Escola Superior de Tecnologia e de Gestão de Bragança

Departamento de Matemática

Análise Matemática I 2005/2006

Cursos: CA, GE

Exame 2^a Chamada - 10/2/2006

Duração: 2h 30 min — Com Consulta de Formulário

Resolva os 3 grupos em folhas ou conjuntos de folhas SEPARADOS.
Apresente todos os cálculos necessários, e, dê boa apresentação à prova.

Grupo I

Cotação do grupo por questão/alínea: 1.25, 1; 1, 1, 1; 1; 1, 1.25 valores

1. Sejam f e g duas funções definidas por $f(x) = -\ln(x+1)$ e $g(x) = \sqrt{x+5}$.
   (a) Caracterize g^{-1}, indicando a sua expressão analítica, o domínio e o contradomínio (ou imagem).
   (b) Caracterize $g \circ f$, indicando a sua expressão analítica e seu o domínio.

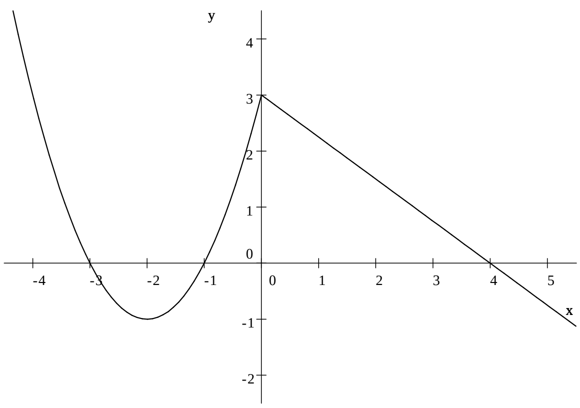
2. Seja h definida por

$$h(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{se } x > 0 \\ \sqrt{x^2+4} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

   (a) Analise h quanto à continuidade (em todo o seu domínio).
   (b) Determine $\dfrac{dh}{dx}(x)$, justificando convenientemente a existência, ou não, de $h'(0)$.
   (c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico da função h no ponto de abcissa $x = 1$.

3. Segundo o Teorema de Weierstrass: "Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado e limitado $[a,b]$, então f tem máximo e mínimo."
   Verifique se pode usar este Teorema para analisar a existência de máximo e mínimo da função $f(x) = \begin{cases} -1+\sqrt{2-x} & \text{se } x \geq 1 \\ \ln x & \text{se } x < 1 \end{cases}$.

4. Na figura seguinte está, parcialmente, representado o gráfico da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



   (a) Determine a expressão analítica que define a função.
   (b) Tendo em conta o gráfico apresentado analise a função quanto à injectividade e à sobrejectividade.

Grupo II

Cotação do grupo por questão/alínea: 1; 0.5, 1; 1.3; 1.7 valores

5. Calcule o seguinte limite $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{2+\ln x}}$.

6. Considere a função h definida por $h(x) = e^{\frac{1}{x+2}}$.

   (a) Mostre que $h''(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x+2}}(2x+5)}{(x+2)^4}$.

   (b) Estude as concavidades do gráfico da função h, e indique os seus pontos de inflexão.

7. Seja g uma função real de variável real. Proponha um esboço para o gráfico da função g que possua as seguintes caracteristicas:

   - g é contínua e tem um zero;
   - $x = 1$e $x = -1$ são assimptotas verticais;
   - $y = x$ é uma assimptota oblíqua e $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = 0$;
   - g não tem extremos relativos e $g''(x) \geq 0\ \forall x \in D_g$.

8. Suponha que possui um terreno aberto limitado apenas por um muro de um dos lados (ver figura). Suponha que pretende vedar uma parte do terreno em forma de rectângulo aproveitando, de um dos lados, o muro já existente. Sabendo que tem disponíveis 600 euros e que o preço da vedação por metro é de 3 euros, qual é a área máxima de terreno que consegue vedar.

Grupo III

Cotação do grupo por questão/alínea: 1.2; 1, 1.2, 1.4, 1.2 valores

9. Determine a função f cuja derivada é $f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+1}}$ e que verifica $f(0) = 2$.

10. Calcule as seguintes primitivas:

    (a) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+3}{e^x}dx$

    (b) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

    (c) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+x-2}dx$

    (d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}dx$ fazendo a substituição $t = \cos x$.

Fim