Capítulo I

Noções Elementares de Matemática

1.1 Operações com fracções, Equações e Inequações

Tipos de números

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$ – conjunto dos números naturais.

$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ – conjunto dos números inteiros.

$\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}, \qquad \mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{N}_0$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$ – conjunto dos números racionais ou fraccionários, i.e., conjunto dos números que podem ser representados como quociente de números inteiros. Por exemplo, $-\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$; $\frac{8}{6} = \frac{4}{3} \in \mathbb{Q}$; $1{,}5 \in \mathbb{Q}$; $\frac{4}{3} = 1{,}333(3) \in \mathbb{Q}$

Nota:

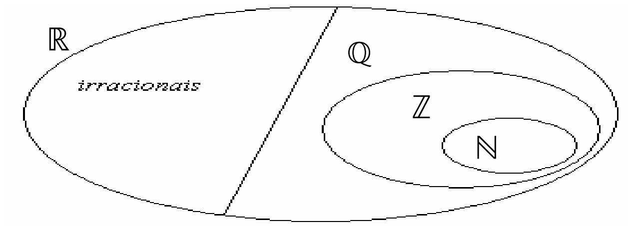
Qualquer racional tem dízima finita ou infinita periódica.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{$ *números irracionais* $\}$ – conjunto dos números reais. Por exemplo, $-\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$; $\frac{8}{6} = \frac{4}{3} \in \mathbb{R}$; $1{,}5 \in \mathbb{R}$; $1{,}333(3) \in \mathbb{R}$; $1{,}750238619\ldots \in \mathbb{R}$; $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$; $-\sqrt{\frac{8}{3}} \in \mathbb{R}$; $\pi^2 \in \mathbb{R}$; $\sqrt[5]{e} \in \mathbb{R}$; $\log_3 0{,}12 \in \mathbb{R}$;

Nota:

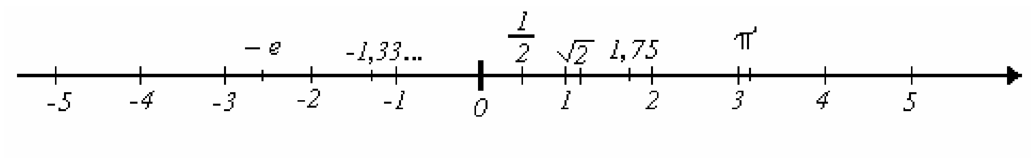
Qualquer destes números pode ser representado por uma dízima infinita (periódica se também for um racional, não periódica se for irracional – real não racional).

Em resumo tem-se:



Assim: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Podemos identificar os números reais com os pontos na recta real



Operações com fracções

Adição e Subtracção: Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ e $b, d \neq 0$, então

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times \frac{m}{b}}{m} + \frac{c \times \frac{m}{d}}{m}$$

onde $m = mmc(b, d)$, o mínimo múltiplo comum entre b e d.

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} + \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{10 + 12}{15} = \frac{22}{15}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{4}{9} = \frac{5 \times \frac{18}{3}}{6 \times 3} - \frac{4 \times \frac{18}{9}}{9 \times 2} = \frac{30 - 8}{18} = \frac{22}{18} = \frac{11}{9}$$

Multiplicação: Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ e $b, d \neq 0$, então

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Divisão: Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ e $b, c, d \neq 0$, então

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

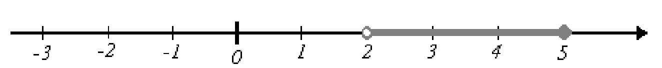
Desigualdades.

- $a < b$: "*a* menor que *b*" – significa que *a* está à esquerda de *b* na recta real;
- $a > b$: "*a* maior que *b*" – significa que *a* está à direita de *b* na recta real;
- $a \le b$: "*a* menor ou igual a *b*";
- $a \ge b$: "*a* maior ou igual a *b*".

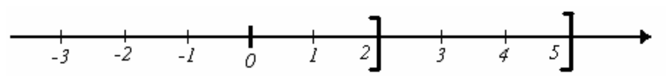
Intervalos

O conjunto $S = \{x \in IR : 2 < x \le 5\}$, ou equivalentemente, $S = \{x \in IR : x > 2 \wedge x \le 5\}$ é o conjunto dos números reais $x \in IR$, que verificam simultaneamente as duas condições $x > 2$ e $x \le 5$, ou de outra forma, os números reais compreendidos entre 2 (exclusive) e 5 (inclusive).

Graficamente temos:



ou



Em termos de notação, representamos o conjunto *S* por: $S =]2,5]$.

Intervalos limitados, se $a < b$:

- $[a,b] = \{x \in IR : a \le x \le b\}$ que é um intervalo fechado
- $[a,b[= \{x \in IR : a \le x < b\}$ ou $[a,b) = \{x \in IR : a \le x < b\}$
- $]a,b] = \{x \in IR : a < x \le b\}$ ou $(a,b] = \{x \in IR : a < x \le b\}$
- $]a,b[= \{x \in IR : a < x < b\}$ ou $(a,b) = \{x \in IR : a < x < b\}$ que é um intervalo aberto;

(Obs.: $[a,a] = \{a\}$ é um fechado.)

Intervalos não limitados:

- $[a,\infty[= \{x \in IR : a \le x\}$ ou $[a,\infty) = \{x \in IR : a \le x\}$ que é um intervalo fechado;
- $]a,\infty[= \{x \in IR : a < x\}$ ou $(a,\infty) = \{x \in IR : a < x\}$ que é um intervalo aberto;
- $]-\infty,a[= \{x \in IR : x < a\}$ ou $(-\infty,a) = \{x \in IR : x < a\}$ que é um intervalo aberto;
- $]-\infty,a] = \{x \in IR : x \le a\}$ ou $(-\infty,a] = \{x \in IR : x \le a\}$ que é um intervalo fechado.

Propriedades das Desigualdades

Sejam $a, b, c \in IR$

1. Se $a < b$ então $a + c < b + c$;

(Isto é, se somar o mesmo número real a uma desigualdade, a desigualdade mantém-se.)

2. Se $a < b$ e $c > 0$ então $a.c < b.c$;

(Isto é, se multiplicar ambos os membros de uma desigualdade por um mesmo número real **positivo** a desigualdade mantém-se.)

3. Se $a < b$ e $c < 0$ então $a.c > b.c$;

(Isto é, se multiplicar ambos os membros de uma desigualdade por um mesmo número real **negativo** a desigualdade ***altera-se***.)

4. Se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.

Estas propriedades também são válidas para a relação de $\leq$ e são muito importantes na resolução de inequações.

Potenciação

Sejam $n \in IN$, $m \in Z$

1. $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n\ vezes}$

2. $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ $(se \quad x \neq 0)$

3. $x^0 = 1$ $(se \quad x \neq 0)$

4. $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ $(x \geq 0 \quad n\ é\ par)$

5. $x^{m/n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$ $(x \geq 0 \quad n\ é\ par)$

Regras para os expoentes:

1. $x^n.x^m = x^{n+m}$

2. $x^n.y^n = (xy)^n$

3. $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$ $(se \quad x \neq 0)$

4. $\dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n$ $(se \quad y \neq 0)$

5. $\left(x^n\right)^m = x^{nm}$

6. $x^{n/m} = \left(x^{1/m}\right)^n$ $(x \geq 0 \quad se \quad n\ é\ par)$

Resolução de equações

Resolver a equação $2x+3=5$, é determinar os números reais, $x \in IR$, que verificam a igualdade.

É fácil ver que $x=1$ é solução da equação anterior, pois $2\times 1+3=5$.

Exercícios:

Resolva as seguintes equações, em $\mathbb{R}$:

a) $-x^2+x-1=1$

b) $x(x-1)=x$

c) $x^3+5x^2-x=0$

d) $x^2+5=0$

Resolução de inequações

Resolver uma inequação, $-2x-3<1$, é determinar os valores de $x \in IR$ que verificam a desigualdade.

<u>Resolução:</u>

$$
\begin{aligned}
-2x-3<1 &\Leftrightarrow -2x-3+3<1+3 \quad \text{pela propriedade 1 das desigualdades} \\
&\Leftrightarrow -2x<4 \\
&\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)>\left(-\frac{1}{2}\right)\times 4 \quad \text{pela propriedade 3 das desigualdades} \\
&\Leftrightarrow x>-2
\end{aligned}
$$

A solução é $\{x \in IR : x>-2\} = \left]-2,+\infty\right[$.

Exercícios:

Resolva as seguintes inequações, em $\mathbb{R}$:

a) $\frac{1}{3}\left(-x^2+x-2\right)<0$;

b) $\frac{x+2}{-x+1}\geq 1$.

Valor Absoluto

Seja $a \in IR$.

O ***valor absoluto*** ou ***módulo*** de a, denota-se por $|a|$, e representa o valor da distância (e portanto positivo) da origem (0 de recta) ao ponto a.

Define-se:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{se} \quad a < 0 \end{cases}$$

Por exemplo, $|-1{,}256| = 1{,}256$; $|1{,}256| = 1{,}256$; $|-\sqrt{10}| = \sqrt{10}$.

Propriedades do valor absoluto:

Sejam $a, b \in IR$

1. $|a| \geq 0$; $|a| = 0$ quando e só quando (sse) $a = 0$;
2. $|a| = |-a|$; $\quad a \leq |a|$;
3. $|a|.|b| = |a.b|$;
4. $|a| = |b| \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = b^2$
5. $|a| > |b| \quad \Leftrightarrow \quad a^2 > b^2$
6. $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Inequações com módulos:

$$\boxed{\begin{aligned} |f(x)| < g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) < g(x) \quad \wedge \quad -f(x) < g(x) \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) < g(x) \quad \wedge \quad f(x) > -g(x) \end{aligned}}$$

<u>*Exemplos:*</u>

$$\begin{aligned} |3x - 1| < 5 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x - 1 < 5 \quad \wedge \quad -(3x - 1) < 5 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x < 5 + 1 \quad \wedge \quad 3x - 1 > -5 \\ &\Leftrightarrow \quad x < 6/3 \quad \wedge \quad 3x > -5 + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x < 2 \quad \wedge \quad x > -\frac{4}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in]-\infty, 2[\cap \left]-\frac{4}{3}, +\infty\right[\quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\frac{4}{3}, 2\right[\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} |f(x)| > g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) > g(x) \quad \vee \quad -f(x) > g(x) \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) > g(x) \quad \vee \quad f(x) < -g(x) \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} |3x-1| \geq 5 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x-1 \geq 5 \quad \vee \quad -(3x-1) \geq 5 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x \geq 5+1 \quad \vee \quad 3x-1 \leq -5 \\ &\Leftrightarrow \quad x \geq 6/3 \quad \vee \quad 3x \leq -5+1 \\ &\Leftrightarrow \quad x \geq 2 \quad \vee \quad x \leq -\frac{4}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in [2,+\infty[\cup \left]-\infty,-\frac{4}{3}\right] \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty,-\frac{4}{3}\right] \cup [2,+\infty[\end{aligned}$$

1.2 Exercícios

1. Escolha a opção correcta:

a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{4}$

c. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$

d. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{8}{4}$

2. Considere as seguintes afirmações:

$\mathcal{A}: \frac{x^2+a^2}{x^4+a^4}=\frac{1}{x^2+a^2}$, para quaisquer x e a não nulos

$\mathcal{B}: \frac{1}{x+2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$, para todo o $x \in IR \setminus \{-2,0\}$

$\mathcal{C}: \frac{(x+1)^2}{x^2-1}=\frac{x+1}{x-1}$, para todo o $x \in IR \setminus \{-1,1\}$

$\mathcal{D}: \frac{x+2}{x+3}=\frac{2}{3}$, para todos o $x \in IR \setminus \{0\}$

Escolha a resposta correcta:

a. $\mathcal{A}$ é falsa e $\mathcal{D}$ é verdadeira

c. $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são verdadeiras

b. $\mathcal{B}$ é falsa e $\mathcal{C}$ é verdadeira

d. $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são verdadeiras

3. Sejam a e b dois números reais não nulos e p e q dois números inteiros quaisquer. Considere as seguintes condições:

$\mathcal{A}$: $a^p b^q = (ab)^{p+q}$

$\mathcal{B}$: $\frac{1}{(ab)^p}=\frac{a^{-p}}{b^p}$

$\mathcal{C}$: $a^p + b^p = (a+b)^p$

$\mathcal{D}$: $a^p a^q = a^{pq}$

Escolha a resposta correcta:

a. $\mathcal{C}$ é falsa e $\mathcal{B}$ é verdadeira

c. $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ são verdadeiras

b. $\mathcal{A}$ é falsa e $\mathcal{D}$ é verdadeira

d. $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ são verdadeiras

4. Seja $a \in IR$. Escolha a resposta correcta:

a. $\sqrt{a^2}=a$

c. $\sqrt{a^2}=\pm a$

b. $\sqrt{a^2}=\sqrt[4]{a^2}$

d. $\sqrt{a^2}=|a|$

5. Considere as seguintes proposições:

   $\mathcal{A}: \sqrt{a+b}-\sqrt{b}=\sqrt{a}$, para quaisquer a e b não negativos

   $\mathcal{B}: \dfrac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}}=\sqrt{a}$, para todo o $a>0$

   $\mathcal{C}: \sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt[4]{ab}$, para quaisquer a e b não negativos

   $\mathcal{D}: a\sqrt[3]{a}=a^{\frac{4}{3}}$, para qualquer $a\in IR$

   Escolha a resposta correcta:

   a. $\mathcal{B}$ é falsa e $\mathcal{D}$ é verdadeira
   b. $\mathcal{A}$ é falsa e $\mathcal{C}$ é verdadeira
   c. $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}$ são verdadeiras
   d. $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são verdadeiras

6. Considere as seguintes equações:

   (i) $x^2-5x+6=0$
   (ii) $(x-1)^3=0$
   (iii) $(x+1)^2(x^2-4x)=0$
   (iv) $(x^2-1)(x+1)=0$
   (v) $x^2+x+1=0$

   Qual é o número de soluções reais e distintas das equações anteriores pela ordem indicada?

   a. 0, 1, 2, 3, 0
   b. 2, 1, 3, 3, 2
   c. 2, 1, 3, 2, 0
   d. 2, 3, 4, 3, 2

7. Considere o conjunto $A=\{x\in IR: x(x-1)=x\}$. Escolha a resposta correcta:

   a. $A=\{0\}$
   b. $A=\{0,1\}$
   c. $A=\{2\}$
   d. $A=\{0,2\}$

8. Considere o conjunto $A=\{x\in IR: x^2+3x>-2\}$. Escolha a resposta correcta:

   a. $A=[-2,-1]$
   b. $A=]-\infty,-2[\cup[-1,+\infty[$
   c. $A=]-\infty,-2[\cup]-1,+\infty[$
   d. $A=\{\ \}$

9. Considere o conjunto $A=\{x\in IR: |x-1|\leq 2\}$. Escolha a resposta correcta:

   a. $A=]-\infty,3]$
   b. $A=]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[$
   c. $A=[-1,3]$
   d. $A=[-3,3]$

10. Considere as seguintes proposições:

$\mathcal{A}$: $\forall x \in IR \quad 25^x = 5^{2x}$ $\mathcal{B}$: $\forall x \in IR \quad e^{x^2} = e^{2x}$

$\mathcal{C}$: $\forall x > 0 \quad -\ln\left(\dfrac{1}{e^x}\right) = x$ $\mathcal{D}$: $\forall x \in IR \quad e^{x^2} = e^{2x}$

Escolha a resposta correcta:

a. $\mathcal{C}$ é verdadeira e $\mathcal{B}$ é falsa b. $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são verdadeiras

c. $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são falsas d. $\mathcal{A}$ e $\mathcal{D}$ são verdadeiras

11. Sendo $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, tal que $sen(x) = \dfrac{1}{3}$ qual das seguintes afirmações é verdadeira?

a. $\cos(x) = \dfrac{2}{3}$ b. $\cos(x) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

c. $\cos(x) = 3$ d. $x = \dfrac{\pi}{3}$

12. Para cada uma das seguintes alíneas, escolha a opção correcta.

a. O valor da expressão numérica $\sqrt[3]{\sqrt{2^6}}$ é:

i. $\sqrt[6]{12}$ ii. 2
iii. $\sqrt[3]{64}$ iv. $\sqrt[3]{64}$

b. O valor da expressão numérica $\sqrt{37^2 - 4 \times 13^2}$ é:

i. $\sqrt{1335}$ ii. 11
iii. $\sqrt{15}$ iv. $\sqrt{693}$

c. A expressão algébrica $\left(16e^{-4}2^{8x}\right)^{3/4}$ é equivalente a:

i. $\dfrac{2^{6x+3}}{e^3}$ ii. $\left(32e^{-8x}\right)^3$
iii. $\left(2(2e)^{2x-1}\right)^3$ iv. $\left(16e^{-1}2^{2x}\right)^3$

d. A expressão algébrica $\dfrac{x^2}{xy - y^2} \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + xy}$ é equivalente a:

i. $\dfrac{x+y}{x-y}$ ii. $\dfrac{x}{y}$

iii. 1 iv. $\dfrac{x}{y}$, $|x| \neq |y| \wedge x \neq 0$

13. Resolva, em IR, as seguintes equações, se possível e indique o conjunto-solução:

a. $(x-3)(x^3+2)=0$

b. $\dfrac{x^2-25}{x+5}=-10$

c. $\dfrac{1+x}{\sqrt{5-x}}=1$

d. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$

e. $x^4+2x^2-3=0$

f. $\dfrac{1}{|x+1|.|x-3|}=\dfrac{1}{5}$

g. $\dfrac{x^5-4x^3+3x^2}{e^{\frac{1}{x-1}}}=0$

h. $2^{2x}+4^x-8=0$

i. $\ln(x^2+2)=0$

j. $e^{x-2}=0$

14. Encontre os erros das seguintes resoluções:

a. $x+1+\dfrac{1}{x-2}=3+\dfrac{1}{x-2} \quad \Rightarrow \quad x+1=3 \quad \Rightarrow \quad x=2$

b. $(x-3)\cdot\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad x=3 \quad \vee \quad x=2$

15. Descubra o erro da seguinte demonstração:

Seja $x=y\neq 0$. Então

$$\begin{aligned} x^2 = y^2 \quad &\Rightarrow \quad x^2-y^2=xy-y^2 \\ &\Rightarrow \quad (x-y)\cdot(x+y)=y\cdot(x-y) \\ &\Rightarrow \quad x+y=y \\ &\Rightarrow \quad x=0 \end{aligned}$$

16. Resolva, em IR, as seguintes inequações e apresente a solução sob a forma de intervalos de números reais.

a. $2-x<5$

b. $x^2-4x+4<1$

c. $\dfrac{x+2}{1-x}>1$

d. $\dfrac{x+3x^2}{x+2}\leq 1$

e. $|2x-1|\geq|x-2|$

f. $|x-1|+|x+2|\geq 4$

e. $e^{x+5}\geq e^{x^2+3}$

g. $\log_{1/e}(x^2-x)<\log_{1/e}(x-5)$