Escola Superior de Tecnologia e de Gestão de Bragança

Departamento de Matemática

Análise Matemática I 2005/2006

Cursos: CA, GE

Exame Recurso - 24/2/2006

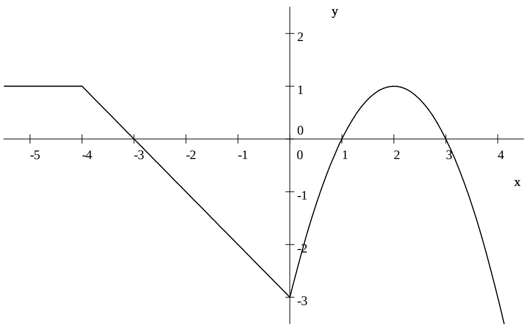
Duração: 2h 30 min | Com Consulta de Formulário

Resolva os 3 grupos em folhas ou conjuntos de folhas SEPARADOS.
Apresente todos os cálculos necessários, e, dê boa apresentação à prova.

Grupo I

Cotação do grupo por questão/alínea: 1, 0.8, 0.7; 1, 1; 1; 1 valores

1. Na figura seguinte está, parcialmente, representado o gráfico da função $g : \mathbb{R} \to]-\infty, 3]$.



   (a) Com base na figura, determine a expressão analítica que define a função.

   (b) Indique a imagem (ou o contradomínio) de g. Quanto à sobrejectividade o que pode concluir?

   (c) Analise g quanto à injectividade.

2. Sejam f e g duas funções definidas por $f(x) = -\ln(x-4)$ e $g(x) = 2^{5-x} + 4$.

   (Nota: lnx$=\frac{\log_a x}{\log_a e}$, para $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$).

   (a) Caracterize g^{-1}, indicando a sua expressão analítica, o domínio e o contradomínio (ou imagem).

   (b) Caracterize $g \circ f$, indicando a sua expressão analítica e seu o domínio.

3. Segundo um corolário do Teorema de Bolzano: "Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(a).f(b) < 0$, então f tem um zero no intervalo $]a, b[$".

   Considere a função h definida por $h(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 5$.

   Usando o corolário referido anteriormente, mostre que $\frac{dh}{dx}$ tem 3 zeros no intervalo $[-2, 2]$.

4. Calcule o seguinte limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{x^3 - 1}}$.

Grupo II

Cotação do grupo por questão/alínea: 1, 1, 0.8, 0.5, 1.2; 1; 0.5, 1 valores

5. Seja h, uma função real de variável real, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \frac{1}{2-x} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

   (a) Analise g quanto à continuidade (em todo o seu domínio).
   (b) Calcule, caso existam, $g'(0)$ e $g'(2)$, justificando convenientemente.
   (c) Calcule a derivada de g.
   (d) Determine a equação da recta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $x = 1$.
   (e) Determine, caso existam, as assimptotas ao gráfico de g.

6. Seja f uma função real de variável real. Proponha um esboço para o gráfico da função f que possua as seguintes caracteristicas:

   - f é contínua e tem dois zeros;
   - $x = 2$ e $x = -1$ são assimptotas verticais;
   - $y = -x$ é uma assimptota oblíqua e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$;
   - f não tem extremos relativos e $f''(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 2\}$.

7. Numa fábrica, o custo total da produção mensal de x *centenas* de peças, expresso em milhares de euros, é dado, aproximadamente, por

$$c(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 100$$

   (a) Calcule c' (designada por custo marginal) e indique o seu valor para 8 *centenas* de peças.
   (b) Qual o número total de peças que é aconselhável produzir de modo que o custo total da produção mensal seja mínimo?

Grupo III

Cotação do grupo por questão/alínea: 1.2; 1.4, 1.2, 1.5, 1.2 valores

8. Determine a função f cuja derivada é $f'(x) = e^{2x}(1 + e^x)$ e que verifica $f(0) = 1$.

9. Calcule as seguintes primitivas:

   (a) $\displaystyle\int \frac{(x+3)^2 + \sqrt{x}}{x} dx$
   (b) $\displaystyle\int (x+1)^2 \sin x \, dx$
   (c) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 1} dx$
   (d) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx$ fazendo a substituição $t = e^{2x}$.

Fim