto x que está numa vizinhança de a e $x \neq a$.

Exemplos:

- $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$ porque a função sen é limitada e $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} (-1)^n x^n = 0$ porque a função $f(x) = (-1)^n$ é limitada ($CD_f = \{-1, 1\}$) e $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$.

Teorema (Encaixe de limites)

Sejam f , g e h funções tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x numa vizinhança de a ($x \neq a$), se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$ então $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

Exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = ?$$

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

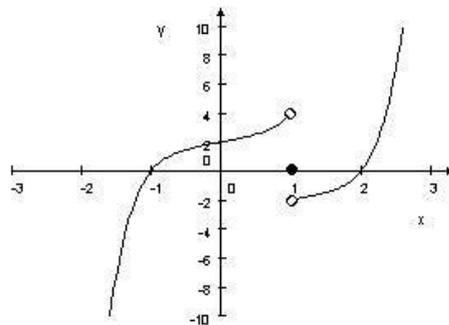
$$-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2 \quad (\text{como } x^2 \geq 0 \text{ então as desigualdades são preservadas})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2$$

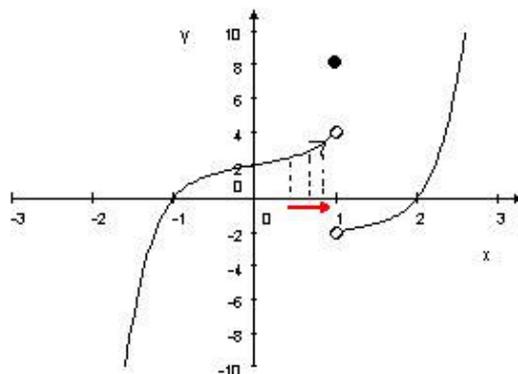
Como $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, o teorema afirma que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

3.3 Limites Laterais

Seja f a função abaixo representada



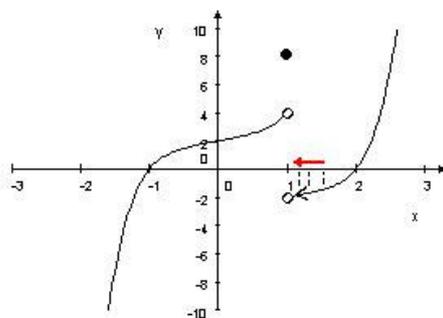
Diz-se que 4 é o **limite à esquerda** de f no ponto 1 e denota-se por $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4$. Isto significa, que quando x se aproxima de 1 por valores inferiores, a respectiva imagem, $f(x)$, aproxima-se de 4. (ver figura)



Formalmente, diz-se que o $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ se

- **para qualquer** intervalo centrado em L do tipo $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$ (relativamente às ordenadas),
- existe pelo menos um intervalo da forma $]a - \delta, a[$, onde a imagem de qualquer ponto pertence ao intervalo $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$.

Analogamente, diz-se que -2 é o **limite à direita** de f no ponto 1 e denota-se por $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2$. Isto significa, que quando x se aproxima de 1 por valores superiores, a respectiva imagem, $f(x)$, aproxima-se de -2 . (ver figura)



Formalmente, diz-se que o $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ se

- **para qualquer** intervalo centrado em L do tipo $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$ (relativamente às ordenadas),
- existe pelo menos um intervalo da forma $]a, a + \delta[$, onde a imagem de qualquer ponto pertence ao intervalo $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$.

Utilizando os conceitos de limite à direita e limite à esquerda, podemos dar uma **nova definição de limite**:

Definição:

Seja f uma função definida numa vizinhança de $x = a$, à direita e à esquerda.

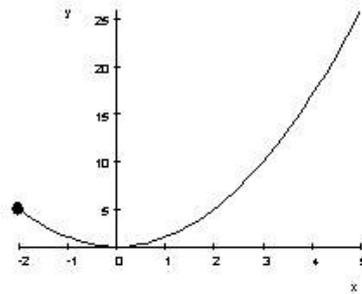
Dado um número real L , diz-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se é só se existem e são iguais os limites laterais, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ quando e só quando } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Nota:

- Se os limites laterais num ponto são diferentes, então não existe limite nesse ponto.
Por exemplo, a função anterior não tem limite no ponto 1, pois $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4 \neq -2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.
- No caso em que f é uma função definida num intervalo, por exemplo do tipo $[a, b]$, diz-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se, e somente se, $L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

Por exemplo:



$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 5$$

(notar que neste caso, expressão $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ não faz sentido porque a função não está definida para valores inferiores a -2)

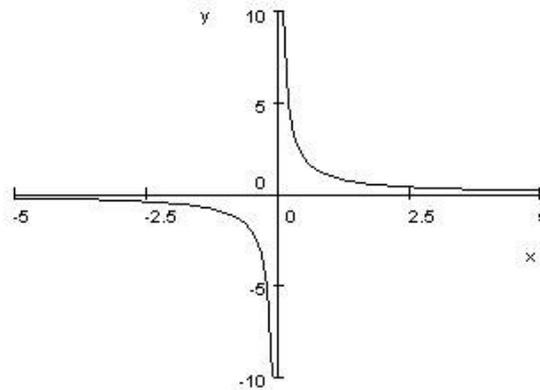
3.4 Limites Infinitos. Limites no infinito. Expressões Indeterminadas

Por vezes quando calculámos o limite de uma função f num ponto a acontece que à medida que nos aproximámos de a as imagens tomam valores muito grandes (em valor absoluto), tão grandes que é impossível quantificá-los com um número $L \in \mathbb{R}$. Para exprimir essa situação utilizámos o símbolo ∞ que se designa por *infinito*.

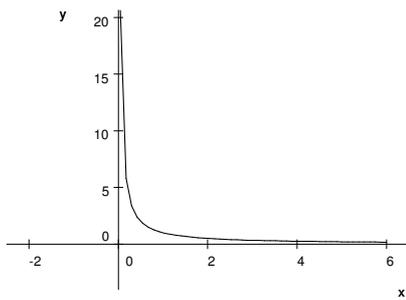
Exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x} \right| = ?$$

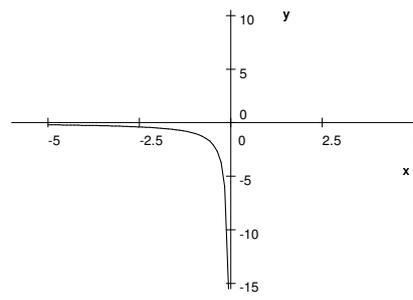
Consideremos o gráfico da função definida por $f(x) = \frac{1}{x}$



Verifica-se que:



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Podemos, então, escrever $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x} \right| = \infty$

Formalmente, temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ quando e só quando}$$

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\} \Rightarrow |f(x)| > M$$

De forma análoga define-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Nota:

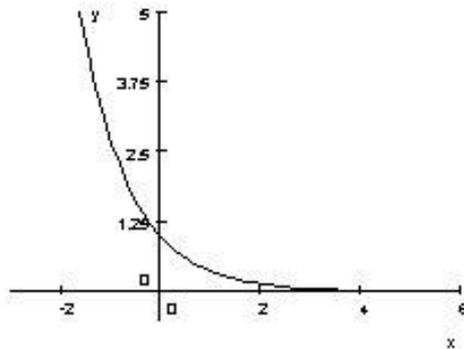
- Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ então f não é limitada.
- Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq \infty$ então numa vizinhança de $x = a$ a função é limitada, no entanto, globalmente nada se pode concluir.

Limites no infinito

Por vezes, quando o domínio de uma função é ilimitado, importa saber o que acontece às imagens quando nos aproximámos dos extremos do domínio.

Exemplo:

Seja $f(x) = e^{-x}$ cuja representação gráfica é:



Quando x toma valores muito grandes, f toma valores cada vez mais próximos de 0.

Simbolicamente esta situação traduz-se por $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Formalmente, dado $L \in \mathbb{R}$, temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \text{ quando e só quando}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \text{ tal que para todo } x > M \Rightarrow f(x) \in]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$$

De modo análogo, define-se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$

Por outro lado, quando x toma valores “muito grandes negativos”, f toma valores cada vez maiores. Exprime-se esta situação por $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

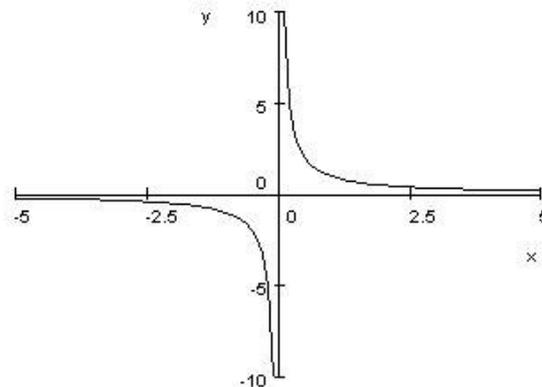
Formalmente temos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ quando e só quando

$$\forall M > 0 \quad \exists N > 0 \quad \text{tal que} \quad \text{para todo} \quad x < -N \Rightarrow f(x) > M.$$

De modo semelhante define-se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Exemplo:

Seja $f(x) = \frac{1}{x}$ cuja representação gráfica é:



Quando x toma valores muito grandes ou “muito grandes negativos”, f toma valores cada vez mais próximos de 0.

Simbolicamente esta situação traduz-se por $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Observação:

Todas as propriedades estudadas para o cálculo de limites no sub-capítulo 3.2, são válidas para limites laterais (a^- e a^+), limites no infinito ($a = \infty$) e ainda para limites infinitos.

Expressões indeterminadas

Resulta das propriedades da aritmética dos limites que o limite de um polinómio ou de uma função racional, quando x tende para a , pode ser calculado substituindo x por a .

Exemplos:

- $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3) = \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 2^2 + 3 = 7$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3}{2x^3 + x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 3)}{\lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 + x)} = \dots = \frac{(-1)^2 + 3}{2(-1)^3 + (-1)} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$

Contudo, aplicando directamente as propriedades da aritmética dos limites podemos ser conduzidos aos símbolos $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, que se chamam *símbolos de indeterminação*, e quando tal acontece nada se pode concluir sem um estudo mais aprofundado do limite em causa.

1. Indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x}{2x^5 + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{2x^5 \left(1 + \frac{1}{2x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

Mais geralmente:

Sejam $p(x)$ e $q(x)$ dois polinómios. Se $a_n x^n$ é o monómio de maior grau de $p(x)$ e $b_m x^m$ é o monómio de maior grau de $q(x)$ temos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} +\infty & \text{se } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}$$

Nota:

Note que o que caracteriza uma indeterminação é precisamente o facto de perante o mesmo símbolo (neste caso $\frac{\infty}{\infty}$) sermos conduzidos a resultados distintos como se vê em cima.

2. Indeterminação $\infty - \infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - (x+1)}{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} = 0\end{aligned}$$

3. Indeterminação $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x^2 - 3x + 2} = ?$$

Aplicando directamente as regra para o quociente de limites somos conduzidos a $\frac{0}{0}$ o que mostra que 1 anula o numerador e o denominador. Então o numerador e o denominador são divisíveis por $x-1$. Aplicando a regra de Ruffini, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - 2x + 2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 2}{x-2} = \frac{1}{-1} = -1$$

4. Indeterminação $0 \times \infty$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} (x^3 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cdot x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$

Segue-se uma tabela com a álgebra dos limites.

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	
$+\infty$	$+\infty$	$\lim(f(x) + g(x)) = +\infty + \infty = +\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$\lim(f(x) + g(x)) = -\infty + (-\infty) = -\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$\lim(f(x) + g(x)) = +\infty - \infty = ?$ indeterminação
$+\infty$	k	$\lim(f(x) + g(x)) = +\infty + k = +\infty$
$-\infty$	k	$\lim(f(x) + g(x)) = -\infty + k = -\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$\lim(f(x).g(x)) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$\lim(f(x).g(x)) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$\lim(f(x).g(x)) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
$+\infty$	$k > 0$	$\lim(f(x).g(x)) = +\infty \cdot k = +\infty$
$+\infty$	$k < 0$	$\lim(f(x).g(x)) = +\infty \cdot k = -\infty$
$\pm\infty$	0	$\lim(f(x).g(x)) = \pm\infty \cdot 0 = ?$ indeterminação
k	$\pm\infty$	$\lim(f(x)/g(x)) = k / \pm\infty = 0$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\lim(f(x)/g(x)) = \pm\infty / \pm\infty = ?$ indeterminação
$k > 0$	0^+	$\lim(f(x)/g(x)) = k / 0^+ = +\infty$
$+\infty$	0^+	$\lim(f(x)/g(x)) = +\infty / 0^+ = +\infty$
$k > 0$	0^-	$\lim(f(x)/g(x)) = k / 0^- = -\infty$
$+\infty$	0^-	$\lim(f(x)/g(x)) = +\infty / 0^- = -\infty$
0	0	$\lim(f(x)/g(x)) = 0 / 0 = ?$ indeterminação

3.5 Exercícios

1. Considere a função f definida por $f(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{4} - \arctg|x|}$. Sabendo que $a = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ e

$b = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, qual das afirmações seguintes é verdadeira:

- a. $a = -\infty$ e $b = +\infty$
- b. $a = +\infty$ e $b = -\infty$
- c. $a = +\infty$ e $b = +\infty$
- d. $a = -\infty$ e $b = \frac{2}{\pi}$

2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x} & \text{se } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira:

- a. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- c. não existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$
- d. não existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

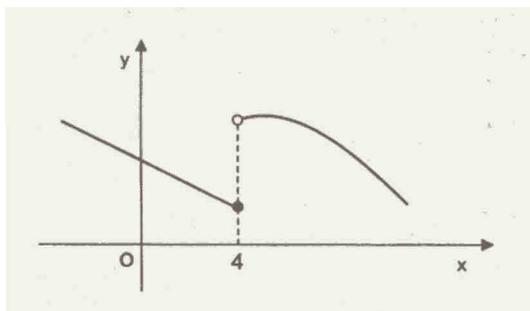
3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = xe^{1-|x|}$. Sabendo que $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, qual das afirmações seguintes é verdadeira:

- a. $a = +\infty$ e $b = -\infty$
- b. $a = +\infty$ e $b = +\infty$
- c. $a = 0$ e $b = 0$
- d. $a = +\infty$ e $b = 0$

4. Seja $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x \leq 3 \\ 3x - 7, & x > 3 \end{cases}$. Calcule:

- a. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$
- b. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$
- c. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
- d. $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$
- e. $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$
- f. $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

5. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f , de domínio \mathbb{R} .



Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- a. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4)$ e $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$
 b. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4)$ e $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \neq f(4)$
 c. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq f(4)$ e $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$
 d. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq f(4)$ e $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \neq f(4)$

6. Calcule os seguintes limites:

- a. $\lim_{t \rightarrow -2} \frac{t^3 + 4t^2 + 4t}{(t+2)(t-3)}$ b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log(x-1)}{x^2 - 6}$ c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 - 3x^3 + 2}{7 - x^2}$
 d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x}{\sqrt{5+4x^2}}$ e. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{1-x^3} \right)$ f. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}$
 g. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \log(x-1)$ h. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{3x^3 + x^2 + x}$ i. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 7x - 4}{x^3 + x^2 - 80}$
 j. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+2}{\sqrt[4]{x+17} - 2}$ k. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x}{2x^2}$ l. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(2x-5)$
 m. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\text{sen}(x)}{\text{tg}(x)}$ n. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x-5}}$ o. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x^3-1}{x^2+2}}$

7. Usando o Teorema do Encaixe de Limites, calcule os seguintes

- a. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x}$

8. Mostre que os seguintes limites não existem:

- a. $\lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{x}{|x|}$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x}}$ c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sen}(x)$

9. Seja f uma função real de variável real, definida e *contínua* em $\left] -\frac{2}{\pi}, \infty \right[$ por

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ k \arccos\left(-\frac{\pi x}{2}\right) & \text{se } -\frac{2}{\pi} \leq x < 0 \end{cases}$$

Qual o valor do $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?

- a. $+\infty$ b. 0 c. 1 d. $-\infty$