Capítulo II

Funções reais de variável real

2.1 Conceitos Básicos sobre Funções

Sejam D e B dois conjuntos.

Uma ***função*** definida em D e tomando valores em B é uma "regra" que a cada elemento de D faz corresponder **<u>um único</u>** elemento de B.

Escreve-se:

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \to & B \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Ao conjunto D chama-se o ***domínio*** de f, a B ***conjunto de chegada*** e a $f(x)$ ***imagem*** do elemento $x \in D$.

<u>Nota:</u>

$f \neq f(x)$ uma vez que f representa uma função e $f(x)$ representa a imagem do elemento x pela função f.

Seja $f: \ D \ \to \ B$ uma função.

<u>Definições:</u>

- *Chama-se **imagem** (ou **contradomínio**) de f ao subconjunto de B formado por todos os elementos que são imagem de algum elemento de D.*

  Escreve-se

  $$\mathrm{Im}(f) = (CD_f) = \{y \in B : y = f(x) \text{ para algum } x \in D\}$$

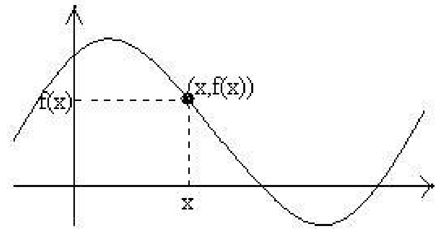
  <u>Exemplo:</u>

  $$\begin{array}{rccc} f: & IR & \to & IR \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

  $\mathrm{Im}(f) = IR_0^+$ (note-se que o quadrado de um número é sempre não negativo)

- *f diz-se uma **função real de variável real** se $D, B \subseteq IR$.*
- *O **gráfico** de f é o conjunto de pontos $P = (x, f(x))$ e representa-se por:*

  $Gr(f) = \{(x, y) \in IR^2 : x \in D_f \quad \wedge \quad y = f(x)\}$

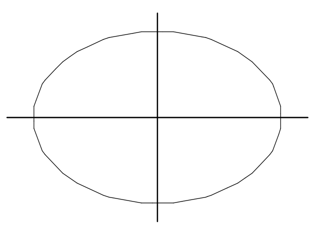


Perguntа:

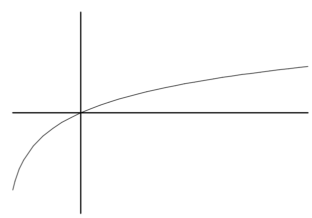
Dado um gráfico, como poderemos saber se representa o gráfico de uma função?

Resposta:

Note-se que na definição de uma função foi exigido que a cada elemento do domínio correspondesse um único elemento do conjunto de chegada, ou seja, cada recta vertical do plano pode intersectar o gráfico no **máximo** uma vez.



não representa uma função



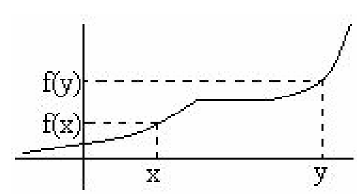
representa uma função

Definições:

Uma função $f: \quad D_f \subset IR \quad \rightarrow \quad B \subseteq IR$ diz-se

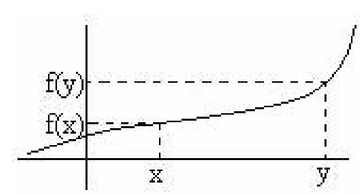
- ***Crescente** se*

  $x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y) \qquad \forall \ x, y \in D_f$



- ***Estritamente crescente** se*

  $x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(y) \qquad \forall \ x, y \in D_f$



- ***Decrescente*** *se* $x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(y) \qquad \forall\ x, y \in D_f$
- ***Estritamente decrescente*** *se* $x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(y) \qquad \forall\ x, y \in D_f$
- ***Monótona*** *se é (sempre) crescente ou (sempre) decrescente.*
- ***Estritamente monótona*** *se é (sempre) estritamente crescente ou (sempre) estritamente decrescente.*

Definições:

Seja $f: \ D_f \subset IR \ \rightarrow \ B \subseteq IR$.

- f *diz-se* ***sobrejectiva*** *se* $\mathrm{Im}(f) = B$, *isto é, se o conjunto de chegada coincide com a imagem de* f *:*

$$\forall\ y \in B \quad \exists\, x \in D_f \ : \ f(x) = y$$

Exemplos:

Função	Imagem	Sobrejectividade
1) $f: IR \rightarrow IR$, $x \mapsto x$	$\mathrm{Im}(f) = IR$	$\therefore f$ é sobrejectiva pois a imagem coincide com o conjunto de chegada.
2) $f: IR \rightarrow IR$, $x \mapsto x^2$	$\mathrm{Im}(f) = IR_0^+$	$\therefore f$ não é sobrejectiva pois a imagem (IR_0^+) é diferente do conjunto de chegada: IR.
3) $f: IR_0^+ \rightarrow IR$, $x \mapsto x^2$	$\mathrm{Im}(f) = IR_0^+$	$\therefore f$ não é sobrejectiva.
4) $f: IR \rightarrow IR_0^+$, $x \mapsto x^2$	$\mathrm{Im}(f) = IR_0^+$	$\therefore f$ é sobrejectiva.

- f *diz-se* ***injectiva*** *se a pontos diferentes do domínio corresponderem imagens distintas i.e.,*

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(y) \qquad \forall\ x, y \in D_f$$

$$\left(\Leftrightarrow \quad f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad x = y \qquad \forall\ x, y \in D_f\right)$$

Exemplos:

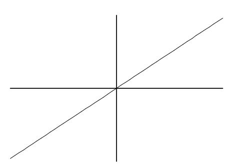
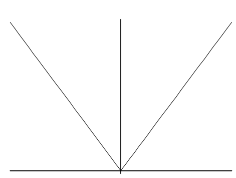
Função	$x \neq y \;\Rightarrow\; f(x) \neq f(y)$	Injectividade
1) $f: \; IR \to IR$ $\quad x \mapsto x$	$x \neq y \;\Rightarrow\; \underbrace{x}_{f(x)} \neq \underbrace{y}_{f(y)}$	$\therefore f$ é injectiva
2) $f: \; IR \to IR$ $\quad x \mapsto x^2$	$f(x) = f(y) \;\Leftrightarrow\; x^2 = y^2$ $\Leftrightarrow\; x^2 - y^2 = 0$ $\Leftrightarrow\; (x-y)(x+y) = 0$ $\Leftrightarrow\; x = y \;\vee\; x = -y$	$\therefore f$ não é injectiva
3) $f: \; IR_0^+ \to IR$ $\quad x \mapsto x^2$	$f(x) = f(y) \;\Leftrightarrow\; x^2 = y^2$ $\Leftrightarrow\; x^2 - y^2 = 0$ $\Leftrightarrow\; (x-y)(x+y) = 0$ $\Leftrightarrow\; x = y \;\vee\; x = -y$	$\therefore f$ é injectiva (note-se que o caso $x = -y$ não pode ocorrer)
4) $f: \; IR \to IR$ $\quad x \mapsto x^3$	$f(x) = f(y) \;\Leftrightarrow\; x^3 = y^3$ $\Leftrightarrow\; x = \sqrt[3]{y^3}$ $\Leftrightarrow\; x = y$	$\therefore f$ é injectiva

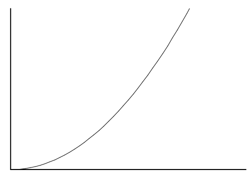
Nota:

Graficamente, verifica-se que uma função é injectiva se qualquer recta horizontal intersecta o gráfico, **no máximo**, uma vez.

- f *diz-se **bijectiva** se é injectiva e sobrejectiva.*

Exemplos:

Função		Bijectividade
1) $f: \; IR \to IR$ $\quad x \mapsto x$		$\therefore f$ é bijectiva.
2) $f: \; IR \to IR$ $\quad x \mapsto \lvert x \rvert$		$\therefore f$ não é bijectiva porque não é sobrejectiva nem injectiva.

3) $\begin{array}{llll} f: & IR_0^+ & \rightarrow & IR_0^+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$		$\therefore f$ é bijectiva pois é sobrejectiva e injectiva.

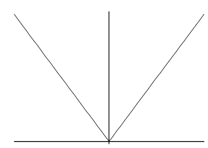
Definições:

Uma função $f: \quad D_f \subset IR \quad \rightarrow \quad IR$ *diz-se*

- ***par*** *se* $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$

  Exemplo:

  $$\begin{array}{llll} f: & IR & \rightarrow & IR \\ & x & \mapsto & |x| \end{array}$$

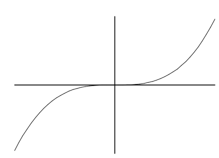
  Nota:

  Qualquer função par é simétrica em relação ao eixo dos yy's

- ***ímpar*** *se* $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$

  Exemplo:

  $$\begin{array}{llll} f: & IR & \rightarrow & IR \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

  Nota:

  Qualquer função ímpar é simétrica em relação à origem.

- ***periódica*** *se existir* $T > 0$ *tal que* $f(x+T) = f(x) \quad \forall\ x \in D_f$. *(*$T$ *diz-se o* ***período*** *de* f *)*

  Exemplos:

  1) $f(x) = sen(x)$ é uma função periódica de período 2π.

  $$sen(x + 2\pi) = sen(x)$$

  2) $g(x) = tg(x)$ é uma função periódica de período π.

$$tg(x+\pi)=tg(x)$$

3) $h(x)=tg(x)$ também é uma função periódica de período 2π.

$$tg(x+2\pi)=tg(x)$$

Nota:

Se uma função é periódica de período T, o gráfico de f repete-se de T em T unidades.

- ***limitada*** *se a imagem de f for um conjunto limitado, i.e.,*

$$\exists\, L>0: |f(x)|\leq L \quad \forall\, x\in D_f$$

Exemplo:

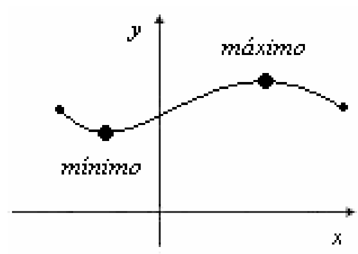
	Função	Imagem	Limitada
1)	$\begin{array}{llll} f: & IR & \to & IR \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$	$\mathrm{Im}(f)=IR_0^+=[0,+\infty[$ conjunto não limitado	$\therefore f$ é ilimitada
2)	$\begin{array}{llll} f: & IR & \to & IR \\ & x & \mapsto & sen(x) \end{array}$	$\mathrm{Im}(f)=[-1,1]$ conjunto limitado	$\therefore f$ é limitada

Nota:

Se uma função é limitada, o todo gráfico de f está entre duas rectas horizontais, por exemplo, entre $y=-L$ e $y=L$.

Definições:

Dada uma função $f: \ D_f \subset IR \ \to \ IR$ diz-se que

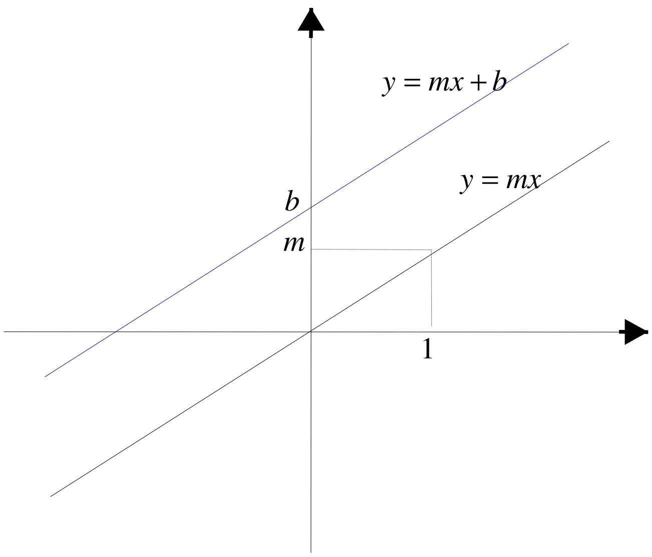


- *$f(c)$ é um **máximo** (absoluto) de f se $f(x)\leq f(c) \quad \forall\, x\in D_f$.*
- *$f(c)$ é um **mínimo** (absoluto) de f se $f(c)\leq f(x) \quad \forall\, x\in D_f$.*
- *f tem um **extremo** (absoluto) se possui algum máximo ou mínimo.*

2.2 Alguns Exemplos de Funções Elementares

Função afim

São as funções mais simples que aparecem: os seus gráficos representam rectas.



$f(x) = \boxed{y = mx + b}$

$m \longrightarrow$ declive

$b \longrightarrow$ ordenada na origem

$f(0) = b$

Dados dois quaisquer pontos <u>distintos</u> da recta $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, o declive da recta que os contém é dado por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \text{ diferença das ordenadas} \\ \longrightarrow \text{ diferença das abcissas} \end{array}$$

e a equação é:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

<u>Nota:</u>

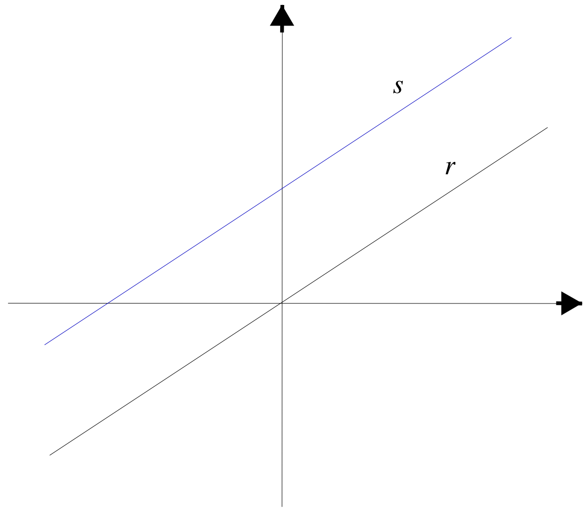
Suponhamos que θ é o ângulo que a recta faz com o semi-eixo positivo do xx's (no sentido directo – contrário aos ponteiros do relógio) então também podemos calcular o declive pela fórmula $m = tg(\theta)$.

O declive dá a maior ou menor inclinação da recta:

- $m > 0$ *inclinação para a direita*
- $m = 0$ *horizontal*
- $m < 0$ *inclinação para a esquerda*

Nota:

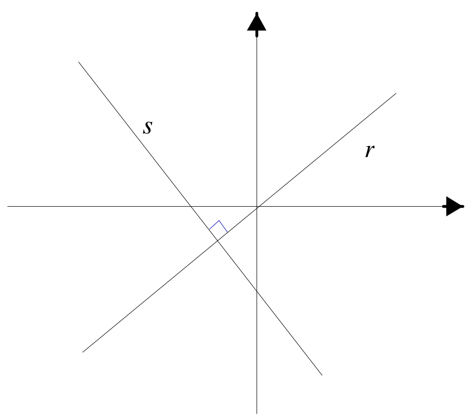
- *Rectas paralelas têm o mesmo declive, m.*



Se as rectas r e s são paralelas então

$$m_r = m_s$$

- *Uma recta s perpendicular à recta r de equação* $y = m_r x + b$ *tem declive* $m_s = -\frac{1}{m_r}$.



Se as rectas r e s são perpendiculares então

$$m_r = -\frac{1}{m_s}$$

Exercícios:

1. Determine o declive e o ponto de intersecção com o eixo dos yy's, das seguintes rectas:

   1.1. $20x - 24y - 30 = 0$ b) $2x - 3 = 0$ c) $4y + 5 = 0$

2. Explique porque é que a recta do exercício 1.b) não corresponde ao gráfico de uma função.

3. Determine a equação da recta:

   3.1. paralela à recta de equação $3x - 5y + 8 = 0$ e que passa no ponto $(-3, 2)$.

   3.2. perpendicular à recta de equação $3x - 5y + 8 = 0$ e que passa no ponto $(1, 4)$.

Função Quadrática

Uma **função quadrática** é uma função definida por uma expressão do tipo:

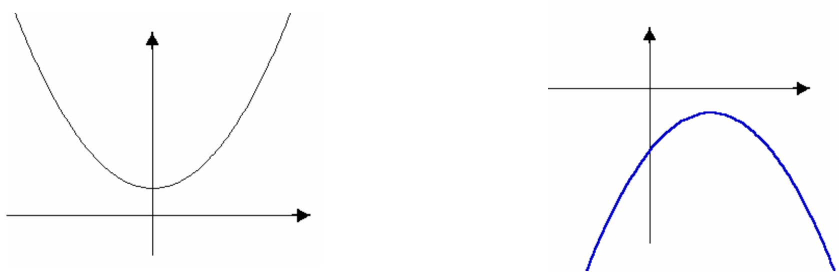
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

(Se $a = 0$ obtemos uma função afim – caso anterior)

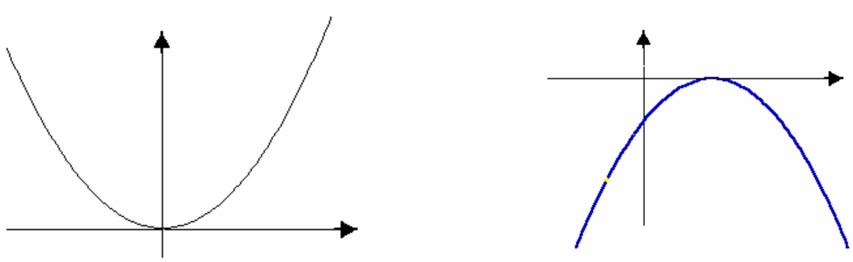
As funções quadráticas representam <u>parábolas</u>.

Se $a > 0$ a concavidade é voltada para cima

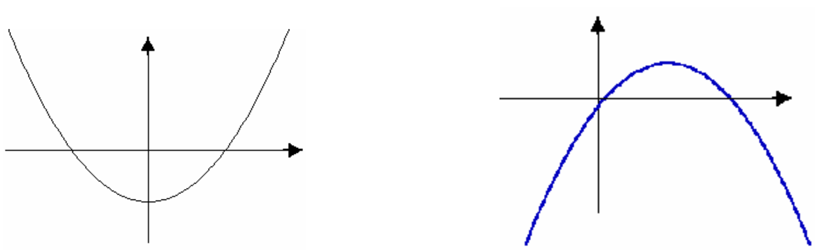
Se $a < 0$ a concavidade é voltada para baixo



A parábola não tem zeros



A parábola tem um zero (duplo)



A parábola tem dois zeros

Zeros de uma parábola

Para determinar os zeros da parábola é preciso resolver a equação

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ou seja,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Podemos concluir que a parábola tem:

- dois zeros distintos se $b^2 - 4ac > 0$
- um zero duplo se $b^2 - 4ac = 0$ e
- não tem zeros reais se $b^2 - 4ac < 0$.

Nota:

- *As funções quadráticas são funções não injectivas e não monótonas.*
- *O vértice de uma parábola é o ponto de coordenadas* $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.
- *A ordenada do vértice de uma parábola é um máximo (respectivamente mínimo) se* $a < 0$ *(respectivamente* $a > 0$ *).*

Exercício:

Determine os zeros da função $f(x) = x^2 + 2x - \frac{7}{2}$ e faça um esboço do seu gráfico.

Funções Polinomiais

A função afim e a função quadrática são casos particulares de funções polinomiais.

*As **funções polinomiais** de grau* n *são do tipo:*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

onde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ *são reais,* $a_n \neq 0$ *e* n *é **inteiro não negativo.***

Exemplos:

- $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ *(grau 3)*
- $g(x) = x^5 + 7x + 2$ *(grau 5)*
- $h(x) = 2$ *(grau 0)*
- $i(x) = \dfrac{1}{x}$ *não é polinomial porque ....*

Nota:

Para polinómios de grau ≥ 3 não existe uma fórmula simples para determinar os zeros (para grau 3 e 4 existe mas é complicada). No entanto, às vezes é possível determinar os zeros.

Exemplos:

- Determinar os zeros do polinómio $p(x) = x^3 - x^2 - 2x$

$$
\begin{aligned}
p(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^3 - x^2 - 2x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x \cdot \left(x^2 - x - 2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x^2 - x - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 2
\end{aligned}
$$

- Determinar os zeros do polinómio $q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

  (exercício…)

Funções racionais

Se $p(x)$, $q(x)$ *são funções polinomiais, a função* $f : D \subset IR \to IR$ *com domínio* $D = \{x \in IR : \quad q(x) \neq 0 \}$ *definida por*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

chama-se ***função racional****.*

<u>*Exemplos:*</u>

- $f(x) = \frac{1}{x}$ *é racional*
- $g(x) = \frac{x+1}{x^2+2}$ *é racional*
- $h(x) = \sqrt{x}$ <u>*não é racional*</u> *(porque …*

Zeros

Se $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ é uma função racional

então

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(x) = 0 \quad \wedge \quad q(x) \neq 0$$

Funções irracionais:

Seja $p(x)$ um polinómio.

*As **funções irracionais** são funções do tipo:*

$$f(x) = \left[\sqrt[n]{p(x)}\right]^m$$

onde $n \in IN$ e $m \in \mathbb{Z}$.

<u>*Exemplos:*</u>

- $f(x) = \sqrt{x}$ *é irracional*
- $g(x) = \left(\sqrt[3]{x^2+3}\right)^{-7}$ *é irracional*

O domínio destas funções é (note-se que $p(x)$ *um polinómio*):

- Se n é par e $m > 0$: $D_f = \{x \in IR : p(x) \geq 0\}$
- Se n é ímpar e $m > 0$: $D_f = IR$
- Se n é par e $m < 0$: $D_f = \{x \in IR : p(x) \geq 0 \wedge \sqrt[n]{p(x)} \neq 0\} = \{x \in IR : p(x) > 0\}$
- Se n é ímpar e $m < 0$: $D_f = \{x \in IR : p(x) \neq 0\}$

Funções definidas por ramos

Considere-se a seguinte função

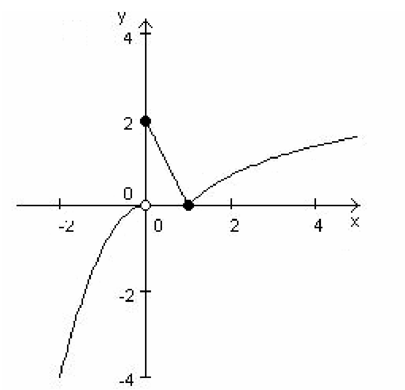
$$h(x)=\begin{cases} -x^2 & se \quad x<0 \\ 2-2x & se \quad 0\le x<1 \\ \ln(x) & se \quad x\ge 1 \end{cases}$$

O domínio da função é *IR*.

Uma função assim definida significa que:

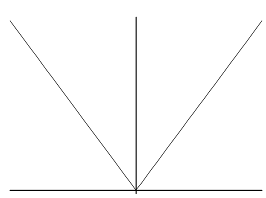
- se $x\in\left]-\infty,0\right[$, então $h(x)=-x^2$ (por exemplo $h(-1)=-(-1)^2=-1$)
- se $x\in\left[0,1\right[$, então $h(x)=2-2x$ (por exemplo $h(0)=2-2\times(0)^2=2$)
- se $x\in\left[1,\infty\right[$, então $h(x)=\ln(x)$ (por exemplo $h(1)=\ln(1)=0$)

O seu gráfico é:



Exemplo:

Outra função definida por ramos é a função módulo: $|x|=\begin{cases} x & se \quad x\ge 0 \\ -x & se \quad x<0 \end{cases}$ *cujo gráfico é:*



Exercício:

Seja $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-4} & \text{se} \quad x\ge 2 \\ \ln(-x-2) & \text{se} \quad x<-2 \end{cases}$. Determine o seu domínio.

<u>Resolução:</u> $D_f=\left\{x\in IR:\left(x^2-4\ge 0 \quad\wedge\quad x\ge 2\right) \quad\vee\quad (-x-2>0 \quad\wedge\quad x<-2)\right\}$

$=\{(\left]-\infty,-2\right] \cup [2,\infty[) \cap [2,\infty[\} \cup \{\left]-\infty,-2\right[\cap \left]-\infty,-2\right[\}$

$=[2,\infty[\cup \left]-\infty,-2\right[$

$=\left]-\infty,-2\right[\cup [2,\infty[$

$=IR\setminus[-2,2[$

2.3 Operações com funções. Composição de funções.

Operações com funções

Sejam f e g duas funções com domínios D_f e D_g, respectivamente.

Soma de funções

Considere $f(x) = ln(x)$ e $g(x) = e^x$.

Temos, $f(1) + g(1) = ln(1) + e = e$

$f(-1) + g(-1) = \mathbf{?}$

***Pergunta*:**

Para que valores de x *faz sentido falar na soma* $f(x) + g(x)$*?*

***Resposta*:**

Para valores que pertencem simultaneamente aos domínios das duas funções consideradas.

Logo, $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = ln(x) + e^x, \qquad se \qquad x > 0$

Portanto, podemos definir a soma de duas funções do seguinte modo:

$$\begin{array}{llll} f+g: & D_f \cap D_g & \to & IR \\ & x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

Diferença de funções

Considere $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$.

Temos, $f(1) - g(1) = \ln(1) - \sqrt{1} = 0 - 1 = -1$

$f(-1) - g(-1) = \mathbf{?} \qquad\qquad f(3) - g(3) = ?$

***Pergunta*:**

Para que valores de x *faz sentido falar na diferença* $f(x) - g(x)$*?*

Resposta:

Para valores que pertencem simultaneamente aos domínios das duas funções consideradas.

Logo, $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \ln(x) - \sqrt{2-x}, \qquad se \qquad x \in]0,2]$

Portanto, podemos definir a diferença de duas funções do seguinte modo:

$$\boxed{\begin{array}{llll} f-g: & D_f \cap D_g & \to & IR \\ & x & \mapsto & f(x)-g(x) \end{array}}$$

Produto de funções

Considere $f(x)=\ln(x^2-4)$ e $g(x)=\sqrt{x}$.

Temos, $f(4)\cdot g(4)=\ln\left(4^2-4\right)\cdot\sqrt{4}=2\ln(12)$

$f(2)\cdot g(2)=$ **?** $\qquad$ $f(-3)\cdot g(-3)=$ **?**

Pergunta:

Para que valores de x faz sentido falar no produto $f(x)\cdot g(x)$?

Resposta:

Para valores que pertencem simultaneamente aos domínios das duas funções consideradas.

Logo, $(fg)(x)=f(x)\cdot g(x)=\sqrt{x}\ln\left(x^2-4\right),\qquad$ *se* $\qquad x>2$

<u>Portanto</u>, podemos definir o produto de duas funções do seguinte modo:

$$\boxed{\begin{array}{llll} f\cdot g: & D_f \cap D_g & \to & IR \\ & x & \mapsto & f(x)\cdot g(x) \end{array}}$$

Quociente de funções

Considere $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$ e $g(x)=\cos(x)$.

Temos, $\dfrac{f(0)}{g(0)}=\dfrac{e}{\cos(0)}=\dfrac{2e}{1}=2e$

$\dfrac{f(-1)}{g(-1)}=?$ $\qquad$ $\dfrac{f\left(\pi/2\right)}{g\left(\pi/2\right)}=?$

Pergunta:

Para que valores de x faz sentido falar no quociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$?

Resposta:

Para valores que pertencem simultaneamente aos domínios das duas funções consideradas e que não anulem a função do denominador.

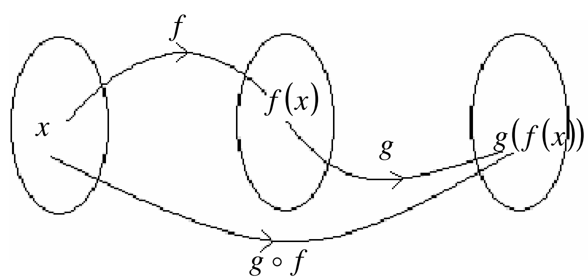
$$Logo\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{\cos(x)} \quad se \quad x\in IR\setminus\left(\{-1\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z\right\}\right)$$

Portanto, podemos definir o quociente de duas funções do seguinte modo:

$$\begin{array}{|llll|} \hline \frac{f}{g}: & D_f\cap D_g\cap\{x: g(x)\neq 0\} & \rightarrow & IR \\ & x & \mapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \\ \hline \end{array}$$

Composição de funções

Sejam f e g duas funções com domínios D_f e D_g, respectivamente tais que $\mathrm{Im}(f)=CD_f\subseteq D_g$



Denota-se por $g\circ f$, a ***função composta*** de g com f definida por $(g\circ f)(x)=g(f(x))$.

$g\circ f$ lê-se "g após f".

Como calcular a imagem de um elemento $x\in D_{g\circ f}$?

1. calcular $f(x)$;

2. calcular a imagem de $f(x)$ pela função g, i.e., $g(f(x))$.

Nota:

- *Só é possível calcular* ***1.*** *se* x *pertencer ao* D_f*; e só é possível calcular* ***2.*** *se este,* $f(x)$*, pertencer ao* D_g.

  Consequentemente $D_{g\circ f}$ *é*

$$D_{g\circ f}=\{x\in IR:\quad x\in D_f \quad\wedge\quad f(x)\in D_g\}$$

- *A maior parte das funções com que trabalhamos são funções compostas. Por exemplo, a função* $sen(x^2)$ *pode ser encarada como a composta da função* $g(x)=sen(x)$ *com* $f(x)=x^2$.

  De facto, $sen(x^2)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=sen(x^2)$.

  Usando as mesmas funções podemos verificar que a função $sen^2(x)$ *também pode ser encarada como composta de duas funções. (Faça as contas!!!)*

- **Não confundir:**

$$f^2 = f\circ f \neq f.f = (f)^2$$

<u>*Exemplos:*</u>

1) *Seja* $f(x)=e^{\frac{1}{x-3}}$ *e* $g(x)=\log_2 x$. *Determine o domínio e a expressão analítica das funções* $f\circ g$ *e* $g\circ f$.

   <u>Resolução:</u>

$$D_f = IR\backslash\{3\} \qquad D_g = IR^+$$

$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \{x\in IR: \ x\in D_g \ \wedge \ g(x)\in D_f\} \\ &= \{x\in IR: \ x\in IR^+ \ \wedge \ \log_2 x\neq 3\} \\ &= \{x\in IR: \ x\in IR^+ \ \wedge \ x\neq 2^3\} \\ &= IR^+\backslash\{8\} \end{aligned}$$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\log_2 x)=e^{\frac{1}{\log_2 x-3}}$$

$$\begin{aligned} D_{g\circ f} &= \{x\in IR: \ x\in D_f \ \wedge \ f(x)\in D_g\} \\ &= \left\{x\in IR: \ x\neq 3 \ \wedge \ e^{\frac{1}{x-3}}>0\right\} \\ &= \{x\in IR: \ x\neq 3\} \\ &= IR\backslash\{3\} \end{aligned}$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(e^{\frac{1}{x-3}}\right)=\log_2 e^{\frac{1}{x-3}}=\frac{\log_2 e}{x-3}=\frac{1}{(x-3)\ln 2}$$

2) *Seja* $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2$ *e* $h(x)=x$. *Verifique que* $(g\circ f)(x)=x$.

Resolução:

$D_f = IR_0^+ \qquad\qquad D_g = IR$

$$
\begin{aligned}
D_{g\circ f} &= \{x \in IR: \quad x \in D_f \quad \wedge \quad f(x) \in D_g\} \\
&= \{x \in IR: \quad x \in IR_0^+ \quad \wedge \quad \sqrt{x} \in IR\} \\
&= \{x \in IR: \quad x \geq 0\} \\
&= IR_0^+
\end{aligned}
$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$

Nota:

- ***Atenção:*** *no exemplo anterior, embora* $h(x) = x = (g \circ f)(x)$ *, temos que* $D_{g\circ f} = IR_0^+$ *e* $D_h = IR$*, e portanto* $h \neq g \circ f$ *. Convém lembrar que duas funções são iguais se os seus domínios forem iguais.*
- *Em geral, a composição de funções* ***não comuta****, isto é,* $g \circ f \neq f \circ g$ *(ver o primeiro exemplo).*
- *Não podemos recorrer à expressão analítica da função composta para calcular o seu domínio (ver o segundo exemplo).*

Exercício:

Caracterize as funções $f \circ g$ e $g \circ f$.

a) considerando $f(x) = \sqrt{1-x}$ e $g(x) = x^2$;

b) considerando $f(x) = \sqrt{x+2}$ e $g(x) = ln(x+1)$.

2.3.1. Transformações em funções

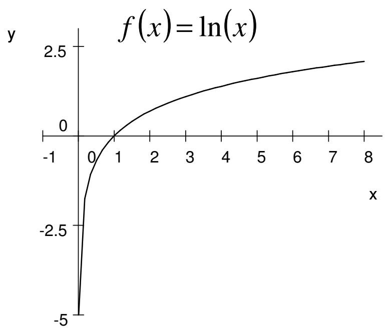
Translações horizontais:

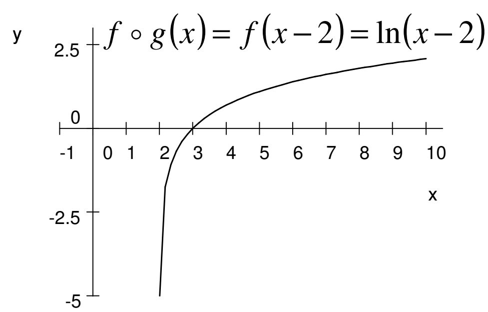
Seja f uma função real de variável real, c uma constante real qualquer, e, seja g uma função afim, f.r.v.r., definida por $g(x) = x - c$. Comparando o gráfico da função f com o da função $f \circ g(x) = f(x-c)$, observamos que o gráfico de $f(x-c)$ corresponde a uma translação horizontal de gráfico de f segundo o vector $\vec{v} = (c, 0)$.

Exemplos:

1. *Consideremos $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = x - 2$, $f \circ g(x) = f(x-2)$.*

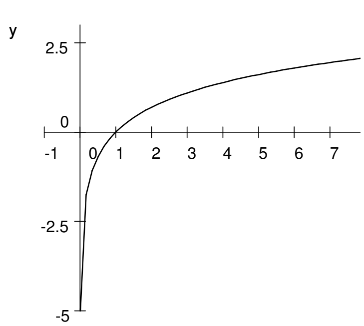
   Note-se que $f(x-2)$ obtém-se a partir de $f(x)$ fazendo uma translação horizontal de 2 unidades para a direita. Comparemos os gráficos:



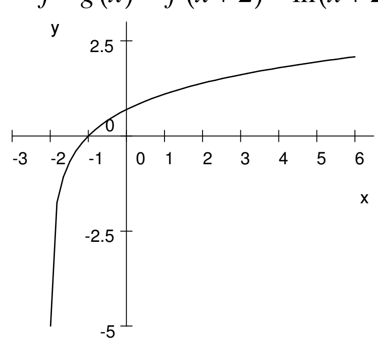


2. *Consideremos $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = x + 2$. Note-se que o gráfico de $f \circ g(x) = f(x+2) = \ln(x+2)$ obtém-se a partir do gráfico de f fazendo uma translação horizontal de 2 unidades para a esquerda. Comparemos os gráficos:*

$f(x) = \ln(x)$



$f \circ g(x) = f(x+2) = \ln(x+2)$



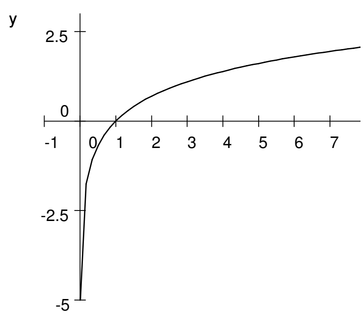
Translações verticais:

Seja f uma função real de variável real qualquer, e, seja g uma função, f.r.v.r., afim definida por $g(x) = x + c$. Comparando o gráfico da função f com o da função $g \circ f(x) = f(x) + c$, observamos que o gráfico de $f(x) + c$ corresponde a uma translação vertical de f segundo o vector $\vec{v} = (0, c)$.

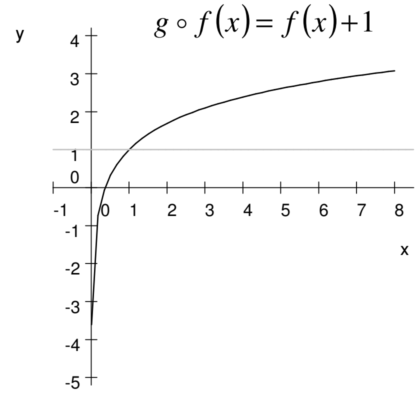
<u>*Exemplos:*</u>

1. *Consideremos* $f(x) = ln(x)$ *e* $g(x) = x + 1$. *Note-se que* $g \circ f(x) = f(x) + 1 = \ln(x) + 1$ *obtém-se a partir de* $f(x)$ *fazendo uma translação vertical de 1 unidade para cima. Comparemos os gráficos:*

$f(x) = \ln(x)$

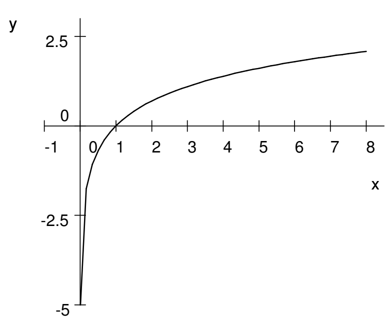


$g \circ f(x) = f(x) + 1$

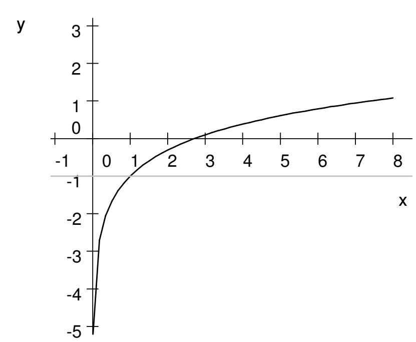


2. *Consideremos* $f(x) = \ln(x)$ *e* $g(x) = x - 1$. *Note-se que* $g \circ f(x) = f(x) - 1 = \ln(x) - 1$ *obtém-se a partir de* $f(x)$ *fazendo uma translação vertical de 1 unidade para baixo. Comparemos os gráficos:*

$f(x) = \ln(x)$



$g \circ f(x) = f(x) - 1 = \ln(x) - 1$



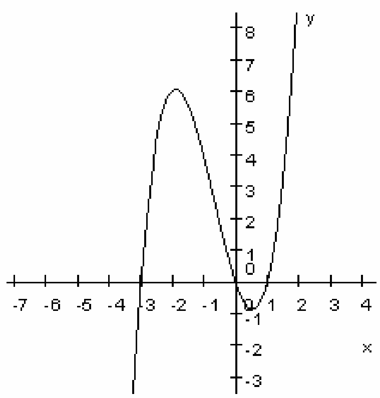
Homotetias do eixo horizontal:

Seja f uma função real de variável real, c uma constante real qualquer, e, seja g uma função afim, f.r.v.r., definida por $g(x) = cx$. O gráfico de $f \circ g(x) = f(cx)$ obtém-se a partir do de f dilatando ou contraindo o eixo dos $xx\acute{}s$ conforme se tenha $0 < c < 1$ ou $c > 1$, respectivamente.

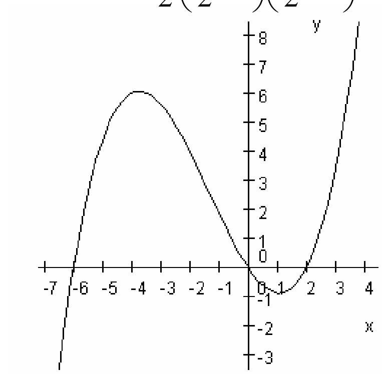
<u>*Exemplo:*</u>

Consideremos $f(x) = x(x-1)(x+3)$ *e* $g(x) = \dfrac{x}{2}$. *Note-se que* $f \circ g(x) = \dfrac{x}{2}\left(\dfrac{x}{2}-1\right)\left(\dfrac{x}{2}+3\right)$ *obtém-se a partir de* $f(x)$ *"esticando" o eixo dos* $xx\acute{}s$. *Comparemos os gráficos:*

$f(x) = x(x-1)(x+3)$



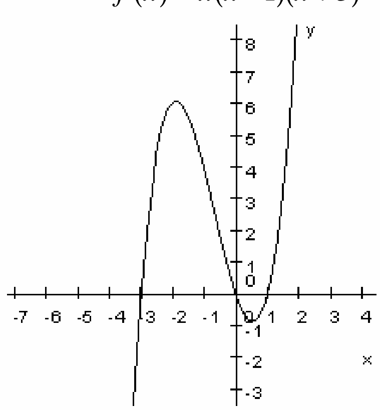
$f \circ g(x) = \dfrac{x}{2}\left(\dfrac{x}{2}-1\right)\left(\dfrac{x}{2}+3\right)$



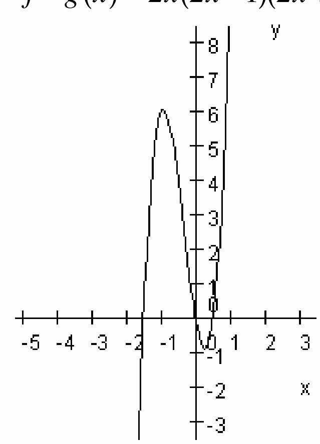
<u>*Exemplo:*</u>

Consideremos $f(x) = x(x-1)(x+3)$ *e* $g(x) = 2x$. *Note-se que* $f \circ g(x) = 2x(2x-1)(2x+3)$ *obtém-se a partir de* $f(x)$ *"encolhendo" o eixo dos* $xx\acute{}s$. *Comparemos os gráficos:*

$f(x) = x(x-1)(x+3)$



$f \circ g(x) = 2x(2x-1)(2x+3)$



Homotetias do eixo vertical:

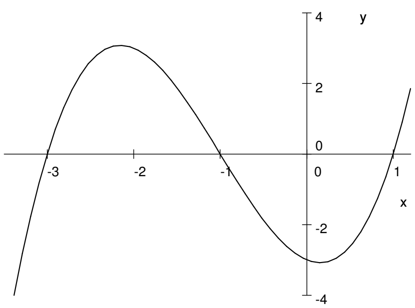
Seja f uma função real de variável real, c uma constante real qualquer, e, seja g uma função afim, f.r.v.r., definida por $g(x) = cx$. O gráfico de $f \circ g(x) = cf(x)$ obtém-se a partir do de f dilatando ou contraindo o eixo dos *yy´s* conforme se tenha $c > 1$ ou $0 < c < 1$, respectivamente.

<u>*Exemplo:*</u>

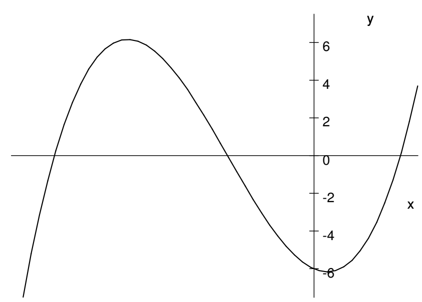
Consideremos $f(x) = (x-1)(x+1)(x+3)$ *e* $g(x) = 2x$. *Note-se que* $g \circ f(x) = 2(x-1)(x+1)(x+3)$ *obtém-se a partir de* $f(x)$ *"esticando" o eixo dos* $yy´s$.

Comparemos os gráficos:

$f(x) = (x-1)(x+1)(x+3)$



$g \circ f(x) = 2(x-1)(x+1)(x+3)$

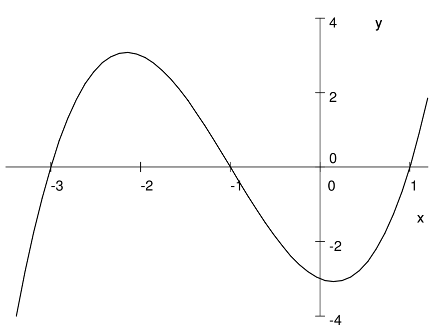


<u>*Exemplo:*</u>

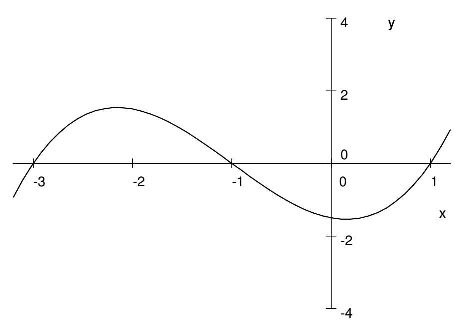
Consideremos $f(x) = (x-1)(x+1)(x+3)$ *e* $g(x) = \frac{1}{2}$. *Note que* $g \circ f(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x+3)}{2}$ *obtém-se a partir de* $f(x)$ *"encolhendo" o eixo dos* $yy´s$.

Comparemos os gráficos:

$f(x) = (x-1)(x+1)(x+3)$



$g \circ f(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x+3)}{2}$



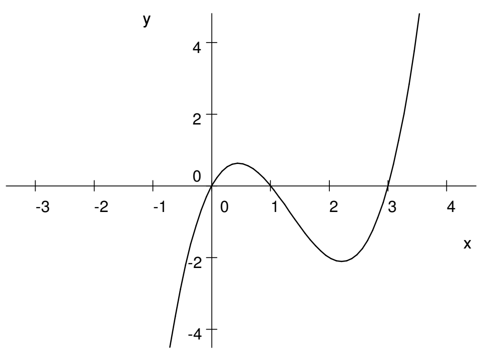
Módulo de uma função

Seja f uma f.r.v.r., e $g(x)=|x|$. O gráfico de $g \circ f(x)=|f(x)|$ obtém-se a partir do de f reflectindo no eixo dos *xx*'s a parte negativa da função.

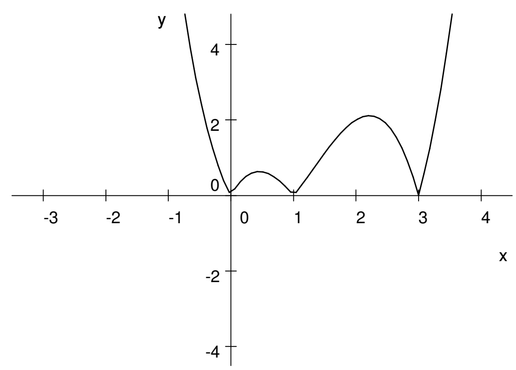
Exemplo:

Comparemos os gráficos:

$f(x)=x(x-1)(x-3)$



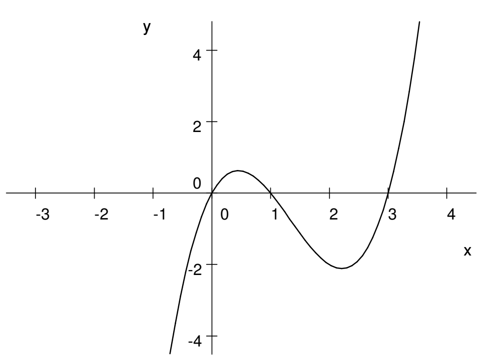
$g(x)=|f(x)|$



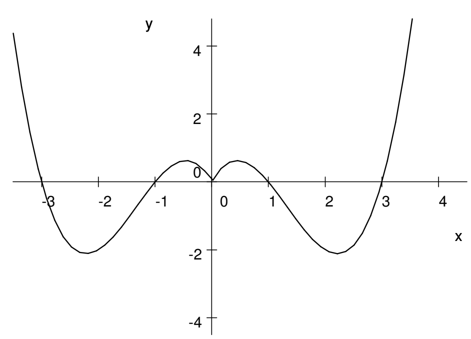
Vejamos agora o que acontece, se aplicarmos a função módulo ao argumento de f, isto é, fazendo a composição $f \circ g(x)=f(|x|)$:

Exemplo:

$f(x)=x(x-1)(x-3)$



$f(|x|)$



O que se passa é que o gráfico correspondente à parte positiva do domínio de f é reflectido no eixo dos yy's, e portanto a função $f(|x|)$ é uma função par.

2.3.2. Função Inversa

Seja f uma função injectiva. Sejam D_f e $\mathrm{Im}(f)$ respectivamente o domínio e a imagem (ou contradomínio) da função f. À única função $g:\mathrm{Im}(f) \to D_f$ que satisfaz:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (f \circ g)(x) = x & \forall\, x \in \mathrm{Im}(f) \\ (g \circ f)(x) = x & \forall\, x \in D_f \end{array}}$$

chama-se ***função inversa*** de f e escreve-se $g = f^{-1}$.

Nota:

- *Só podemos definir f^{-1} se f for injectiva (num determinado domínio);*
- *Se f^{-1} é a inversa de f então f é a inversa de f^{-1};*
- *Por definição, $D_{f^{-1}}$ é igual à* $\mathrm{Im}(f)$, sendo f uma função injectiva;
- $\mathrm{Im}(f^{-1}) = D_f$.

Caracteriza-se a inversa de uma função da seguinte forma:

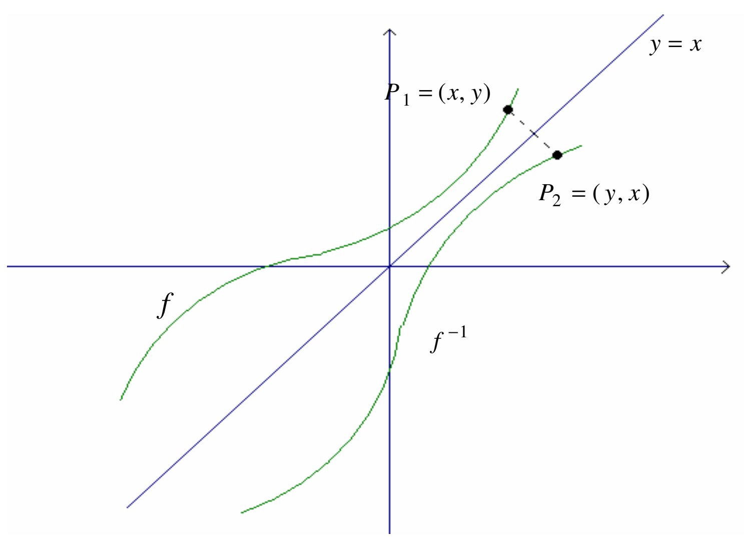
$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathrm{Im}(f) & \to & D_f \\ & y & \mapsto & x \end{array}$$

ou seja, sabendo que $f(x) = y$, então a função inversa define-se por $f^{-1}(y) = x$.

Repare que, por definição de inversa de uma função temos $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(x) = f\left(f^{-1}(y)\right) = y$.

Graficamente, tem-se que

$$(x, y) \in Gr(f) \;\Leftrightarrow\; y = f(x) \;\Leftrightarrow\; x = f^{-1}(y) \;\Leftrightarrow\; (y, x) \in Gr(f^{-1})$$



Seja $P_1 = (x, y) \in Gr(f)$ e $P_2 = (y, x) \in Gr(f^{-1})$, o ponto médio do segmento que une estes pontos é o ponto $M = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y+x}{2} \right)$ que é um ponto que pertence à recta $y = x$. Podemos concluir, então que os gráficos de f e f^{-1} são **simétricos** relativamente à recta $y = x$.

Pergunta:

Porque é que só podemos definir função inversa para funções injectivas?

Resposta:

Repare que se f não for injectiva acontece, pelo menos uma vez, a seguinte situação:

$$x_1, x_2 \in D_f, \quad x_1 \neq x_2 \quad e \quad f(x_1) = y = f(x_2)$$

e então a função inversa, f^{-1}, *terá de enviar* y em x_1 e x_2, ao mesmo tempo, isto é,

$$\begin{cases} (x_1, y) \\ (x_2, y) \end{cases} \in Gr(f) \iff \begin{cases} y = f(x_1) \\ y = f(x_2) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = f^{-1}(y) \\ x_2 = f^{-1}(y) \end{cases} \iff \begin{cases} (y, x_1) \\ (y, x_2) \end{cases} \in Gr(f^{-1})$$

e portanto f^{-1} *tem duas imagens para o seu objecto y. Mas isto contraria a definição de função, consequentemente isto não poderá acontecer, ou seja, f tem de ser injectiva para que exista a função* f^{-1}.

<u>Não confundir!!!</u>

$f^{-1}(x)$ com $\dfrac{1}{f(x)}$

f^{-1} designa a inversa f enquanto $\dfrac{1}{f}$ representa $(f)^{-1}$

<u>*Exemplo:*</u>

1. *A inversa da função* $f(x) = \ln x$ *em* $]0, +\infty[$ *é a função* $f^{-1}(x) = e^x$

   Temos:

$$\begin{array}{lll} \left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x & \forall \quad x \in IR & \\ & & \text{(verifique!!!)} \\ \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x & \forall \quad x \in \left]0, \infty\right[& \end{array}$$

2. *Caracterizar a função inversa de* $f(x)=\sqrt{x-4}$

$D_f=[4,\infty[$*;* $\mathrm{Im}(f)=IR_0^+$

Para determinar a expressão analítica da inversa:

$$\begin{aligned} &\sqrt{x-4}=y && \text{iguala-se a } y \text{ a expressão de } f \\ \Rightarrow\ & x-4=y^2 && \text{resolve-se a equação em ordem a } x \\ \Rightarrow\ & x=y^2+4 && \end{aligned}$$

Caracterização inversa:

$$\begin{aligned} f^{-1}:\ \mathrm{Im}(f)=IR_0^+ &\to [4,+\infty[\\ x &\mapsto x^2+4 \end{aligned}$$

Nota:

Por definição de função inversa temos $D_{f^{-1}}=\mathrm{Im}(f)$;

Esta igualdade ajuda-nos a determinar, em casos mais complicados, a $\mathrm{Im}(f)$, pois basta determinar a expressão analítica da função inversa e calcular o seu domínio;

Contudo só podemos fazer isto quando a expressão analítica de f^{-1} define, por si só, uma função injectiva. (Nota, uma função inversa é sempre injectiva, o que pode não ser injectiva é uma função que tenha a mesma expressão analítica de f^{-1}). Por exemplo, no anterior exemplo 2, $f^{-1}(x)=x^2+4$ definida em $D_{f^{-1}}=IR_0^+=\mathrm{Im}(f)$ é injectiva, mas tem-se que $D_{(x^2+4)}=IR$, ou seja, a expressão analítica da função inversa, por si só, não verifica $IR=D_{(x^2+4)}=\mathrm{Im}(f)=IR_0^+$, mas isto acontece porque, por si só, a expressão analítica de f^{-1}, (x^2+4), não é injectiva.

Exercício:

Verifique que a função $f(x)=\dfrac{x+2}{2x-1}$ coincide com a sua inversa.

(Sugestão: calcular $f\circ f$).

2.4. Função exponencial e logaritmo. Funções trigonométricas directas e inversas.

Função exponencial:

*A uma função $f: IR \to IR$ definida por $f(x) = a^x$, onde $a \in \mathrm{IR}$, $a > 0$ e $a \neq 1$, dá-se o nome de **função exponencial de base a**.*

Exemplos destas funções são $f(x) = 2^x$; $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $h(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$; $i(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$;

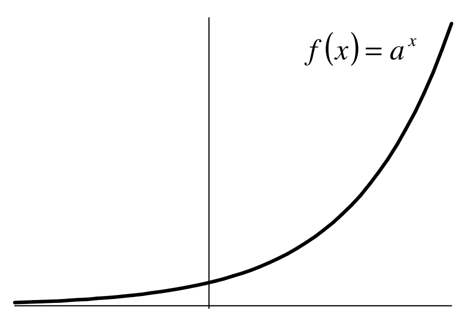
$f(x) = e^x$ – esta função é particularmente importante pelas suas aplicações em diversas áreas do conhecimento, nomeadamente na área da Economia.

Nota:

- *O número "e" é irracional ($e = 2{,}71828182845\ldots$), e é conhecido por **constante de Euler***
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

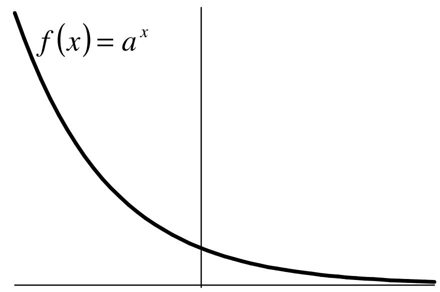
Características destas funções:

Se $a > 1$



- Domínio: $D_f = IR$
- Contradomínio: $\mathrm{Im}(f) = IR^+$
- Zeros: *não tem zeros.*
- $f(0) = 1 \quad (\Leftrightarrow \quad a^0 = 1)$
- O gráfico de f passa no ponto $(0,1)$
- Injectiva
- Estritamente crescente, em particular se $x > 0 \quad \Rightarrow \quad a^x > 1$

Se $0 < a < 1$



- Domínio: $D_f = IR$
- Contradomínio: $\mathrm{Im}(f) = IR^+$
- Zeros: *não tem zeros.*
- $f(0) = 1$
- O gráfico de f passa no ponto $(0,1)$
- Injectiva
- Estritamente decrescente. (Note-se que agora $a^x > 1$ quando $x < 0$)

Função logaritmo:

A função inversa da função exponencial é a função

$$f : IR^+ \to IR \text{ que se define por } f(x) = \log_a(x)$$

onde $a \in \mathrm{IR}$, $a > 0$ *e* $a \neq 1$, *à qual se dá o nome de* ***função logaritmo de base a****.*

<u>**Nota:**</u>

- $\log_a(x)$ representa o número y pelo qual se eleva a de modo a obter x, isto é,

$$\log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

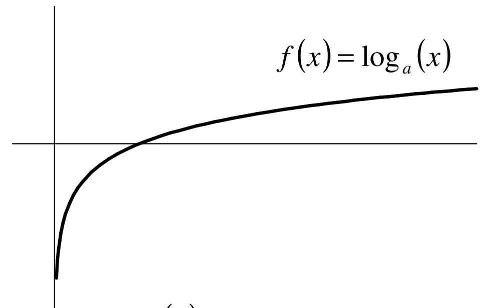
Desta equivalência resulta também que

$$x = a^{\log_a(x)} \quad e \qquad \log_a(a^y) = y$$

- $\log_a(x)$ é a função inversa da função a^x.
- Notação:
  - ⇨ $\log_a(x)$ *logaritmo de base* a
  - ⇨ $\log(x)$ *logaritmo de base* 10
  - ⇨ $\ln(x)$ *logaritmo de base* e, *estes logaritmos chamam-se neperianos, em homenagem ao matemático inglês Neper.*

Características destas funções:

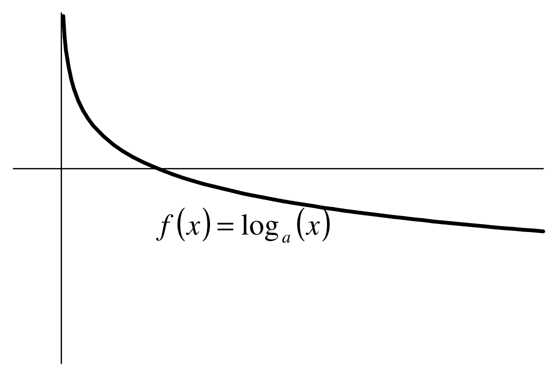
Se $a > 1$



- Domínio: $D_f = \{x \in \mathrm{R} : x > 0\} = \mathrm{R}^+$
- Contradomínio: $\mathrm{Im}(f) = IR$
- Zeros: $x = 1 \quad (\Leftrightarrow \quad \log_a(1) = 0)$
- O gráfico passa no ponto (1,0)
- Injectiva e sobrejectiva (bijectiva)
- Estritamente crescente, em particular, *se* $x < 1 \Rightarrow \log_a(x) < 0$

Exemplos deste tipo de funções são $f(x) = \log_2(x)$; $g(x) = \log_{10}(x)$; $h(x) = \ln(x)$.

Se $0 < a < 1$



- Domínio: $D_f = \{x \in \mathrm{R} : x > 0\} = \mathrm{R}^+$
- Contradomínio: $\mathrm{Im}(f) = IR$
- Zeros: $x = 1 \quad (\Leftrightarrow \quad \log_a(1) = 0)$
- *O gráfico passa no ponto* (1,0)
- *Injectiva e sobrejectiva (bijectiva)*
- *Estritamente crescente, em particular, se* $x < 1 \Rightarrow \log_a(x) < 0$

Exemplos deste tipo de funções são $f(x) = \log_{0,5}(x)$; $g(x) = \log_{1/e}(x)$

Propriedades dos logaritmos:

Sejam $x, y \in IR^+, 1 \neq a > 0, p \in IR$

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(x^p) = p \log_a(x)$
- $\log_a(a) = 1$

- $\log_a(1) = 0$
- $\boxed{\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$ (fórmula de **mudança de base**)

  Em particular, $\log_{1/e}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln\left(\frac{1}{e}\right)} = \frac{\ln(x)}{\ln(1) - \ln(e)} = -\ln(x)$

Exercícios:

1. O capital acumulado a prazo ao fim de **n** anos, quando capitalizado de forma contínua, pode ser calculado através da função $\mathbf{C(n) = C_0\, e^{tn}}$, em que $\mathbf{C_0}$ representa a quantidade depositada e **t** a taxa de juro anual (na forma decimal).

   Supondo $\mathbf{C_0}$ **= 10000 euros** e **t = 5%**, determine:

   a. A quantidade acumulada ao fim de um, de dois e de quatro anos e meio.

   b. Aproximadamente ao fim de quanto tempo duplica o capital?

2. O lucro **L** (em euros) obtido na venda de uma peça depende do número x de unidades produzidas mensalmente. Esta relação é dada por

$$L(x) = \log\left(10 + \frac{x}{4}\right).$$

   a. Se a fábrica tiver a capacidade de produzir entre 500 e 800 unidades por mês, entre que valores variará o lucro obtido em cada peça?

   b. Qual deverá ser o número de unidades produzidas num mês para que o lucro unitário seja 3 €?

3. Seja $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

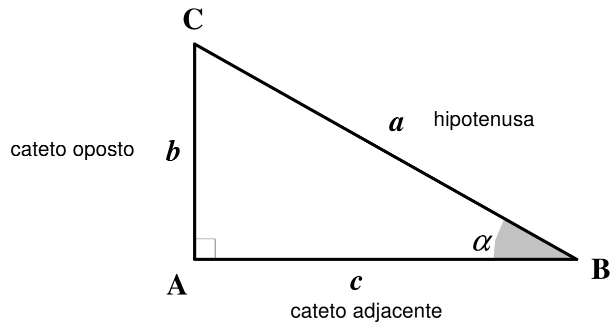
   a. Indique o domínio e contradomínio.

   b. Classifique-a quanto à injectividade, monotonia e paridade.

   c. Considere a função f definida em [0, 2 [. Caracterize a sua inversa (isto é, indique o domínio e expressão analítica que define f^{-1})

Funções Trigonométricas (directas)

Considere-se um triângulo $[ABC]$ rectângulo em A.



Seja $\alpha = A\hat{B}C$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$

Define-se:

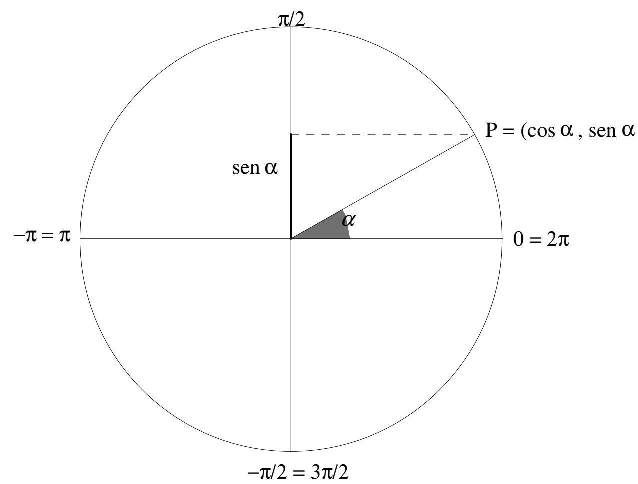
$$sen\alpha = \frac{b}{a} = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} \qquad cos\,\alpha = \frac{c}{a} = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

$$tg\alpha = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{b}{c} \qquad cotg\,\alpha = \frac{1}{tg(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{sen(\alpha)} = \frac{c}{b}$$

Alguns valores de referências destas funções:

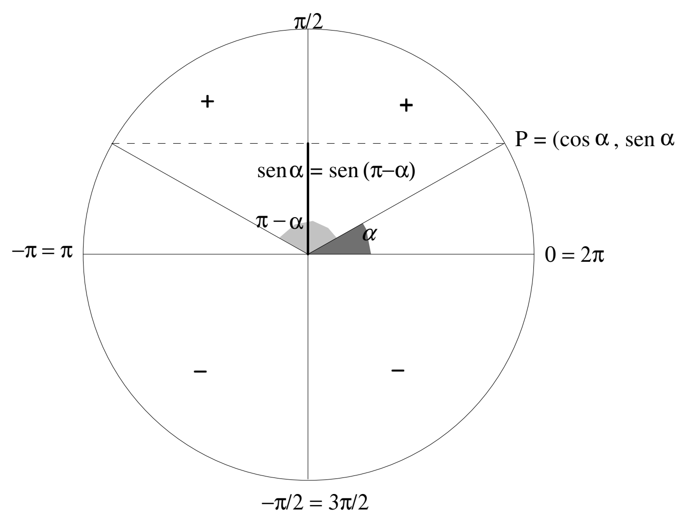
θ radianos	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$sen\theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$tg\theta$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-	0
$cotg\,\theta$	-	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	-

Função sen:



Seja α um ângulo representado no **círculo trigonométrico** *(círculo de raio 1).*

$sen(\alpha)$ corresponde ao valor da ordenada do ponto que resulta da intersecção entre a circunferência e o segmento que determina o ângulo com o eixo dos xx's (medido no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio), de acordo com a figura ao lado.



Assim, dado um ângulo α temos as seguintes relações:

(i) $sen(\alpha) = sen(\pi - \alpha)$ e

(ii) $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$

Notar que a função seno toma valores positivos nos 1º e 2º quadrantes e valores negativos no 3º e 4º quadrantes.

As relações anteriores permitem-nos determinar o seno de qualquer ângulo α conhecendo apenas o valor do seno no 1º Quadrante.

<u>*Exemplo:*</u>

$\frac{5\pi}{4} \in$ 3º quadrante

$$sen\left(\frac{5\pi}{4}\right) \overset{(i)}{=} sen\left(\pi - \frac{5\pi}{4}\right) = sen\left(-\frac{\pi}{4}\right) \overset{(ii)}{=} - sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

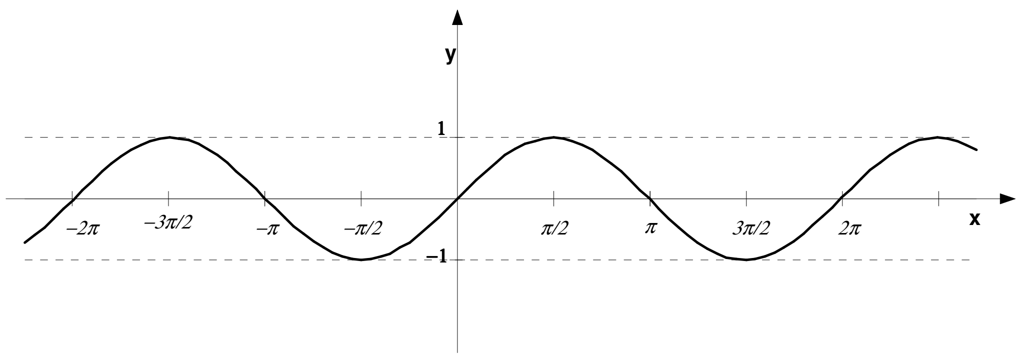
Como função real de variável real, temos

$$\begin{array}{rccc} f: & IR & \to & IR \\ & x & \mapsto & sen(x) \end{array}$$

À função f dá-se o nome de ***função seno****.*

Atenção: x é a medida de um ângulo em radianos $(\pi\, rad = 180º)$

O seu gráfico é



Características desta função:

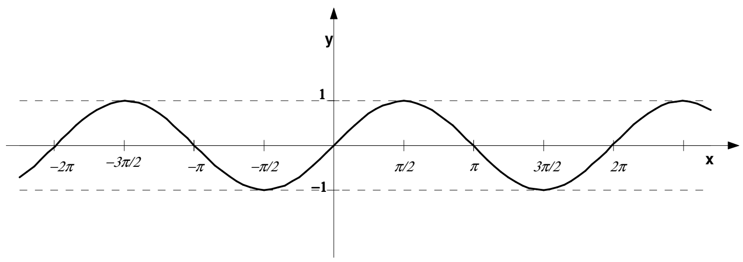
- Domínio: *IR;*
- Contradomínio: $\mathrm{Im}(f) = [-1,1]$;
- Injectividade: *não injectiva;*
- Zeros: $x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$;
- Paridade: $\forall x \quad sen(-x) = -sen(x)$ *(seno é uma função ímpar);*
- Periodicidade: $\forall x \quad sen(x + 2\pi) = sen(x)$ (2π é o período positivo mínimo);
- Limitada: $\forall x \quad -1 \leq sen(x) \leq 1$;
- Máximos: em $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$;
- Mínimos: em $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$;

Função arcsen:

Consideremos a função

$$\begin{array}{rccc} f: & IR & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & sen(x) \end{array}$$

Esta função não é injectiva

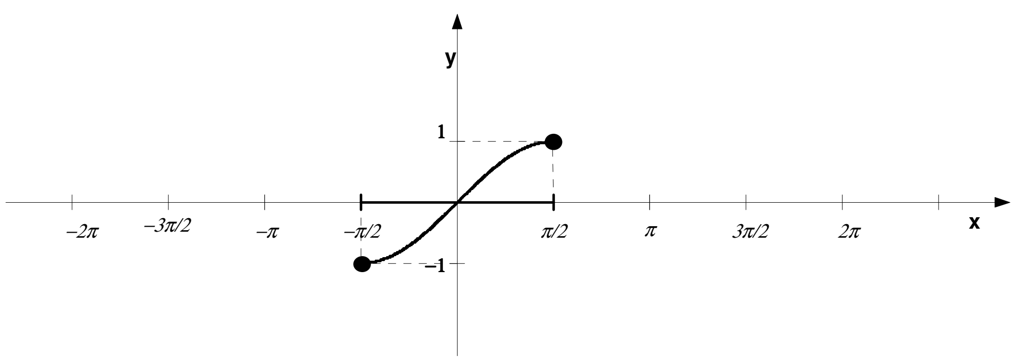


Por exemplo, há infinitos pontos do domínio que têm por imagem zero ($sen(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=k\pi, \quad k\in Z$). Pelo que f não admite inversa.

Contudo, podemos considerar uma restrição do domínio onde a função *seno* seja injectiva (chamada ***restrição principal***):

$$\begin{array}{rccc} g: & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & sen(x) \end{array}$$

cujo gráfico é:

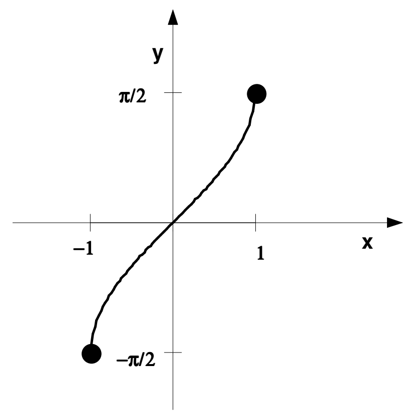


Assim definida, g é uma função injectiva e portanto faz sentido falar na sua inversa, g^{-1}.

Então g^{-1} tem por domínio $[-1,1]$, imagem $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e a cada $x\in[-1,1]$ faz corresponder o ângulo (ou arco) cujo seno é x, que se representa por $arcsen(x)$.

$$\begin{array}{rccc} g^{-1}: & [-1,1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ & x & \mapsto & arcsen(x) \end{array}$$

cujo gráfico é



Características desta função:

- Domínio: $[-1,1]$*;*
- Imagem: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$;
- Injectividade: *injectiva;*
- Zeros: $x=0$;
- Paridade: $\forall x \quad arcsen(-x)=-arcsen(x)$ *(arcsen é uma função ímpar);*
- Monotonia: *estritamente crescente;*
- Limitada: $\forall x \quad -\frac{\pi}{2} \leq arcsen\ (x) \leq \frac{\pi}{2}$*;*
- Máximo *em* $x=1$;
- Mínimo *em* $x=-1$;

Nota:

- *O* $arcsen(x)$ *é o valor real* y *tal que* $sen(y)=x$*, onde* $x\in[-1,1]$*, ou seja:*

$$arcsen(x)=y \quad \Leftrightarrow \quad sen(y)=x$$

- $sen(arcsen(x))=x \quad onde \quad -1\leq x\leq 1;$
- $arcsen(sen(x))=x \quad onde \quad -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}.$

Exemplos:

- $sen\left(arcsen\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}$
- $arcsen\left(sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2}$
- $arcsen\left(sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$ *pois* $\frac{2\pi}{3}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$;
- $sen(arcsen(3))=?$ *(note que* $3\notin\ldots$

Exercício:

Considere a função f definida em IR por:

$$f(x)=\cos\frac{\pi}{4}+2arcsen\left(\frac{x}{2}\right)$$

Determine o domínio e contradomínio de f. Caracterize a inversa.

Resolução:

$$D_f=\left\{x\in IR:-1\leq\frac{x}{2}\leq 1\right\}=\{x\in IR:-2\leq x\leq 2\}=[-2,2]$$

Determinemos o contradomínio de f:

$$\begin{aligned}
-2\leq x\leq 2 \quad &\Leftrightarrow \quad -1\leq\frac{x}{2}\leq 1\\
&\Leftrightarrow \quad arcsen(-1)\leq arcsen\left(\frac{x}{2}\right)\leq arcsen(1)\\
&\qquad \text{(notar que a função } arcsen \text{ é crescente)}\\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2}\leq arcsen\left(\frac{x}{2}\right)\leq\frac{\pi}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad -\pi\leq 2arcsen\left(\frac{x}{2}\right)\leq\pi\\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\pi\leq\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+2arcsen\left(\frac{x}{2}\right)\leq\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\pi\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}-\pi\leq\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+2arcsen\left(\frac{x}{2}\right)\leq\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi
\end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{Im}(f)=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-\pi,\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi\right]$

f é uma função injectiva porque é composta de transformações injectivas (***exercício***)

Comecemos por determinar a expressão analítica da inversa:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+2arcsen\left(\frac{x}{2}\right)=y \Leftrightarrow 2arcsen\left(\frac{x}{2}\right)=y-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow arcsen\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{y}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$\Leftrightarrow sen\left(arcsen\left(\frac{x}{2}\right)\right)=sen\left(\frac{y}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=sen\left(\frac{y}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow x=2sen\left(\frac{y}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

Portanto

$$\begin{array}{llll} f^{-1}: & \left[\frac{\sqrt{2}}{2}-\pi,\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi\right] & \to & [-2,2] \\ & x & \mapsto & 2sen\left(\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \end{array}$$

Exercício:

Dada a função: $f(x)=\frac{\pi}{3}+2arcsen|2x-1|$.

Calcule D_f e CD_f. Verifique que f não tem zeros.

<u>Resolução:</u>

$$\begin{aligned} D_f &= \{x\in IR : |2x-1|\le 1\}=\{x\in IR : -1\le 2x-1\le 1\} \\ &= \{x\in IR : 0\le 2x\le 2\} \\ &= \{x\in IR : 0\le x\le 1\} \\ &= [0,1] \end{aligned}$$

Determinemos a imagem de f:

$$0\le x\le 1 \Leftrightarrow 0\le |2x-1|\le 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}+2arcsen(0)\le \frac{\pi}{3}+2arcsen(|2x-1|)\le \frac{\pi}{3}+2arcsen(1)$$

Logo, $\mathrm{Im}(f)=\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$

Vejamos agora que f não tem zeros:

$$\begin{aligned} f(x)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3}+2arcsen|2x-1|=0 \\ &\Leftrightarrow \quad arcsen|2x-1|=-\frac{\pi}{6} \\ &\Leftrightarrow \quad sen(arcsen|2x-1|)=sen\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad |2x-1|=-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

f não tem zeros, pois a função módulo é sempre não negativa (isto é, ≥ 0).

Exercício:

Considere a função real de variável real definida por:

$$f(x)=arcsen\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

a) Verifique que $D_f=\left]-\infty,-2\right]\cup\left[0,+\infty\right[$.

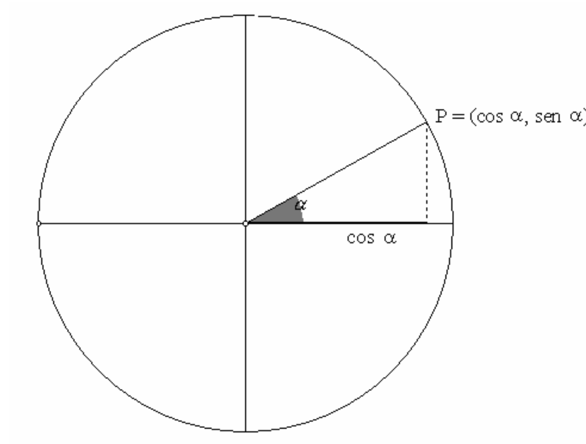
b) Determine a imagem de f

c) Caracterize a função inversa de f, f^{-1}.

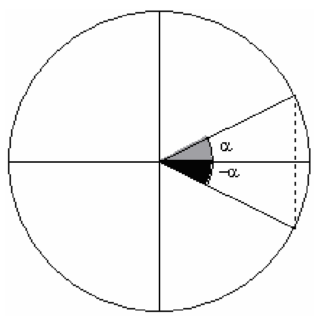
Função cos:

Seja α um ângulo representado **no círculo trigonométrico** (circulo de raio 1).

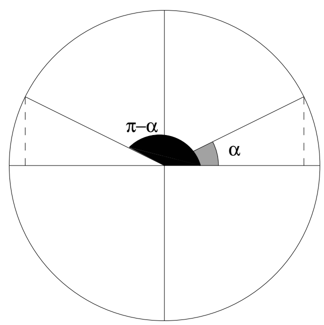
$\cos(\alpha)$ corresponde ao valor da abcissa do ponto que resulta da intersecção entre a circunferência e o segmento que determina o ângulo com o eixo dos $xx's$, conforme se pode ver na figura ao lado.



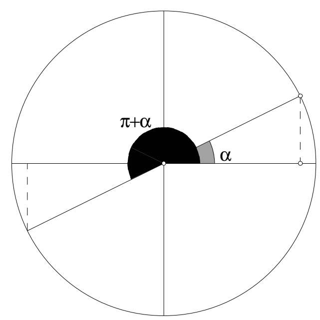
Recorrendo ao círculo trigonométrico, é fácil verificar as seguintes igualdades para um determinado ângulo α:



$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$



$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$



$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$

Assim, usando as igualdades anteriores, é sempre possível determinar o valor do co-seno de um ângulo α conhecendo apenas os valores da função co-seno no 1º quadrante.

<u>Exemplo</u>:

$\frac{4\pi}{3} \in$ 3º quadrante

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\cos\left(\pi - \frac{4\pi}{3}\right) = -\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

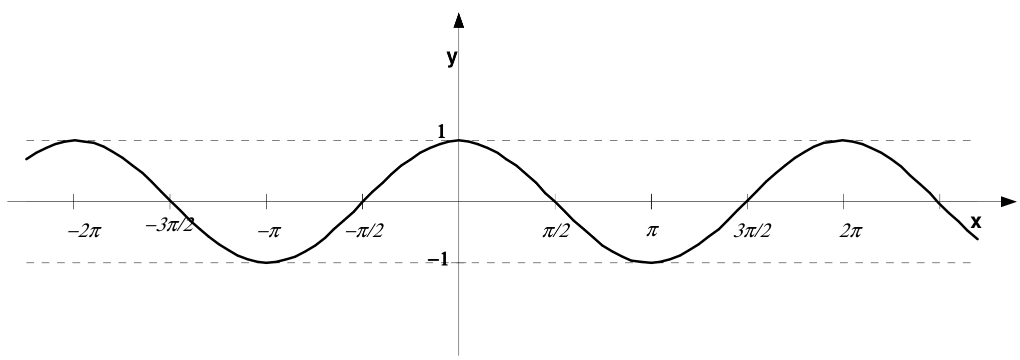
Como função real de variável real, temos

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \cos(x)$$

À função f dá-se o nome de ***função co-seno****.*

(**Nota**: x é a medida de um ângulo em radianos)

O seu gráfico é



Características desta função:

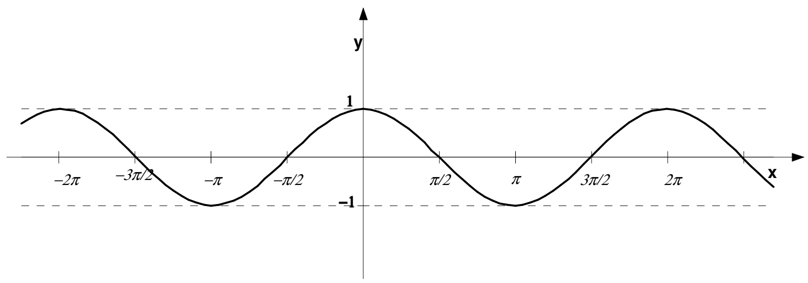
- Domínio: *IR;*
- Contradomínio: $\mathrm{Im}(f) = [-1,1]$;
- Injectividade: *não injectiva;*
- Zeros: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$;
- Paridade: $\forall x \quad \cos(-x) = \cos(x)$ *(co-seno é uma função par);*
- Periodicidade: $\forall x \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ (2π é o período positivo mínimo);
- Limitada: $\forall x \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1$*;*
- Máximos: *em* $x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$;
- Mínimos: *em* $x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Função arccos

Consideremos a função

$$\begin{array}{rccc} f: & IR & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$$

Esta função não é injectiva

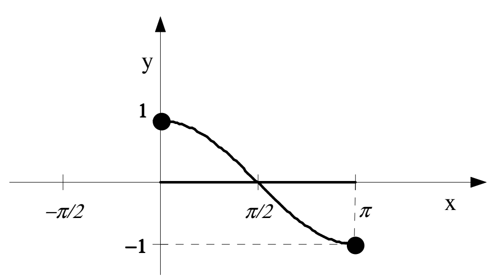


Por exemplo, há infinitos pontos do domínio que têm por imagem zero ($\cos(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in Z$). Pelo que f não admite inversa.

Contudo, podemos considerar uma restrição do domínio onde a função *co-seno* seja injectiva (chamada ***restrição principal***):

$$\begin{array}{rccc} g: & [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$$

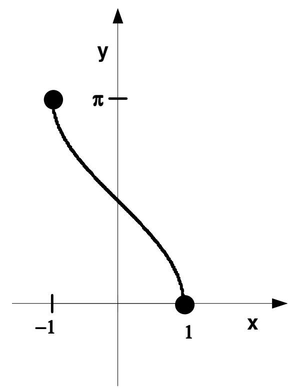
cujo gráfico é:



Assim definida, g é uma função injectiva e portanto faz sentido falar na sua inversa, g^{-1}. Então g^{-1} tem por domínio $[-1,1]$, imagem $[0,\pi]$ e a cada $x\in[-1,1]$ faz corresponder o ângulo (ou arco) cujo co-seno é x, que se representa por $\arccos(x)$.

$$\begin{array}{rccc} g^{-1}: & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ & x & \mapsto & \arccos(x) \end{array}$$

cujo gráfico é



Características desta função:

- Domínio: $[-1,1]$*;*
- Imagem: $[0,\pi]$;
- Injectividade: *injectiva;*
- Zeros: $x = 1$;
- Paridade: *nem é par nem é ímpar*;
- Monotonia: *estritamente decrescente;*
- Limitada: $\forall x \in [-1,1] \quad 0 \leq \arccos\,(x) \leq \pi$*;*
- Máximo *em* $x = -1$;
- Mínimo *em* $x = 1$;

Nota:

- *O* $\arccos(x)$ *é o valor real* y *tal que* $\cos(y) = x$, *onde* $x \in [-1,1]$, *ou seja:*

$$\arccos(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \cos(y) = x$$

- $\cos(\arccos(x)) = x$ *onde* $-1 \leq x \leq 1$*;*
- $\arccos(\cos(x)) = x$ *onde* $0 \leq x \leq \pi$.

Exemplos:

- $cos\left(arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{1}{3}$
- $arccos\left(cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\pi}{6}$
- $arccos\left(cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$ *pois* $\frac{7\pi}{6}\notin[0,\pi]$*;*
- $cos(arccos(-2))=?$ *(note que* $-2\notin\ldots$

Exercício:

Considere a função f definida por:

$$f(x)=\frac{\pi}{3}\operatorname{arccos}|2x-1|$$

Determine o domínio e contradomínio de f. Caracterize a inversa, caso exista.

Resolução:

$$\begin{aligned}D_f &= \{x\in IR : |2x-1|\le 1\}=\{x\in IR : -1\le 2x-1\le 1\}\\ &=\{x\in IR : 0\le 2x\le 2\}\\ &=\{x\in IR : 0\le x\le 1\}\\ &=[0,1]\end{aligned}$$

Determinemos o contradomínio de f:

$$\begin{aligned}0\le x\le 1 &\Leftrightarrow 0\le 2x\le 2\\ &\Leftrightarrow -1\le 2x-1\le 1\\ &\Leftrightarrow 0\le |2x-1|\le 1\\ &\Leftrightarrow \operatorname{arccos}(0)\ge \operatorname{arccos}|2x-1|\ge \operatorname{arccos}(1)\\ &\quad\text{(notar que a função arccos é decrescente)}\\ &\Leftrightarrow 0\le \operatorname{arccos}|2x-1|\le \frac{\pi}{2}\\ &\Leftrightarrow 0\le \frac{\pi}{3}\operatorname{arccos}|2x-1|\le \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

Logo, $\operatorname{Im}(f)=\left[0,\frac{\pi^2}{6}\right]$

A função f não admite inversa, pois não é injectiva:

$$\frac{1}{4},\frac{3}{4}\in D_f \qquad \frac{1}{4}\neq\frac{3}{4} \qquad \text{mas} \qquad f\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{3}\right)^2=f\left(\frac{3}{4}\right)$$

Exercício:

Dada a função: $f(x)=1-\dfrac{\arccos(2x+1)}{2}$.

a) Calcule D_f e CD_f.

b) Caracterize a inversa, caso exista.

c) $\{x\in IR : f(x)=0\}$

<u>*Resolução:*</u>

a)

$$\begin{aligned} D_f &= \{x\in IR : -1\leq 2x+1\leq 1\}=\{x\in IR : -2\leq 2x\leq 0\} \\ &= \{x\in IR : -1\leq x\leq 0\} \\ &= [-1,0] \end{aligned}$$

Determinemos a imagem de f:

$$\begin{aligned} -1\leq x\leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -1\leq 2x+1\leq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \arccos(-1)\geq \arccos(2x+1)\geq \arccos(1) \\ &\Leftrightarrow \quad 0\leq \arccos(2x+1)\leq \pi \\ &\Leftrightarrow \quad 0\geq -\frac{\arccos(2x+1)}{2}\geq -\frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad 1-\frac{\pi}{2}\leq 1-\frac{\arccos(2x+1)}{2}\leq 1 \end{aligned}$$

Logo, $\operatorname{Im}(f)=\left[1-\dfrac{\pi}{2},1\right]$

b) f é uma função injectiva porque é composta de funções injectivas.

$$\begin{aligned} 1-\frac{\arccos(2x+1)}{2}=y \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\arccos(2x+1)}{2}=1-y \\ &\Leftrightarrow \quad \arccos(2x+1)=2(1-y) \\ &\Leftrightarrow \quad 2x+1=\cos(2-2y) \\ &\Leftrightarrow \quad x=\frac{-1+\cos(2-2y)}{2} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} f^{-1}:\ \left[1-\frac{\pi}{2},1\right] &\rightarrow [-1,0] \\ x &\mapsto \frac{-1+\cos(2-2x)}{2} \end{aligned}$$

c) Estudemos os zeros de f

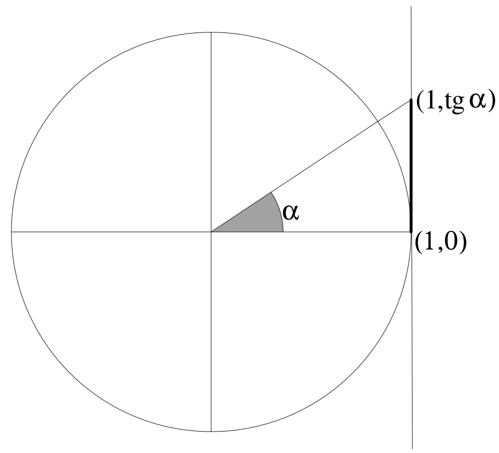
$$
\begin{aligned}
f(x)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1-\frac{\arccos(2x+1)}{2}=0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\arccos(2x+1)}{2}=1 \\
&\Leftrightarrow \quad \arccos(2x+1)=2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x+1=\cos(2) \\
&\Leftrightarrow \quad x=\frac{-1+\cos(2)}{2}
\end{aligned}
$$

f tem um zero em $x=\dfrac{-1+\cos(2)}{2}$.

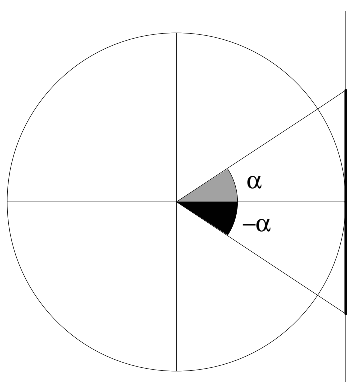
Função tangente

Seja α um ângulo representado no **círculo trigonométrico**.

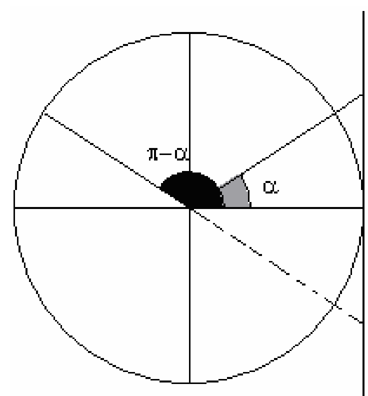
$tg(\alpha)$ corresponde ao valor da ordenada do ponto que resulta de projectar o lado extremidade do ângulo α no eixo paralelo ao eixo das ordenadas e que passa pelo ponto de coordenadas $(1{,}0)$. (ver figura ao lado)



Recorrendo ao círculo trigonométrico é fácil verificar as seguintes igualdades para um determinado ângulo α:



$tg(-\alpha) = -tg(\alpha)$



$tg(\pi - \alpha) = tg(-\alpha)$

Estas igualdades permitem calcular a tangente de um ângulo α conhecendo apenas os seus valores no 1º quadrante.

Exemplo:

$\frac{2\pi}{3} \in$ 2º quadrante

$$tg\left(\frac{2\pi}{3}\right) = tg\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

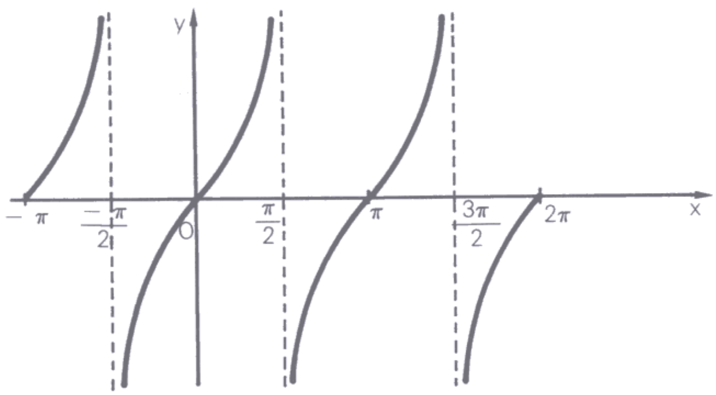
Como função real de variável real, temos

$$f: \quad IR \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} \to IR$$
$$x \mapsto tg(x)$$

À função f dá-se o nome de ***função tangente.***

(**Nota**: x é a medida de um ângulo em radianos)

O seu gráfico é



Características desta função:

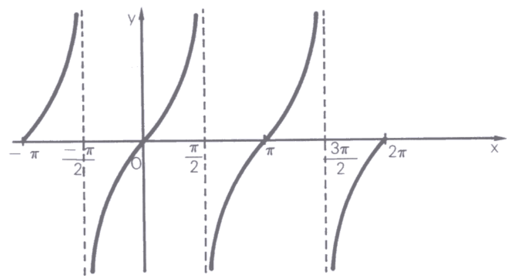
- Domínio: $IR \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$;
- Contradomínio: IR;
- Injectividade: *não injectiva;*
- Zeros: $x = k\pi, \quad k \in Z$;
- Paridade: $\forall x \quad tg(-x) = -tg(x)$ *(tangente é uma função ímpar);*
- Periodicidade: $\forall x \quad tg(x+\pi) = tg(x)$ (π é o período positivo mínimo);
- Limitada: *não limitada;*
- Máximos: *não tem;*
- Mínimos: *não tem.*

Função arco tangente

Consideremos a função

$$f: \quad IR \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow IR$$
$$x \mapsto tg(x)$$

Esta função não é injectiva.

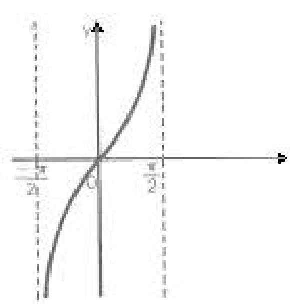


Por exemplo, há infinitos pontos do domínio que têm por imagem zero ($tg(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi, \quad k \in Z$). Pelo que f não admite inversa.

Contudo, podemos considerar uma restrição do domínio onde a função *tangente* seja injectiva (chamada ***restrição principal***):

$$g: \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow IR$$
$$x \mapsto tg(x)$$

cujo gráfico é:

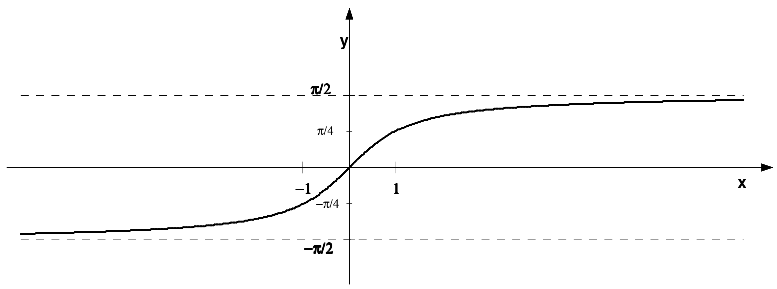


Assim definida, g é uma função injectiva e portanto faz sentido falar na sua inversa, g^{-1}.

Então g^{-1} tem por domínio IR, imagem $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ e a cada $x \in IR$ faz corresponder o ângulo (ou arco) cuja tangente é x, que se representa por $arctg(x)$.

$$\begin{array}{rccl} g^{-1}: & IR & \to & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ & x & \mapsto & arctg(x) \end{array}$$

cujo gráfico é



Características desta função:

- Domínio: IR;
- Contradomínio: $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$;
- Injectividade: *injectiva;*
- Zeros *em* $x = 0$;
- Paridade: $\forall x \quad arctg(-x) = -arctg(x)$ ($arctg$ é uma função ímpar)*;*
- Monotonia: *estritamente crescente;*
- Limitada: $\forall x \quad -\frac{\pi}{2} < arctg(x) < \frac{\pi}{2}$;
- Máximos: *não tem*;
- Mínimos: *não tem*;

Nota:

- *O* $arctg(x)$ *é o valor real* y *tal que* $tg(y) = x$*, onde* $x \in IR$*, ou seja:*

$$arctg(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad tg(y) = x$$

- $tg(arctg(x)) = x \quad onde \quad x \in IR$*;*
- $arctg(tg(x)) = x \quad onde \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Exemplos:

- $tg\left(arctg\left(\frac{1}{7}\right)\right)=\frac{1}{7}$
- $arctg\left(tg\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\pi}{6}$
- $arctg\left(tg\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=arctg\left(tg\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)=arctg\left(tg\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\pi}{6}$ pois $\frac{7\pi}{6}\notin\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Exercício:

Considere a função definida por $f(x)=arctg\left(\frac{1}{1-2x}\right)$.

Determine o domínio e contradomínio de f. Caracterize a inversa, caso exista.

Resolução:

$$D_f=\left\{x\in IR:\frac{1}{1-2x}\in IR\right\}=\{x\in IR:1-2x\neq 0\}=IR\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$\mathrm{Im}(f)=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{arctg(0)\}=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$ pois $\frac{1}{1-2x}$ nunca se anula!

Nota: f é injectiva:

$$f(x)=f(y)\;\Leftrightarrow\; arctg\left(\frac{1}{1-2x}\right)=arctg\left(\frac{1}{1-2y}\right)$$

$$\Leftrightarrow\;\frac{1}{1-2x}=\frac{1}{1-2y}$$

porque $arctg$ é uma função injectiva (recordar!)

$$\Leftrightarrow\;\ldots\;\Leftrightarrow\; x=y$$

Determinemos a expressão analítica da inversa:

$$arctg\left(\frac{1}{1-2x}\right)=y\;\Leftrightarrow\;\frac{1}{1-2x}=tg(y)$$

$$\Leftrightarrow\;1-2x=\cot g(y)\;\Leftrightarrow\;\ldots\;\Leftrightarrow\; x=\frac{1-\cot g(y)}{2}$$

Portanto

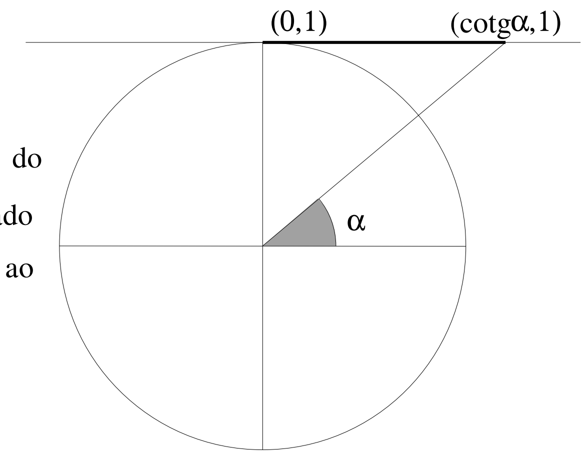
$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\} & \to & IR\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\} \\ & x & \mapsto & \frac{1-\cot g(x)}{2} \end{array}$$

Função co-tangente

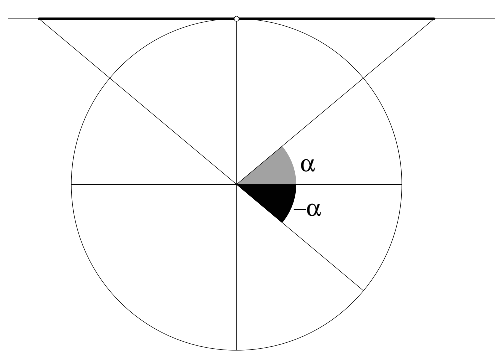
Seja α um ângulo representado no **círculo trigonométrico**.

$cotg(\alpha)$ corresponde ao valor da abcissa do ponto que resulta de projectar o lado extremidade do ângulo α no eixo paralelo ao eixo das abcissas que passa no ponto $(0,1)$.

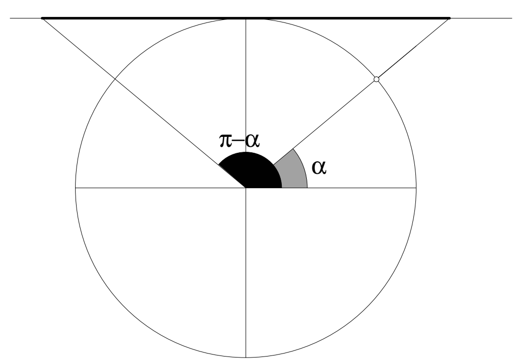
(ver figura ao lado)



Recorrendo ao círculo trigonométrico é fácil verificar as seguintes igualdades para um determinado ângulo α:



$cotg(-\alpha) = cotg(\pi - \alpha) = -cotg(\alpha)$



$cotg(\pi - \alpha) = -cotg(\alpha)$

Estas igualdades permitem calcular a co-tangente de um ângulo α conhecendo apenas os seus valores no 1º quadrante.

<u>*Exemplo:*</u>

$\frac{2\pi}{3} \in$ 2º quadrante

$$cotg\left(\frac{2\pi}{3}\right) = cotg\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -cotg\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

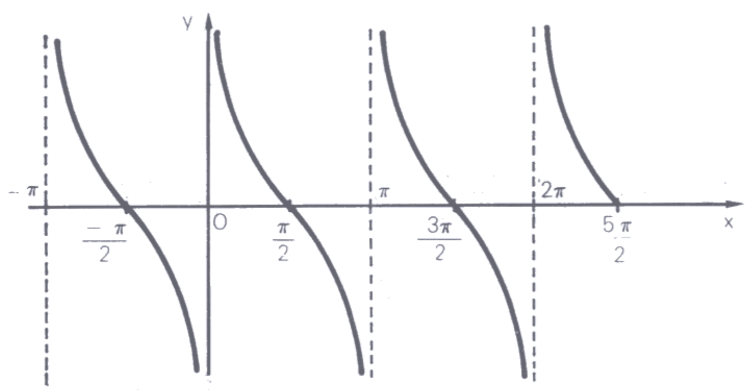
Como função real de variável real, ***temos***

$$\begin{array}{rcl} f: \quad IR \setminus \{k\pi,\ k \in Z\} & \rightarrow & IR \\ x & \mapsto & cotg(x) \end{array}$$

*À função f dá-se o nome de **função co-tangente**.*

(**<u>Nota</u>**: x é a medida de um ângulo em <u>radianos</u>)

O seu gráfico é



<u>Características desta função:</u>

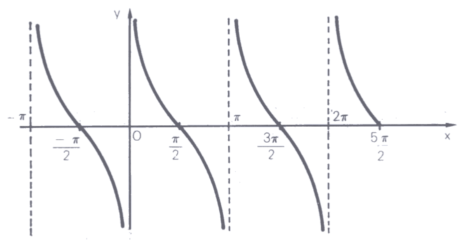
- Domínio: $IR \setminus \{k\pi, \quad k \in Z\}$;
- Contradomínio: IR;
- Injectividade: *não injectiva;*
- Zeros: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z$;
- Paridade: $\forall x \quad cotg(-x) = -cotg(x)$ *(co-tangente é uma função ímpar);*
- Periodicidade: $\forall x \quad cotg(x + \pi) = cotg(x)$ (π é o período positivo mínimo);
- Limitada: *não limitada;*
- Máximos: *não tem;*
- Mínimos: *não tem.*

Função arco co-tangente

Consideremos a função

$$\begin{array}{rccc} f: & IR\setminus\{k\pi,\ k\in Z\} & \to & IR \\ & x & \mapsto & cotg(x) \end{array}$$

Esta função não é injectiva.

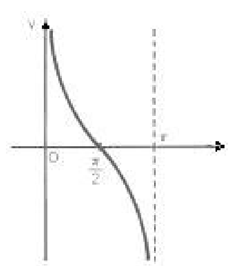


Por exemplo, há infinitos pontos do domínio que têm por imagem zero ($cotg(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in Z$). Pelo que f não admite inversa.

Contudo, podemos considerar uma restrição do domínio onde a função *co-tangente* seja injectiva (chamada ***restrição principal***):

$$\begin{array}{rccc} g: &]0,\pi[& \to & IR \\ & x & \mapsto & cotg(x) \end{array}$$

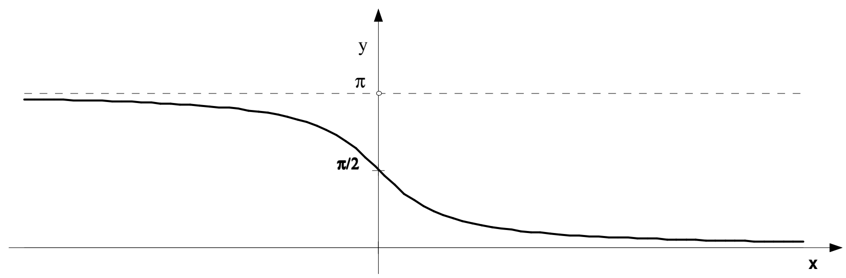
cujo gráfico é:



Assim definida, g é uma função injectiva e portanto faz sentido falar na sua inversa, g^{-1}. Então g^{-1} tem por domínio IR, imagem $]0,\pi[$ e a cada $x\in IR$ faz corresponder o ângulo (ou arco) cuja co-tangente é x, que se representa por $arccotg(x)$.

$$\begin{array}{rccc} g^{-1}: & IR & \rightarrow &]0,\pi[\\ & x & \mapsto & arccotg(x) \end{array}$$

cujo gráfico é



Características desta função:

- Domínio: *IR ;*
- Contradomínio: $]0,\pi[$;
- Injectividade: *injectiva;*
- Zeros *não tem*;
- Paridade: *não é par nem é ímpar;*
- Monotonia: *estritamente decrescente;*
- Limitada: $\forall x \quad 0 < arccotg(x) < \pi$;
- Máximos: *não tem*;
- Mínimos: *não tem*;

Nota:

- *O* $arccotg(x)$ *é o valor real* y *tal que* $cotg(y) = x$*, onde* $x \in IR$*, ou seja:*

$$arccotg(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad cotg(y) = x$$

- $cotg(arccotg(x)) = x \quad onde \quad x \in IR;$
- $arccotg(cotg(x)) = x \quad onde \quad 0 < x < \pi.$

Exemplos:

- $cotg\left(arcccotg\left(\frac{1}{7}\right)\right)=\frac{1}{7}$
- $arcccotg\left(cotg\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\pi}{6}$
- $arcccotg\left(cotg\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=arccotg\left(cotg\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)=arccotg\left(cotg\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\pi}{6}$ pois $\frac{7\pi}{6}\notin\left]0,\pi\right[$.

Exercício:

Considere a função definida por $f(x)=\frac{1}{2}arccotg(x+3)-\frac{\pi}{4}$.

Determine o domínio e contradomínio de f. Caracterize a inversa, caso exista.

Resolução:

$D_f=IR$. Determinemos o contradomínio de f:

$$0<arccotg(x+3)<\pi \quad\Leftrightarrow\quad 0<\frac{1}{2}arccotg(x+3)<\frac{\pi}{2} \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{\pi}{4}<f(x)<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

Logo $\mathrm{Im}(f)=\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$.

f é uma função injectiva porque é composta de funções injectivas.

Determinemos a expressão analítica da inversa:

$$\begin{aligned} f(x)=y &\Leftrightarrow \frac{1}{2}arccotg(x+3)-\frac{\pi}{4}=y \\ &\Leftrightarrow arccotg(x+3)=2y+\frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow x+3=cotg\left(2y+\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x=cotg\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)-3 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[& \to & IR \\ & x & \mapsto & cotg\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-3 \end{array}$$

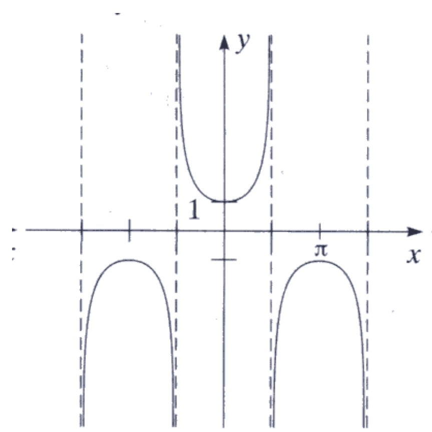
Função secante

A função secante **define-se como**

$$f: \quad IR \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \right\} \to IR$$

$$x \mapsto \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

O seu gráfico é:



<u>Características desta função:</u>

- Domínio: $\{x \in IR : \cos(x) \neq 0\} = IR \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z \right\}$;
- Contradomínio: $IR \setminus [-1,1]$;

  Se $x \in D_{\sec}$, temos $-1 \leq \cos(x) < 0 \quad \vee \quad 0 < \cos(x) \leq 1$

  logo,

$$\frac{1}{-1} \geq \frac{1}{\cos(x)} \quad \vee \quad \frac{1}{\cos(x)} \geq \frac{1}{1}$$

  ou seja,

$$\sec(x) \leq -1 \quad \vee \quad \sec(x) \geq 1$$

  $\therefore \quad \sec(x) \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,\infty\right[$

- Injectividade: *não injectiva;*
- Zeros: *não tem*;
- Paridade: $\forall x \quad \sec(-x) = \dfrac{1}{\cos(-x)} = \dfrac{1}{\cos(x)} = \sec(x)$ (secante *é uma função par);*
- Periodicidade $\forall x \quad \sec(x+2\pi) = \dfrac{1}{\cos(x+2\pi)} = \dfrac{1}{\cos(x)} = \sec(x)$

  (2π é o período mínimo positivo)
- Limitada: *não limitada;*
- Máximo: em $x = \pi + 2k\pi, \quad k \in Z$;
- Mínimo: em $x = 2k\pi, \quad k \in Z$;

<u>Nota:</u>

Os máximos e mínimos referidos nas características da função secante são relativos. No entanto, a função secante não tem extremos absolutos.

Exercício:

Considere a função definida por $f(x) = \dfrac{1}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)} + 2$.

Determine o domínio e o contradomínio. (Sugestão: esboce o gráfico de f usando as transformações descritas nas páginas 26-30)

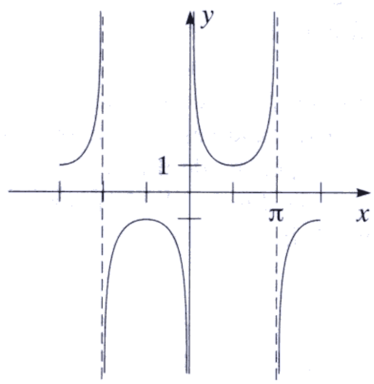
Caracterize a inversa da função f na restrição $x \in \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right] \backslash \left\{\dfrac{2\pi}{3}\right\}$.

Função co-secante

A função co-secante **define-se como**

$$\begin{array}{llll} f: & IR\backslash\{k\pi,\ k\in Z\} & \to & IR \\ & x & \mapsto & \cos ec(x)=\dfrac{1}{sen(x)} \end{array}$$

O seu gráfico é:



Características desta função:

- Domínio: $\{x\in IR: sen(x)\neq 0\}= IR\backslash\{k\pi,\quad k\in Z\}$;
- Contradomínio: $\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$
- Injectividade: *não injectiva;*
- Zeros: *não tem*;
- Paridade: $\forall x \quad co\sec(-x)=\dfrac{1}{sen(-x)}=\dfrac{1}{-sen(x)}=-co\sec(x)$

  *(*co-secante *é uma função ímpar);*
- Periodicidade: $\forall x \quad co\sec(x+2\pi)=\dfrac{1}{sen(x+2\pi)}=\dfrac{1}{sen(x)}=co\sec(x)$

  (2π é o período mínimo positivo)
- Limitada: *não limitada;*
- Máximos: em $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k\in Z$;
- Mínimos: em $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k\in Z$;

Nota:

Os máximos e mínimos referidos nas características da função co-secante são relativos. No entanto, a função secante não tem extremos absolutos.

Exercício:

Considere a função definida por $f(x) = \cos ec\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Determine o domínio e o contradomínio.

Caracterize a inversa da função f na restrição $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$.

Resolução de equações trigonométricas:

Resolução de equações com *senos*

$$\boxed{sen(x) = sen(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + 2k\pi \quad \vee \quad x = (\pi - \alpha) + 2k\pi, \quad k \in Z}$$

Exercício:

Resolva as seguintes equações trigonométricas:

a) $sen(x) = \frac{1}{2}$ b) $sen(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $sen(3x) = -sen(x)$

Resolução:

a)

$$
\begin{aligned}
sen(x) = \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad sen(x) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, \quad k \in Z \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in Z
\end{aligned}
$$

b)

$$sen(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow sen(3x) = -sen\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow sen(3x) = sen\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

(porque a função *sen* é ímpar)

$$\Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad 3x = \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi, \quad k \in Z$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi \quad \vee \quad x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k \in Z$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi \quad \vee \quad x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k \in Z$$

c)

$$sen(3x) = -sen(x) \Leftrightarrow sen(3x) = sen(-x)$$

$$\Leftrightarrow 3x = -x + 2k\pi \quad \vee \quad 3x = (\pi + x) + 2k\pi, \quad k \in Z$$

$$\Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in Z$$

$$\Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, \quad k \in Z$$

Resolução de equações com *co-senos*

$$\boxed{\cos(x) = \cos(\alpha) \Leftrightarrow x = \pm\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathrm{Z}}$$

Exercício:

Resolva as seguintes equações:

a) $\cos(3x) = \frac{1}{2}$ b) $\cos(2x) = -\cos(x)$ c) $\cos(x) = sen(x)$

<u>Resolução</u>:

a)

$$\cos(3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathrm{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathrm{Z}$$

b)

$$\begin{aligned}
\cos(2x) = -\cos(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(2x) = \cos(\pi + x) \\
&\Leftrightarrow \quad 2x = \pm(\pi + x) + 2k\pi, \quad k \in Z \\
&\Leftrightarrow \quad 2x = \pi + x + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = -\pi - x + 2k\pi, \quad k \in Z \\
&\Leftrightarrow \quad x = \pi + 2k\pi \quad \vee \quad 3x = (2k-1)\pi, \quad k \in Z \\
&\Leftrightarrow \quad x = \pi + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{2k-1}{3}\pi, \quad k \in Z
\end{aligned}$$

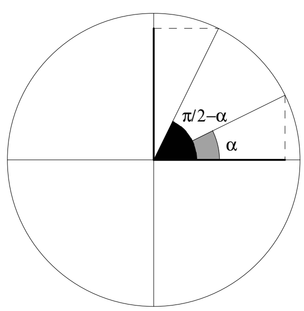
c)

$$\cos(x) = sen(x)$$

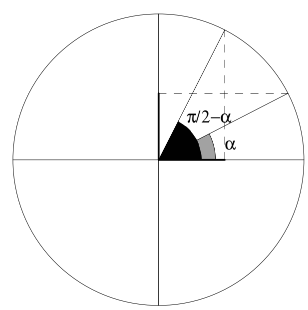
Para resolver esta equação é necessário começar por escrever $sen(x) = \cos(\ldots)$ e seguidamente aplicar a fórmula:

Relações entre *seno* e *co-seno*

Recorrendo ao círculo trigonométrico, é fácil verificar as seguintes igualdades para um determinado ângulo α:



$$\boxed{\cos(\alpha) = sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$



$$\boxed{sen(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

<u>Continuação da resolução do exercício 2 *c)*:</u>

$$\begin{aligned}
\cos(x) = sen(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \ldots
\end{aligned}$$

Resolução de equações com *tangente*

$$\boxed{tg(x) = tg(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Exercício:

Resolva as seguintes equações:

a) $tg(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $tg(3x) = -tgx$

Resolução:

a)

$$tg(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad tg(x) = tg\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in Z$$

b)

$$tg(3x) = -tgx \quad \Leftrightarrow \quad tg(3x) = tg(-x)$$

(porque a função tg é ímpar)

$$\Leftrightarrow \quad 3x = -x + k\pi, \quad k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{k\pi}{4}, \quad k \in Z$$

Resolução de equações com *co-tangente*

$$\boxed{cotg(x) = cotg(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Exercício:

Resolva as seguintes equação:

a) $cotg(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $cotg(3x) = -cotg(x)$ c) $cotg(x) = tg(x)$

Resolução

a)

$$cotg(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad cotg(x) = cotg\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in Z$$

b)

$$cotg(3x) = -cotg(x) \Leftrightarrow cotg(3x) = cotg(-x)$$

(porque a função *cotg* é ímpar)

$$\Leftrightarrow 3x = -x + k\pi, \quad k \in Z$$

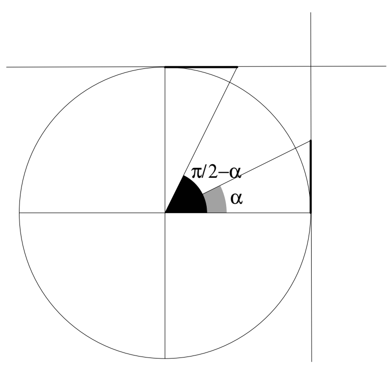
$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}, \quad k \in Z$$

c) $cotg(x) = tg(x)$

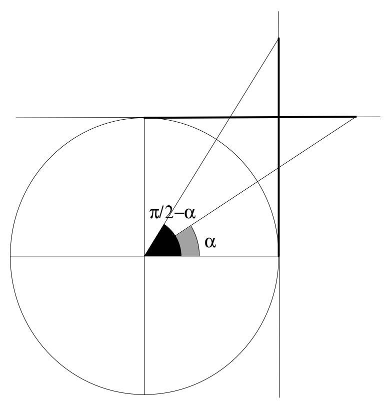
Para resolver esta equação é necessário começar por escrever $tg(x) = cotg(\ldots)$ e seguidamente aplicar a fórmula:

Relação entre *tangente* e *co-tangente*

Recorrendo ao círculo trigonométrico é fácil verificar as seguintes igualdades para um determinado ângulo α.



$$\boxed{tg(\alpha) = cotg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$



$$\boxed{cotg(\alpha) = tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

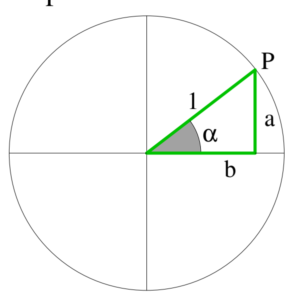
Continuação da resolução do exercício 4 *c)*:

$$cotg(x) = tg(x) \Leftrightarrow cotg(x) = cotg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \ldots$$

Identidades trigonométricas:

- $tg(\alpha)=\dfrac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$
- $cotg\ (\alpha)=\dfrac{\cos(\alpha)}{sen(\alpha)}=\dfrac{1}{tg(\alpha)}$
- $sec(\alpha)=\dfrac{1}{cos(\alpha)}$
- $cosec\,(\alpha)=\dfrac{1}{sen(\alpha)}$
- $sen(-\alpha)=-sen(\alpha)$
- $cos(-\alpha)=cos(\alpha)$
- $tg(-\alpha)=-tg(\alpha)$
- $cotg\,(-\alpha)=-cotg\,(\alpha)$

Vamos ver mais algumas identidades trigonométricas, mas em primeiro lugar vamos deduzir a ***fórmula fundamental da trigonometria***. De acordo com a definição de seno e co-seno de um ângulo α, dado um ponto P da circunferência unitária (com raio igual a 1 – ver figura)



temos que $sen(\alpha)=\dfrac{a}{1}$ e $cos(\alpha)=\dfrac{b}{1}$ pelo que as coordenadas do ponto P são $P=(sen(\alpha),cos(\alpha))$. Como P é um ponto da circunferência temos que a distância do ponto P à origem é $d(0,P)=\sqrt{sen^2(\alpha)+cos^2(\alpha)}=1$, ou seja, $sen^2(\alpha)+cos^2(\alpha)=1$.

$$sen^2(\alpha)+cos^2(\alpha)=1$$

Fórmula fundamental da trigonometria

Outras identidades trigonométricas:

- $1+tg^2(\alpha)=sec^2(\alpha)$
- $1+ctg^2(\alpha)=cos\,ec^2(\alpha)$

- $sen(a \pm b) = sen(a)cos(b) \pm cos(a)sen(b)$
- $cos(a \pm b) = cos(a)cos(b) \mp sen(a)sen(b)$
- $tg(a \pm b) = \dfrac{tg(a) \pm tg(b)}{1 \mp tg(a)tg(b)}$
- $sen(2a) = 2sen(a)cos(a)$
- $cos(2a) = cos^2(a) - sen^2(a)$
- $cos(2a) = 1 - 2sen^2(a)$
- $cos(2a) = 2cos^2(a) - 1$
- $tg(2a) = \dfrac{2tg(a)}{1 - tg^2(a)}$
- $sen^2(a) = \dfrac{1 - cos(2a)}{2}$
- $cos^2(a) = \dfrac{1 + cos(2a)}{2}$
- $sen(a)sen(b) = \dfrac{1}{2}(cos(a-b) - sen(a+b))$
- $sen(a)cos(b) = \dfrac{1}{2}(sen(a+b) + sen(a-b))$
- $cos(a)cos(b) = \dfrac{1}{2}(cos(a+b) + cos(a-b))$

2.5. Exercícios

1. Considere os seguintes esboços.

   a. Indique aqueles que não podem ser gráficos de funções reais de variável real, justificando.

   b. De entre as funções representadas determine os respectivos domínios, contradomínios e indique quais as que são injectivas.

   c. Complete o seguinte quadro, usando o símbolo X para relacionar o gráfico com a respectiva função.

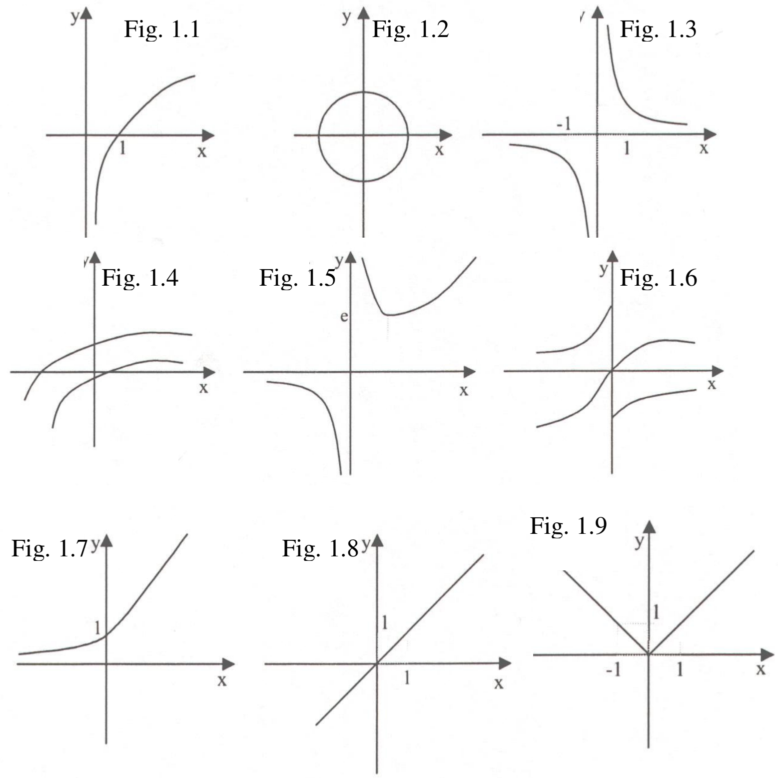


Fig./função	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x									
$\|x\|$									
e^x									
$1/x$									
e^x/x									
$ln(x)$									

2. Determine o domínio das seguintes funções:

   a. $\sqrt{x^4-1}$

   b. $\sqrt[5]{x^4-1}$

   c. $\sqrt[5]{x^4-1}$

   d. $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$

e. $\dfrac{1}{|x^2-25|}$

f. $4^{\frac{1}{x^2-1}}$

g. $\log_3(9-x^2)$

h. $f(x)=\begin{cases}\ln(x^2-4) & , x>0 \\ \sqrt{2x+x^2} & , x\leq 0\end{cases}$

i. $sen|x|$

j. $\cos\left(\dfrac{1}{3x}\right)$

k. $tg(x-\pi)$

3. Considere a função

$$\begin{aligned} f:\ & D \to B \\ & x \mapsto x^2-16 \end{aligned}$$

onde D e B são dois subconjuntos de IR. Indique D e B de modo que:

a. f seja injectiva e não sobrejectiva;

b. f seja sobrejectiva e não injectiva;

c. f seja bijectiva;

d. f não seja sobrejectiva nem injectiva;

e. f seja monótona crescente e possua um extremo;

4. Indique o valor lógico das seguintes afirmações:

a. Uma função é injectiva se toda recta vertical intersecta o gráfico da função no máximo uma vez.

b. A função

$$\begin{aligned} f:\ & IR_0^+ \to IR \\ & x \mapsto \sqrt{x}-1 \end{aligned}$$

é sobrejectiva e limitada.

c. Se uma função f é periódica de período T então f tem extremos.

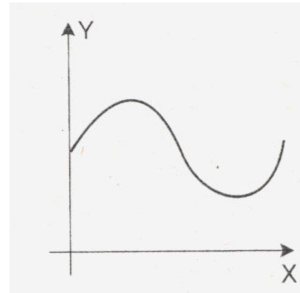
d. Se uma função f é limitada então f tem extremos.

e. Se uma função f é periódica de período T então f não é injectiva.

f. Se f é uma função sobrejectiva e o conjunto de chegada é $[0,6]$, então f tem extremos.

g. Se f é uma função sobrejectiva então f tem pelo menos um zero.

5. Seja *f(x)* uma função cujo gráfico, para $x \geq 0$, tem a forma apresentada na figura. Complete esse gráfico no domínio $x < 0$, se:



   a. $f(x)$ é par   b. $f(x)$ é ímpar.

6. Analise a paridade das funções seguintes:
   a. $f(x) = \frac{1}{x}$
   b. $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

7. Verifique se as funções seguintes são injectivas:
   a. $f(x) = \sqrt{x-2}$
   b. $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

8. Determine a equação reduzida das rectas a seguir indicadas e represente-as graficamente.
   a. Recta que passa pelos pontos (2,-1) e (0,4).
   b. Recta paralela à recta referida na alínea anterior e que passa pelo ponto (3,1).
   c. Recta perpendicular à recta da alínea (a) que passa pelo ponto (0,1).

9. Indique o valor lógico das seguintes afirmações justificando devidamente a sua opção.
   a. A inversa de uma função crescente é decrescente.
   b. Seja $f:[-1,1] \rightarrow [-1,1]$ uma função sobrejectiva e periódica de período 1, então podemos afirmar que $f(x) = 1/2$ tem uma única solução.
   c. Se $f: \ [2, 5] \ \rightarrow \ IR$ é uma função crescente tal que $f(2) = 3$ e $f(5) = 7$, então existe um elemento $c \in \ ]2, 5[$ tal que $f(c) = 5$.
   d. Se f é uma função injectiva no intervalo $[0,1]$, $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$ então existe $c \in]0,1[$ tal que $f(c) = \frac{1}{2}$.

10. O gráfico de $y = f(x+1)$ pode ser obtido a partir do gráfico de $y = f(x)$ por meio de uma translação de uma unidade

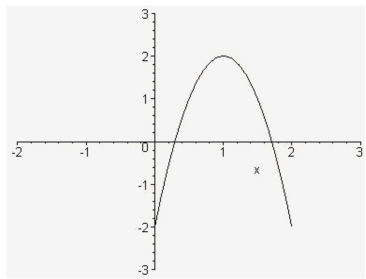
a. para a direita.

b. para cima.

c. para a esquerda.

d. na direcção da recta $y = x+1$.

11. O gráfico de uma função *f* com domínio [0;2] é dado por:



Esboce o gráfico de:

a. $y = f(x-2)$

b. $y = f(x+2)$

c. $y = f(x)-2$

d. $y = f(x)+1$

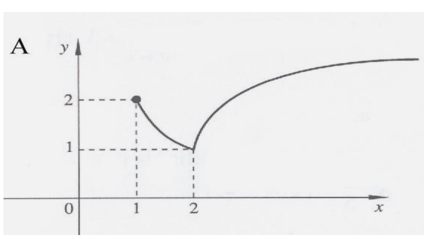
e. $y = -1/2\, f(x)$

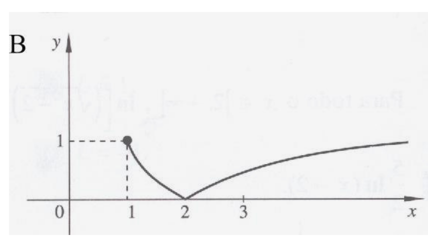
f. $y = -2f(x)$

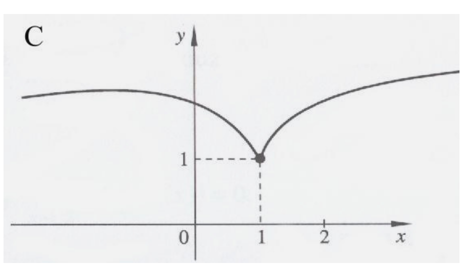
g. $y = f(x+1)-2$

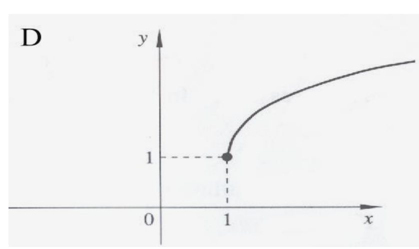
h. $y = f(x-1)+2$

12. Uma representação gráfica da função definida por $t(x) = \left|-1+\sqrt{x-1}\right|$ é:









13. A figura 5.1 representa o gráfico de uma função $f : IR \to IR$.

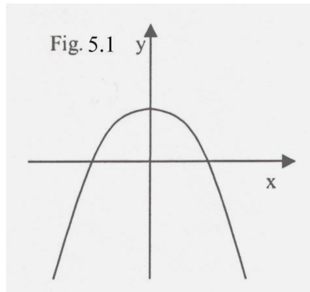


Fig. 5.1

a. Qual dos gráficos seguintes poderá ser o de $|f|$?

b. E o de $g(x) = \begin{cases} |f| & se\ f(x) \geq 0 \\ 0 & se\ f(x) < 0 \end{cases}$

c. E o de $h(x) = \begin{cases} |f| & se\ f(x) \leq 0 \\ 0 & se\ f(x) > 0 \end{cases}$

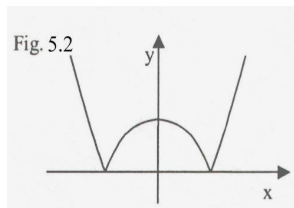


Fig. 5.2

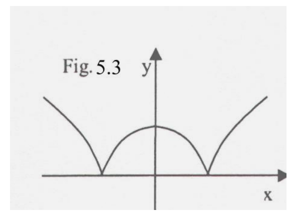


Fig. 5.3

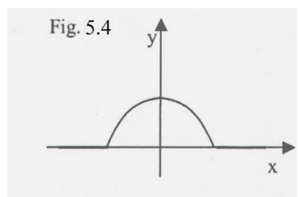


Fig. 5.4

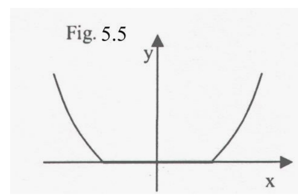
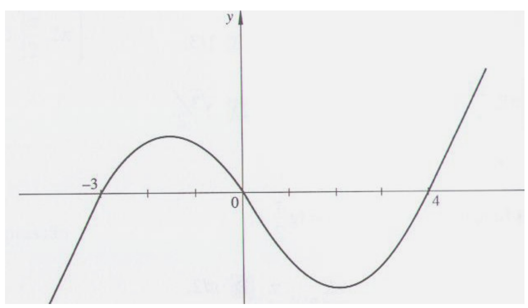
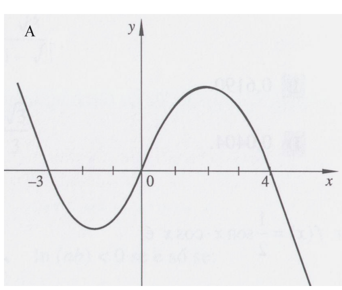


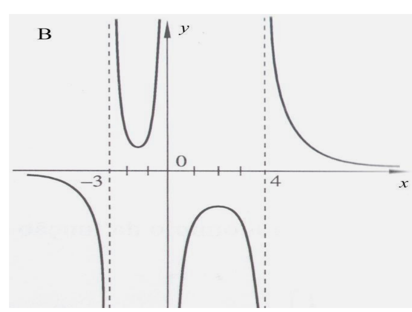
Fig. 5.5

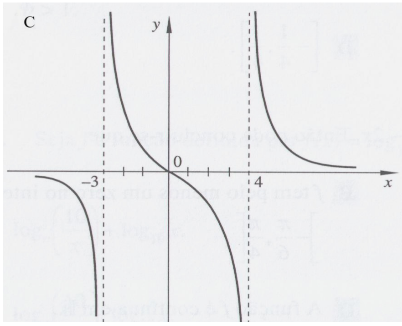
14. A figura seguinte representa o gráfico da função *g*.

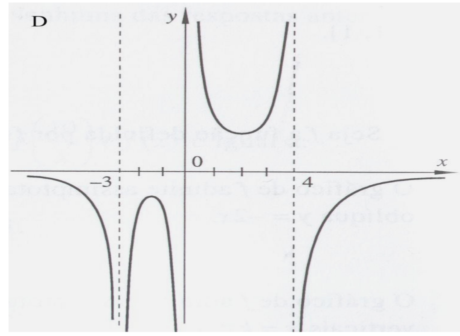


Então o gráfico da função definida por $\dfrac{1}{g(x)}$ poderá ser:

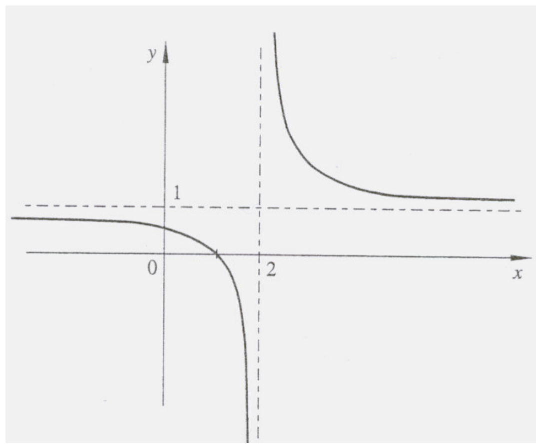






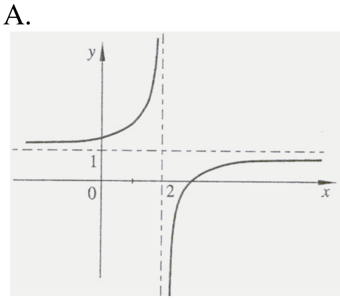


15. Seja *f(x.* a função cuja representação gráfica é a indicada na figura.

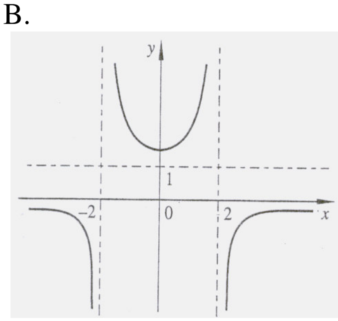


Indique qual a representação gráfica da função definida por $h(x) = -f(|x|)$.

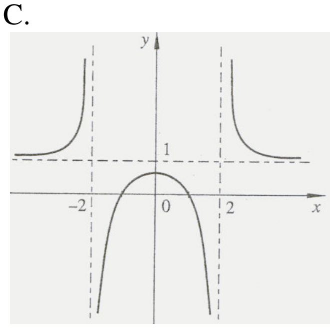
A.



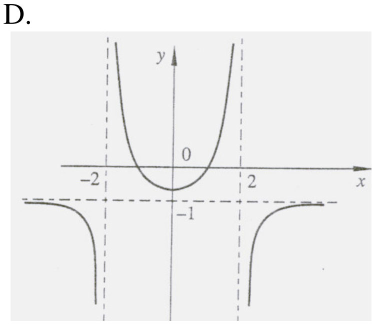
B.



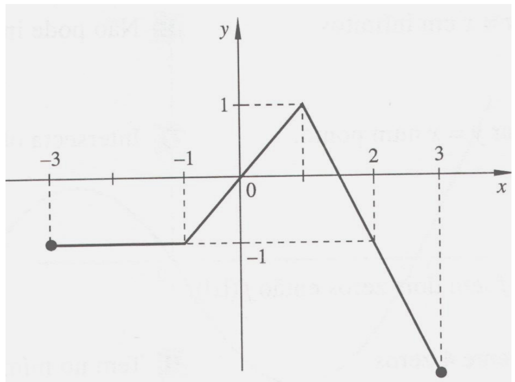
C.



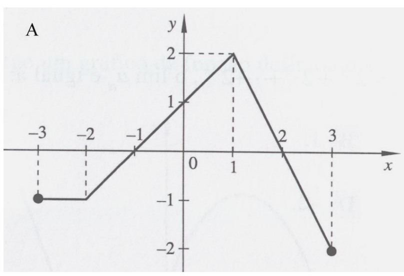
D.

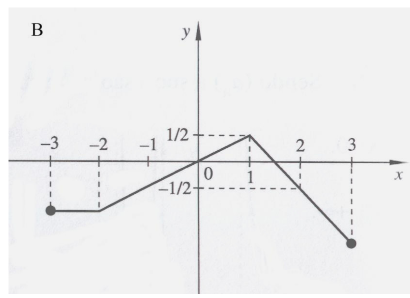


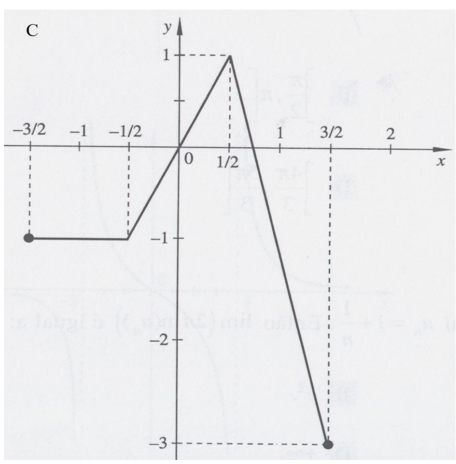
16. A figura representa o gráfico da função g.

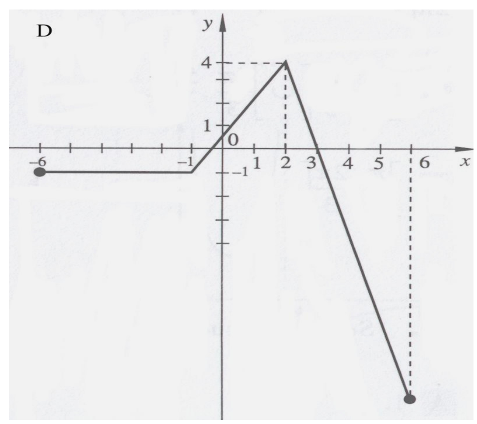


Qual dos seguintes poderá representar o gráfico da função definida por $h(x) = g(2x)$?









17. Se uma função f tem dois zeros então $f(|x|.$:

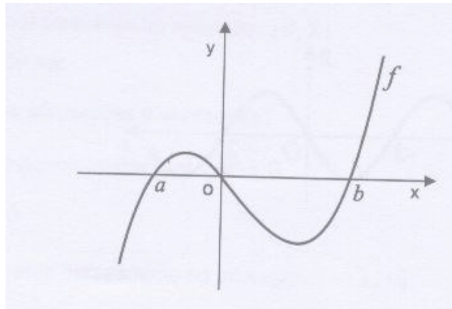
a. Tem obrigatoriamente 4 zeros.

b. Tem no mínimo 3 zeros.

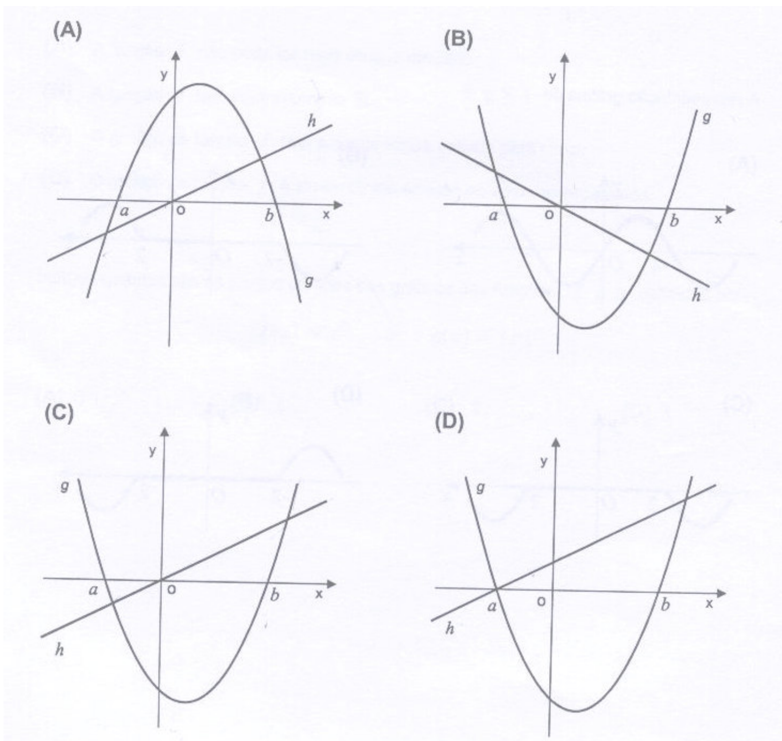
c. Pode ter ou não zeros.

d. Tem obrigatoriamente 2 zeros.

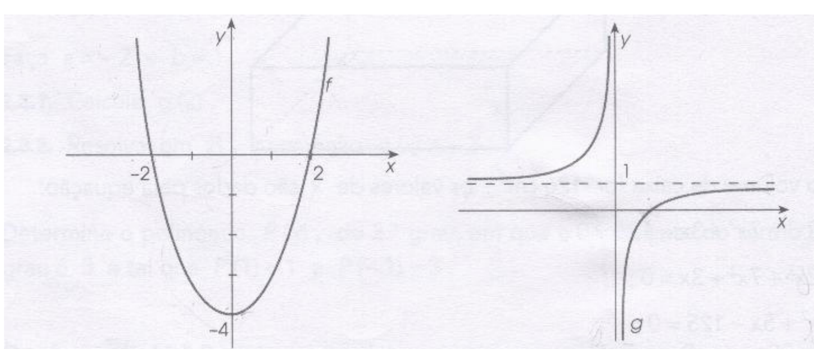
18. Na figura está representada parte do gráfico de uma função *f*, de domínio IR :



Em qual das figuras seguintes poderá estar representada parte dos gráficos de duas funções, *g* e *h*, de domínio IR , tais que $f = g \times h$?



19. Os gráficos seguintes representam as funções *f* e *g*, reais de variáveis reais.



a. Determine:

i. $(g-f)(2)$ ii. $(f\circ g)(1)$

b. Represente graficamente as funções $|f(x)|$ e $g(|x|)$.

c. Resolva as condições:

i. $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$ ii. $g(x)\geq 0$

d. Tendo em atenção o gráfico da função $y=x^2$, escreva a expressão analítica da função *f*, explicando o seu raciocínio.

20. Dadas as funções, reais de variável real, $f(x)=\sqrt{x-4}$ e $g(x)=\dfrac{1}{2x}+1$. Calcule:

a. O domínio de $(f\circ g)(x)$.

b. $(f\circ g)(x)$.

21. Dadas as funções reais de variável real, $g(x)=4-3x$ e $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}}$, obtenha, se possível, as funções compostas $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ e $(g\circ f)(x)=g(f(x))$.

22. Sendo $f(x)=\begin{cases}5x, & x\leq 0\\ -x, & 0<x\leq 8\\ \sqrt{x}, & x>8\end{cases}$ e $g(x)=x^3$, calcule $(f\circ g)(x)$.

23. As figuras abaixo, representam parte dos gráficos das funções $f,g:\ IR\to IR$.

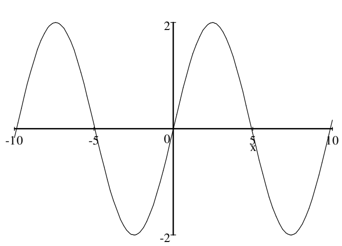


Gráfico de f

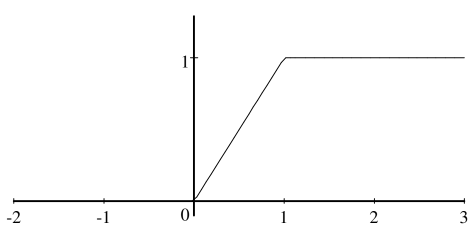
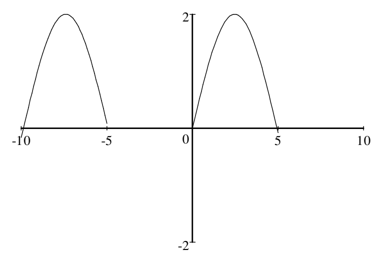


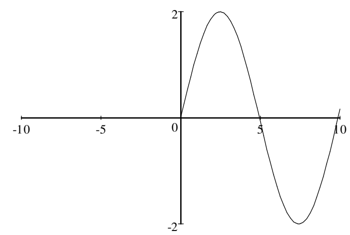
Gráfico de g

Qual das figuras abaixo pode representar parte do gráfico da função composta $g \circ f$? E de $f \circ g$?

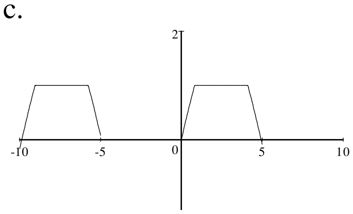
a.



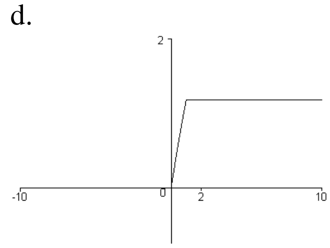
b.



c.



d.



24. Seja $p(x)$ um polinómio de grau 3 e $q(x)$ um polinómio de grau 4. Então $p \circ q$ tem grau:

a. igual a 4.

b. igual a 12.

c. igual a 7.

d. superior a 21.

25. Seja $f(x) = 2x^2 - 1$ e $g(x) = 4x^3 - 3x$. Mostre que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$. É comum que esta propriedade (comutativa) seja verificada?

26. Seja $g(x) = x^2$. Encontre todos os polinómios de primeiro grau, $f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$, tal que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

27. Seja *f* uma função definida por $f(x) = 4x - 1$. Então f^{-1} pode ser definida por:

a. $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{4}$

b. $f^{-1}(x) = (4x-1)^{-1}$

c. $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{4}$

d. nenhuma das opções.

28. Considere a função real de variável real $f(x) = \sqrt{x+3} + 5$.

a. Indique o seu domínio e contradomínio.

b. Determine e caracterize a sua função inversa, caso exista.

c. Determine o conjunto $S = \{x \in \mathrm{R} : f(x) = 4\}$.

29. Considere as funções: $f(x)=\sqrt{x}$ e $g(x)=\dfrac{x+5}{x-1}$.

a. Caracterize f^{-1} e g^{-1}.

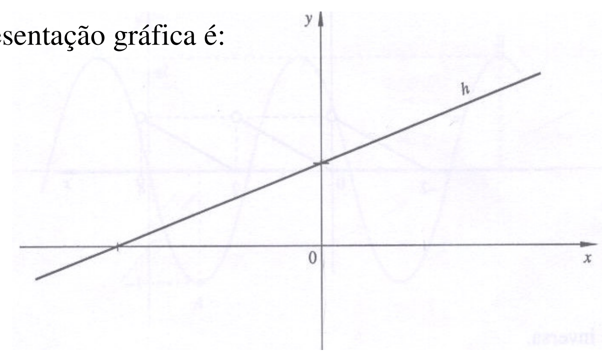
b. Caracterize $(f \circ g)^{-1}$ e $g^{-1} \circ f^{-1}$. O que se conclui?

30. Considere a função real de variável real definida por $f(x)=x^2\,\mathrm{sgn}(x)$, *sgn* denota a função sinal definida por $f(x)=\begin{cases} 1 & ,x>0 \\ 0 & ,x=0 \\ -1 & ,x<0 \end{cases}$.

a. Mostre que a função é invertível e escreva a sua função inversa.

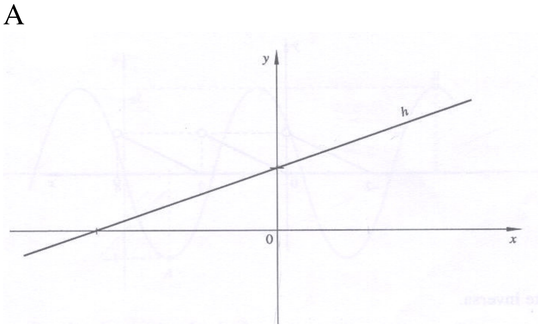
b. Esboce, numa única figura, o gráfico de *f* e de f^{-1}. O que se pode concluir?

31. Sendo *h* uma função cuja representação gráfica é:

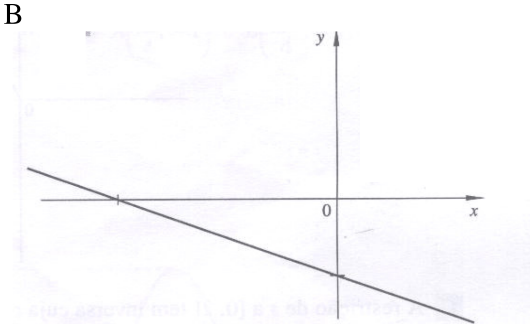


Então o gráfico de h^{-1} será:

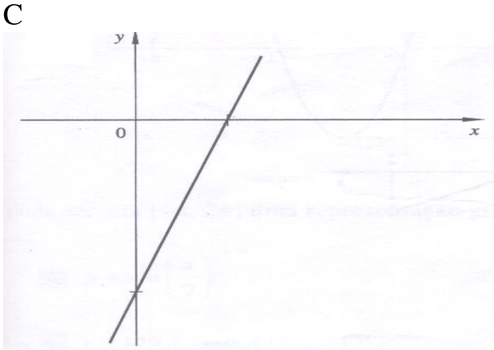
A



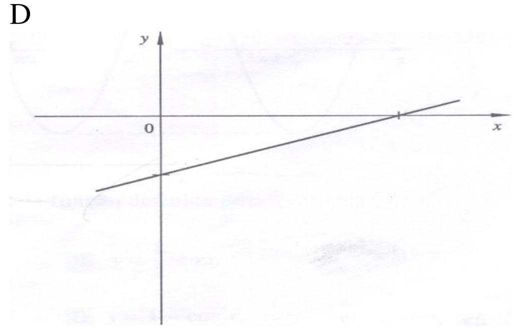
B



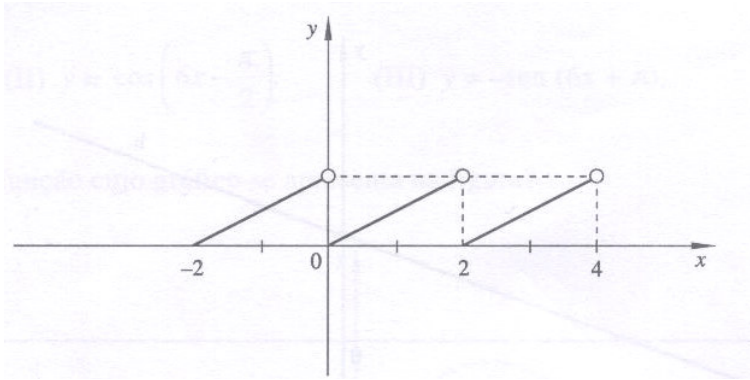
C



D



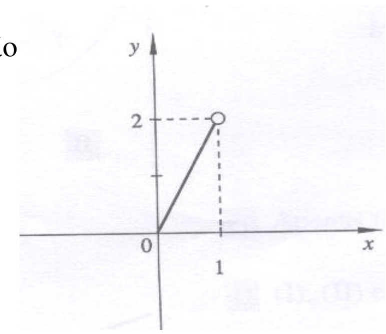
32. Escolha a afirmação correcta: Se s for uma função cuja representação gráfica é



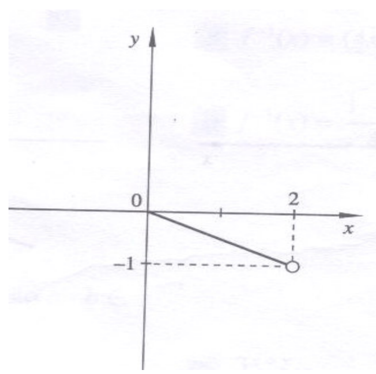
então,

a. s admite inversa

b. A restrição de s a $[0,2[$ tem inversa cuja representação gráfica é



c. A restrição de s a $[0,2[$ tem inversa cuja representação gráfica é



d. $s(0)=\frac{1}{2}$

33. Seja f uma função que admite inversa f^{-1}, tal que $f=f^{-1}$. Então o gráfico de f é obrigatoriamente:

a. a recta $y=x$.

b. simétrico em relação à bissectriz dos quadrantes impares.

c. simétrico relativamente à origem do referencial.

d. uma linha continua.

34. Indique o valor lógico das seguintes afirmações justificando devidamente a sua opção.

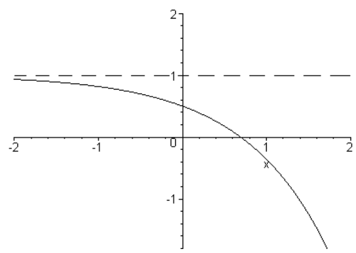
   a. Se *f* e *g* são duas funções injectivas então $g \circ f$ é uma função injectiva.

   b. Se $f(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ e $g(x) = \sqrt{x-1}$ então $D_{g \circ f} = \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$.

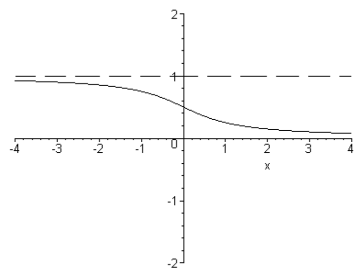
   c. Seja *f* e *g* duas funções sobrejectivas tal que $f : [-1,1] \rightarrow [0, \infty[$ e $g : IR \rightarrow]0, \infty[$, então a imagem (ou contradomínio) de $g \circ f$ é $\mathrm{Im}(g \circ f) =]0, \infty[$.

35. A representação gráfica da função definida por $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$, é:

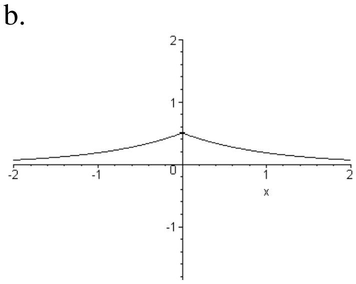
a.



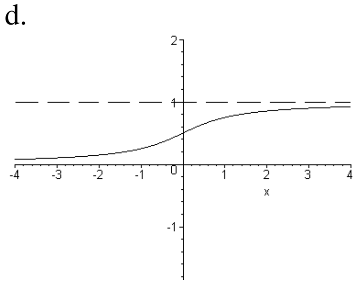
c.



b.



d.



36. Considere as funções *f* e *g*, de domínio *IR*, definidas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 3^x$.

Qual o conjunto solução da inequação $f(x) > g(x)$?

a. Conjunto vazio

b. IR^-

c. IR^+

d. IR

37. Calcule:

a. $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2 2^8\right)$

b. $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{8}}$

c. $\log_{\sqrt{2}} 16$

d. $\ln\left(e^{\log_{\frac{1}{3}} 9}\right)$

38. O gráfico da função $f(x)=e^{2x}$, intersecta a recta $y=6$ em:

a. Dois pontos: (-2;6) e (3,6).

b. Um ponto: (*ln*3;6).

c. Um ponto: ($\ln\sqrt{6}$; 6).

d. Nenhum ponto.

39. Seja g uma função definida por $g(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|$. Então o domínio de g é:

a. $]2;+\infty[$

b. $IR\setminus\{2\}$

c. $IR\setminus\{1,2\}$

d. $]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$

40. O valor da expressão $e^{2+\ln(x+1)}$ é igual a:

a. e^2+x+1.

b. $e^2(x+1)$

c. e^{2+x}

d. $e^2+\ln(x+1)$

41. A expressão $e^{\ln(x^2)}+2-\log_2 x$ é identicamente igual a:

a. $x^2+\log_2(x^{-2})$.

b. $x^2+\log_2\left(\frac{4}{x}\right)$

c. $x^2+\log_2(4-x)$

d. $x^2+\log_2\left(\frac{x}{4}\right)$

42. Determine os valores reais de x que verificam cada uma das seguintes condições:

a. $\frac{\ln(3-x)}{\ln(x)}<1$

b. $e^{2x}-12e^{-2x}=1$

c. $\frac{3^{x^2+1}}{3^{2x}}=81$

d. $\ln(x^2-1)-\ln x=\ln 2$

e. $2\ln x-\ln(x^2+x-2)=0$

f. $\log_5(x)+\log_2(8)=0$

g. $xe^x-2e^x<0$

h. $\frac{e^x-1}{x^2+1}>0$

i. $\log_{\frac{1}{3}}|x-3|-\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>0$

43. Dada a função real de variável real $h(x) = 2 - 2e^{3x}$.

a. Resolva a seguinte equação: $(h(x))^2 = 4$.

b. Caracterize $h^{-1}(x)$

44. Considere a função real de variável real $f(x) = 1 - \log_{\frac{1}{e}}(e^2 - x^2)$.

Determine:

a. O seu domínio.

b. $f(0)$.

c. O conjunto $A = \left\{ x \in \Re : 1 - f(x) \geq \log_{\frac{1}{e}} \frac{e^2}{4} \right\}$.

45. Determine:

a. $sen\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

b. $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

c. $tg\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

d. $\cos(12\pi)$

e. $\cot g\left(\frac{8\pi}{6}\right)$

f. $\sec\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

g. $\cos ec\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

h. $\sec\left(\frac{219\pi}{4}\right)$

i. $\cos ec\left(-330^\circ\right)$

j. $arcsen\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

k. $arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

l. $\arccos(-1)$

m. $\cos ec\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$

n. $\sec\left(arctg\left(-\frac{3}{2}\right)\right)$

o. $sen\left(2\arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)\right)$

p. $sen\left(\frac{\pi}{6} - \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$

q. $\cos\left(\frac{\pi}{3} - arcsen\left(\frac{3}{5}\right)\right)$

r. $arctg\left(-2\cos\left(\pi/6\right)\right)$

s. $tg\left(2\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

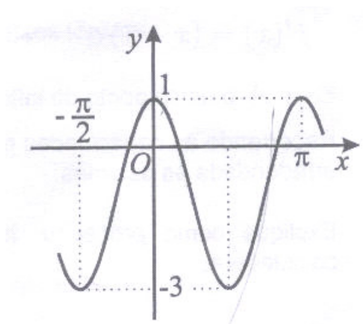
t. $tg\left(\arccos\frac{1}{3} + arcsen\frac{1}{2}\right)$

u. $arcsen(-1) + 2sen^2\left(\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right)$

46. Considere a expressão $f(x) = a + bsen^2(x)$. Sempre que se atribui um valor real *a* e um valor real *b*, obtemos um a função de domínio *IR*.

a. Nesta alínea, considere que $a = 2$ e $b = -5$. Sabendo que $tg\theta = \frac{1}{2}$, calcule $f(\theta)$.

b. Para um certo valor de *a* e um certo valor *b*, a função *f* tem o seu gráfico parcialmente representado na figura seguinte:



Conforme esta figura sugere, tem-se:

- O contradomínio de *f* é $[-3,1]$
- 0 e π são maximizantes
- $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ são minimizantes

Determine *a* e *b*.

47. Seja *f* uma função definida por $f(x) = \ln(2|sen(x)| - 1)$. Então, o domínio de *f* em $[0; 2\pi]$ é:

a. $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$

b. $\left]\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right[$

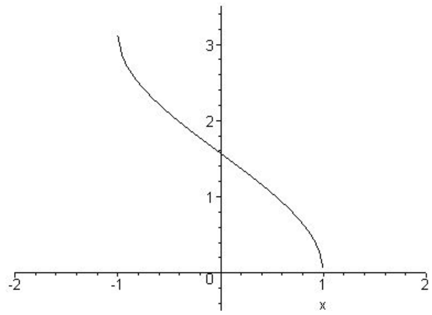
c. $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$

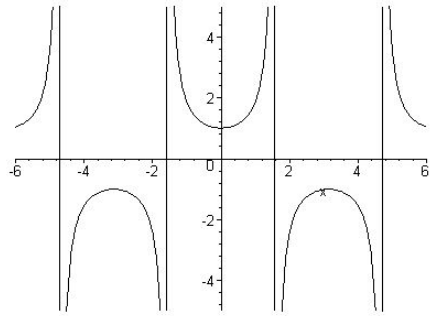
d. $\left]\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right[$

48. Dadas as funções *arcsen(x)*, *arccos(x)*, *arctg(x)* e *sec(x)*, associe cada uma delas ao respectivo gráfico.

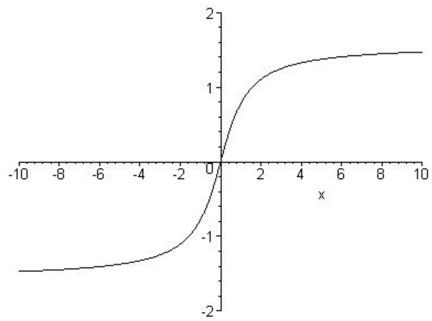
a.

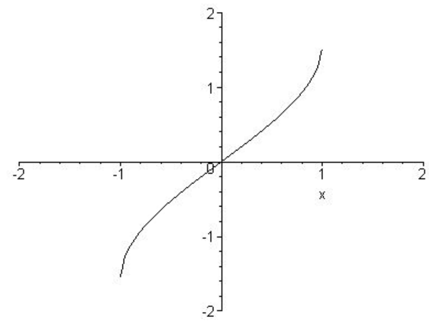
b.





c. d.





49. Resolva cada uma das seguintes equações.

a. $sen\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ b. $tg\left(4x\right)=\cot g(x)$ c. $\arccos\left(4x\right)=\frac{\pi}{6}$

d. $\cos\left(2x\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e. $2sen\left(5x\right)=\sqrt{3}$ f. $sen\left(2x\right)+sen\left(x\right)=0$

g. $2tg^2\left(x\right)+9tg\left(x\right)+3=0$ h. $15\cos^4\left(x\right)-14\cos^2\left(x\right)+3=0$ i. $tg\left(\arccos\left(x\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

j. $2arctg\left(\frac{x}{2}+4\right)=-\frac{\pi}{2}$ k. $\frac{\pi}{3}-\arccos\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$ l. $tg\left(arctg\left(\frac{2x-1}{x}\right)\right)=3$

50. Sabendo que $tg\alpha=-\frac{3}{4}\wedge\frac{3}{2}\pi\leq\alpha\leq 2\pi$, calcule $sen\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+sen\frac{\alpha}{2}$.

51. Resolva as seguintes inequações.

a. $sen(2x)<sen(x)$, em $\left[0;2\pi\right[$.

b. $|sen(x)| > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, em $[0;2\pi[$.

c. $\arccos\dfrac{x+1}{2} < \dfrac{2\pi}{3}$.

52. Qual é a inversa e o domínio da função f definida por $f(x) = arcsen(x-1) - 4$?

a.

$f^{-1}(x) = arcsen(x+4) - 1$

$D_f = [0,2]$

b.

$f^{-1}(x) = sen(x+4) + 1$

$D_f =]0,2[$

c.

$f^{-1}(x) = sen(x+1) + 4$

$D_f =]1,4[$

d.

$f^{-1}(x) = sen(x+4) + 1$

$D_f = [0,2]$

53. O domínio da função definida por $f(x) = 2arcsen|2x-1|$ é:

a. $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b. $[-1,1]$

c. $[0,1]$

d. $[-\pi,\pi]$

54. Dadas as funções reais de variável real

$$f(x) = 2\cos(x), \quad g(x) = \cos(x)sen(x)$$

a. Determine os valores de x no intervalo $]-\pi,\pi[$ que verificam a condição $f(x) > \sqrt{3}$

b. Resolva a equação $f(x) + g(x) = 0$

55. Considere a função real de variável real $f(x) = \dfrac{1}{\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)}$.

a. Determine o seu domínio e contradomínio.

b. Escolha um domínio (de maior amplitude possível) onde f seja injectiva, e calcule, nesse domínio, a respectiva função inversa.

c. Verifique que $f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(\pi)=0$

56. Considere a função $f(x)=\frac{\pi}{4}-3arcsen(2x)$.

a. Calcule o domínio e contradomínio da função.

b. Determine a função inversa.

c. Calcule os zeros da função.

d. Determine $\left\{x\in R: f(x)=\frac{\pi}{4}\right\}$

57. Dada a função $h(x)=2\pi-3\arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right)$

a. Mostre que h é par.

b. Determine o seu contradomínio.

c. Caracterize a inversa da restrição de h ao subconjunto não negativo de D_h

d. Defina em extensão: $A=\left\{x\in D_h : h(x)\leq\frac{\pi}{2}\right\}$.

58. Considere a função real de variável real $f(x)=\pi-2arctg(2x+1)$.

a. Determine o domínio e contradomínio de *f*.

b. Prove que $\forall x\in[-1, 0], f(x)\neq 0$.

c. Defina a função inversa.

59. Considere a função $f(x)=tg(x)+sen(x)$.

a. Determine o seu domínio.

b. Justifique que a função é ímpar.

60. Considere as funções *f* e *g*, reais de variável real, $f(x)=\frac{1}{2}-sen(x)$ e $g(x)=2\arccos(x-1)$, definidas nas respectivas restrições principais.

a. Determinar *x* tal que $f(x)+f(2x)=1$.

b. Escreva a expressão designatória da aplicação $(f\circ g)(x)$ e determine o número designado por $(f \circ g)\left(\frac{1}{3}\right)$.

c. Caracterize a função inversa de *g*.

61. Considere as rectas *r* e *s*, definidas por:

$$r: \ 2\sqrt{3}y + 2x = \sqrt{3}$$
$$s: \ y + \sqrt{3}x = -2\sqrt{3}$$

a. Determine o ângulo que a recta *r* faz com o eixo das abcissas.

b. Determine o ângulo que a recta *s* faz com o eixo das ordenadas.

c. Determine o ângulo entre as duas rectas.

62. Seja *h* uma função real de variável real, definida por $h(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arccos\left(x^2\right)$.

a. Determine o domínio de *h*.

b. Analise *h* quanto à injectividade. O que pode concluir quanto à existência de função inversa de *h*.

c. Considerando *h* definida em $[0,1]$, caracterize a inversa desta função (indicando $D_{h^{-1}}$, $D'_{h^{-1}}$ e a sua expressão analítica).

63. Mostre que a inversa da função $f(x) = \frac{\pi}{2} + arcsen\left(\frac{x-1}{2}\right)$ é a função definida por

$$\begin{array}{llll} f^{-1}: & [0,\pi] & \rightarrow & [-1,3] \\ & x & \mapsto & 1 + 2\,sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \end{array}.$$

64. Considere a função definida por $g(x) = \pi - \arccos\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)$.

a. Determine o domínio e o contradomínio da função g.

b. Calcule, caso existam, os zeros de g.

c. Mostre que a função g é par.

d. Comente a afirmação: *"A função g não admite inversa."*

e. Considere a função g restrita ao subconjunto não negativo de D_g e caracterize a sua inversa.

65. Considere a função definida por $f(x) = arcsen(3-2x)$.

   a. Calcule os valores de $f(1)$ e $f\left(\frac{3}{2}\right)$.

   b. Determine o domínio e o contradomínio da função f.

   c. Determine os valores de x para os quais a função f atinge os seus extremos.

   d. Caracterize a inversa da função f.

66. Para cada uma das seguintes questões são indicadas quatro respostas alternativas, das quais apenas uma está correcta; assinale-a com um círculo à volta do número correspondente.

   a. Qual é a inversa e o domínio da função f definida por $f(x) = \ln(x-1) - 4$?

   (i) $f^{-1}(x) = \ln(x+4) - 1$, $D_f =]1,+\infty[$

   (ii) $f^{-1}(x) = e^{x+4} + 1$, $D_f = [1,+\infty[$

   (iii) $f^{-1}(x) = e^{x+1} + 4$, $D_f =]1,4[$

   (iv) $f^{-1}(x) = e^{x+4} + 1$, $D_f =]1,+\infty[$

   b. Qual das seguintes funções não tem inversa?

   (i) $f(x) = e^x$

   (iii) $f(x) = |x|$

   (ii) $f(x) = x^5$

   (iv) $f(x) = \log_{10} x$

   c. Qual das seguintes funções não tem inversa?

   (i) $f(x) = sen(x), \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2$

   (iii) $f(x) = sen(x), \quad 0 \le x \le \pi$

   (ii) $f(x) = x^5, \quad -1 \le x \le 1$

   (iv) $f(x) = \cos(x), \quad 0 < x \le \pi$

   d. Seja $f(x) = 3\log_7 x$, $x > 0$ e $a, b \in IR^+$, então podemos afirmar que:

   (i) $f(a+b) = f(a) + f(b)$

   (ii) $f(a+b) = f(a) \times f(b)$

   (iii) $f(a \times b) = f(a) + f(b)$

   (iv) $f(a \times b) = f(a) \times f(b)$