Escola Superior de Tecnologia e de Gestão de Bragança

Departamento de Matemática

Análise Matemática I 2005/2006

Cursos: CA, GE

Exame 2^a Chamada - 10/2/2006

Duração: 2h 30 min Com Consulta de Formulário

Proposta de resolução

Grupo I

Cotação do grupo por questão/alínea: 1.25, 1; 1, 1, 1; 1; 1, 1.25 valores

1. **Sejam f e g duas funções definidas por $f(x) = -\ln(x+1)$ e $g(x) = \sqrt{x+5}$.**

   (a) **Caracterize g^{-1}, indicando a sua expressão analítica, o domínio e o contradomínio (ou imagem).**

   Expressão analítica:

$$\begin{aligned} g(x) &= y \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+5} = y \\ &\Rightarrow x+5 = y^2 \\ &\Leftrightarrow x = y^2 - 5 \end{aligned}$$

   portanto, $g^{-1}(x) = x^2 - 5$.

   Contra-domínio (ou imagem) de g^{-1}: $\operatorname{Im}\left(g^{-1}\right) = D_g$ (pois g é injectiva).

   Ora, $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x+5 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -5\} = [-5, +\infty[$.

   Domínio de g^{-1}: $D_{g^{-1}} = \operatorname{Im}(g)$. Seja $x \in D_g$, então

$$\begin{gathered} -5 \leq x < +\infty \\ -5+5 \leq x+5 < +\infty + 5 \\ 0 \leq x+5 < +\infty \\ \sqrt{0} \leq \sqrt{x+5} < \text{"}\sqrt{+\infty}\text{"} \\ 0 \leq \sqrt{x+5} < +\infty \end{gathered}$$

   e, portanto, $D_{g^{-1}} = \operatorname{Im}(g) = [0, +\infty[$.

   (b) **Caracterize $g \circ f$, indicando a sua expressão analítica e seu o domínio.**

   Expressão analítica:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(-\ln(x+1)) = \sqrt{-\ln(x+1) + 5}.$$

   Domínio de $g \circ f$:

   $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$

   $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0\} =]-1, +\infty[$;

$D_g = [-5, +\infty[$, logo

$$\begin{aligned} f(x) \in D_g &\Longleftrightarrow -\ln(x+1) \geq -5 \\ &\Leftrightarrow \ln(x+1) \leq 5 \\ &\Leftrightarrow e^{\ln(x+1)} \leq e^5 \\ &\Leftrightarrow x+1 \leq e^5 \\ &\Leftrightarrow x \leq -1 + e^5 \end{aligned}$$

concluímos que $f(x) \in D_g \Longleftrightarrow x \in \left]-\infty, -1+e^5\right]$.
Então $D_{g \circ f} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \in]-1, +\infty[\wedge x \in \left]-\infty, -1+e^5\right]\right\} = \left]-1, -1+e^5\right[$.

2. **Seja h definida por**

$$h(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{se } \ x > 0 \\ \sqrt{x^2+4} & \text{se } \ x \leq 0 \end{cases}$$

(a) **Analise h quanto à continuidade (em todo o seu domínio).**

O domínio de h é $\mathbb{R}$ (porque e^{-x^2} tem domínio $\mathbb{R}$ e $\sqrt{x^2+4}$, como $x^2+4 \geq 4$, também tem domínio $\mathbb{R}$).

Para $x > 0$: $h(x) = e^{-x^2}$ é uma função contínua, porque é a composta das funções e^x com $\left(-x^2\right)$, que são ambas contínuas.

Para $x < 0$: $h(x) = \sqrt{x^2+4}$ é uma função contínua, porque é a composta das funções $\sqrt{x}$ com $\left(x^2+4\right)$, que são ambas contínuas.

Para $x = 0$: temos que analisar a continuidade pela definição

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} h(x) &= \lim_{x \to 0^+} e^{-x^2} = e^0 = 1 \\ \lim_{x \to 0^-} h(x) &= \lim_{x \to 0^-} \sqrt{x^2+4} = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

Como os limites laterais de h em 0 são diferentes, concluímos que h não é contínua em $x = 0$, e, consequentemente, h não é contínua.

(b) **Determine $\dfrac{dh}{dx}(x)$, justificando convenientemente a existência, ou não, de $h'(0)$.**

Para $x > 0$: $h(x) = e^{-x^2}$ logo, $h'(x) = \left(-x^2\right)' e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$.

Para $x < 0$: $h(x) = \sqrt{x^2+4}$ logo,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left[\left(x^2+4\right)^{1/2}\right]' \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(x^2+4\right)' \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2+4\right)^{-\frac{1}{2}}.2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \end{aligned}$$

Para $x = 0$: como h não é contínua em $x = 0$ então não tem derivada em 0.

Portanto $h'(x) = \begin{cases} -2xe^{-x^2} & \text{se } \ x > 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} & \text{se } \ x < 0 \end{cases}$

(c) **Determine a equação da recta tangente ao gráfico da função h no ponto de abcissa $x = 1$.**

A fórmula da equação da recta tangente é: $y - h(x_0) = h'(x_0)(x - x_0)$, onde
$x_0 = 1$

$h(x_0) = h(1) = e^{-1^2} = e^{-1}$
$h'(x_0) = h'(1) = -2 * 1 * e^{-1^2} = -2e^{-1}$
Assim, a equação da recta tangente é:

$$y - e^{-1} = -2e^{-1}(x-1) \iff y = -2e^{-1}x + 3e^{-1}.$$

3. **Segundo o Teorema de Weierstrass: "Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado e limitado $[a,b]$, então f tem máximo e mínimo."**

   Verifique se pode usar este Teorema para analisar a existência de máximo e mínimo da função $f(x) = \begin{cases} -1 + \sqrt{2-x} & \text{se } x \geq 1 \\ \ln x & \text{se } x < 1 \end{cases}$.

   Analisemos se f verifica as condições do teorema:

   - <u>continuidade</u>: Para $x > 1$ é contínua porquese trata da soma da função contínua (-1) com a $\sqrt{2-x}$ (e esta é contínua pois é a composta das funções contínuas $\sqrt{x}$ com $(x-2)$). Para $x < 1$ também é contínua pois $\ln x$ é uma função contínua. Para $x = 1$ temos:

   $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(-1 + \sqrt{2-x}\right) = -1 + \sqrt{1} = 0$$
   $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \ln x = \ln 1 = 0$$

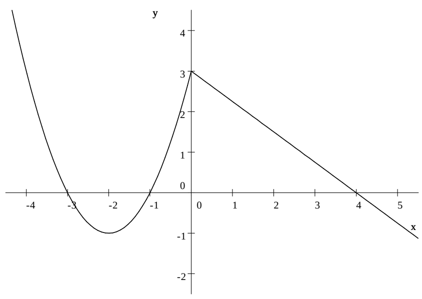
   e, consequentemente, $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$; como também $f(1) = \ln 1 = 0$ concluímos que f é contínua em $x = 1$, e consequentemente é contínua em todo o seu domínio.

   - <u>domínio</u>:

   $$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} : (2 - x \geq 0 \wedge x \geq 1) \wedge (x > 0 \wedge x < 1)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x \leq 2 \wedge x \geq 1) \wedge x \in]0,1[\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in [1,2] \wedge x \in]0,1[\} \\ &=]0,2] \end{aligned}$$

   ora, como $D_f =]0,2]$ e este não é um intervalo fechado, então não podemos aplicar o teorema de Weierstrass.
   (Repare que a função não tem mínimo porque $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$)

4. **Na figura seguinte está, parcialmente, representado o gráfico da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.**



   (a) **Determine a expressão analítica que define a função.**

   Segundo a figura verificamos que se trata de uma função contínua e derivável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

   Para $x < 0$ tem as propriedades de uma parábola com dois zeros: em $x = -3$ e em $x = -1$; Sendo assim, para $x < 0$, g pode ser uma função polinomial de grau 2 da forma:

   $$g(x) = C(x - (-3))(x - (-1))$$

onde C é uma constante diferente de zero tal que $g\left(-2\right)=-1$. Vamos determinar C:

$$g(-2)=-1 \Longleftrightarrow C\left(1\right)\left(-1\right)=-1 \Longleftrightarrow C=1.$$

Portanto, para $x<0$, $g\left(x\right)=\left(x+3\right)\left(x+1\right)=x^2+4x+3$.

Para $x>0$ trata-se de uma recta que passa nos pontos de coordenadas $P_1=(x_1,y_1)=(0,3)$ e $P_2=(x_2,y_2)=(4,0)$; então a respectiva equação é

$$g\left(x\right)=mx+b$$

onde $b=3$ porque é a ordenada da origem ($x_1=0 \Rightarrow y_1=3$); e $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-3}{4-0}=-\frac{3}{4}$.

Portanto, g é definida por ramos da seguinte forma:

$$g\left(x\right)=\begin{cases} -\frac{3}{4}x+3 & \text{se } x\geq 0 \\ x^2+4x+3 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

(b) **Tendo em conta o gráfico apresentado analise a função quanto à injectividade e à sobrejectividade.**

Injectividade: g é injectiva se $\forall a,b\in D_g \quad a\neq b \Longrightarrow g\left(a\right)\neq g\left(b\right)$; olhando para o gráfico temos que $-3\neq -1$ e no entanto $g\left(-3\right)=0=g\left(-1\right)$ o que contraria a definição, logo g não é injectiva.

Sobrejectividade: g é sobrejectiva se o contradomínio ou imagem de g é igual ao conjunto de chegada de g. Ora como g está definida $g:\mathbb{R}\to\underbrace{\mathbb{R}}$ então o conjunto de chegade de g é $\mathbb{R}$; por outro lado, observando o gráfico vemos que as imagens de g tomam valores desde $-\infty$ a $+\infty$ e portanto $D'_g=\operatorname{Im}\left(g\right)=\mathbb{R}$. Temos então que o conjunto de chegada e o contradomínio ou imagem de g coincidem, e portanto, g é sobrejectiva.

Grupo II

Cotação do grupo por questão/alínea: 1; 0.5, 1; 1.3; 1.7 valores

5. **Calcule o seguinte limite** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{2+\ln x}}$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x)^{\frac{2}{2+\ln x}}$$

Trata-se de uma indeterminação do tipo $0^{\frac{2}{-\infty}}=0^0$. Para calcular este limite com indeterminação, vamos escrever a função $f(x)$ de outra forma, usando a propriedade $fof^{-1}(x)=x$, com as funções exponencial e logarítmica. Isto permitir-nos-á usar uma propriedade da função logarítmica para transformar esta indeterminação numa outra de outro tipo. Assim, neste caso $f(x)=e^{\ln f(x)}$e por isso,

$$\lim_{x\to 0^+}(x)^{\frac{2}{2+\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)^{\frac{2}{2+\ln x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2}{2+\ln x}\ln(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\ln x}{2+\ln x}}$$

O limite que aparece em expoente é uma indeterminação do tipo $\frac{-\infty}{-\infty}$. Este limite pode ser calculado por aplicação Regra de Cauchy. Assim, o expoente vem,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x}{2+\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}2=2$$

Deste modo,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x)^{\frac{2}{2+\ln x}}=e^2.$$

6. **Considere a função** h **definida por** $h\left(x\right)=e^{\frac{1}{x+2}}$.

(a) **Mostre que** $h''(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x+2}}(2x+5)}{(x+2)^4}$**.**

Aplicamos a regra de derivação da exponêncial, $(e^u)' = u'e^u$. Assim, temos

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\frac{1}{x+2}\right)' e^{\frac{1}{x+2}} \\ &= -(x+2)^{-1-1} e^{\frac{1}{x+2}} \\ &= \frac{-1}{(x+2)^2} e^{\frac{1}{x+2}} \end{aligned}$$

Para calcular a 2^a derivada temos que usar a regra da derivação do produto ($(u.v)' = u'v + uv'$):

$$\begin{aligned} h''(x) = (h'(x))' &= \left(\frac{-1}{(x+2)^2}\right)' e^{\frac{1}{x+2}} + \frac{-1}{(x+2)^2}\left(e^{\frac{1}{x+2}}\right)' \\ &= -\left((x+2)^{-2}\right)' e^{\frac{1}{x+2}} + \frac{-1}{(x+2)^2}.\frac{-1}{(x+2)^2} e^{\frac{1}{x+2}} \\ &= -(-2)(x+2)^{-2-1} e^{\frac{1}{x+2}} + \frac{1}{(x+2)^4} e^{\frac{1}{x+2}} \\ &= \frac{2}{(x+2)^3} e^{\frac{1}{x+2}} + \frac{1}{(x+2)^4} e^{\frac{1}{x+2}} \\ &= \left(\frac{2}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+2)^4}\right) e^{\frac{1}{x+2}} \\ &= \frac{2(x+2)+1}{(x+2)^4} e^{\frac{1}{x+2}} \\ &= \frac{(2x+5)}{(x+2)^4} e^{\frac{1}{x+2}} \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

(b) **Estude as concavidades do gráfico da função h, e indique os seus pontos de inflexão.**

Para estudar as concavidades da função h, há que estudar as propriedades (nomeadamente o sinal) da segunda derivada. A segunda derivada de h tem, de acordo com a alínea anterior, a seguinte expressão analítica:

$$h''(x) = \frac{(2x+5)}{(x+2)^4}.e^{\frac{1}{x+2}}$$

Determinação dos pontos em que a segunda derivada se anula e onde não está definida:

$$\begin{aligned} h''(x) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \left(2x+5 = 0 \vee e^{\frac{1}{x+2}} = 0\right) \wedge x+2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \wedge x \neq -2 \end{aligned}$$

O factor exponencial nunca se anula (como sabemos, a função exponencial é sempre positiva).

Podemos agora apresentar num quadro a variação de cada um dos termos, e associar o sinal da segunda derivada ao sentido da concavidade da função h.

	$-\infty$	$-5/2$		-2	$+\infty$
$e^{\frac{1}{x+2}}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(2x+5)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x+2)^4$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
h''	$-$	0	$+$	ss	$+$
h	$\cap$	Pto.Inf.	$\cup$	ss	$\cup$

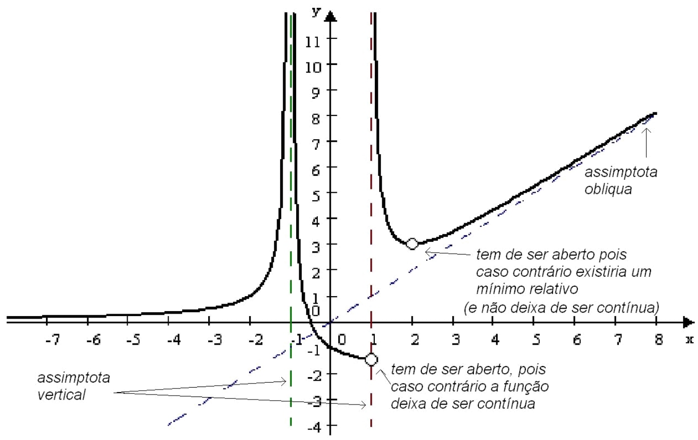
Podemos apresentar num quadro a variação de cada um dos termos, e associar o sinal da derivada ao sentido de variação da função h.
Podemos agora concluir acerca das concavidades da função:

$-$ tem concavidade voltada para cima $x \in \left]-\frac{5}{2}, -2\right[\cup \left]-2, +\infty\right[$;
$-$ tem concavidade voltada para baixo $x \in \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$;

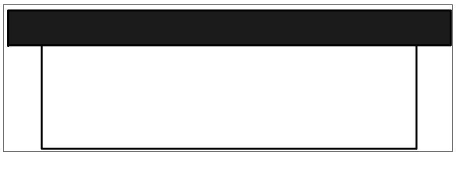
Em $x = -\frac{5}{2}$ existe um ponto de inflexão de coordenadas $\left(-\frac{5}{2}, h\left(-\frac{5}{2}\right)\right) = \left(-\frac{5}{2}, e^{-2}\right)$.

7. **Seja g uma função real de variável real. Proponha um esboço para o gráfico da função g que possua as seguintes caracteristicas:**

   - **g é contínua e tem um zero;**
   - **$x = 1$e $x = -1$ são assimptotas verticais;**
   - **$y = x$ é uma assimptota oblíqua e $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$;**
   - **g não tem extremos relativos e $g''(x) \geq 0$ $\forall x \in D_g$.**



8. **Suponha que possui um terreno aberto limitado apenas por um muro de um dos lados (ver figura). Suponha que pretende vedar uma parte do terreno em forma de rectângulo aproveitando, de um dos lados, o muro já existente. Sabendo que tem disponíveis 600 euros e que o preço da vedação por metro é de 3 euros, qual é a área máxima de terreno que consegue vedar.**



Sejam y o comprimento do lado oposto ao muro e x o comprimento do outro lado do terreno a vedar.

Pretende-se saber qual a área máxima de terreno que é possível vedar. Começamos, por isso, por escrever a função a maximizar. A área de um rectângulo é dada pelo produto dos dois lados. Assim:

$$A(x,y) = x.y$$

Estão envolvidas duas variáveis. Os restantes dados do problema permitirão colocar uma destas variáveis em função da outra. O perímetro do conjunto de três paredes de vedação a construir é dado por $P(x,y) = 2x + y$. Assim, para obter o custo total (600 euros disponíveis) temos apenas que multiplicar o perímetro de vedação pelo preço de cada metro da mesma (3 euros). ATENÇÃO: NÃO MISTURAR OU CONFUNDIR GRANDEZAS DE NATUREZA DIFERENTE (COMPRIMENTO E CUSTO)! DOS DOIS LADOS DA EQUAÇÃO DEVEM SURGIR GRANDEZAS DA MESMA NATUREZA!

$$\begin{aligned} 600 &= 3(2x+y) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{600}{3} = 2x + y \\ &\Leftrightarrow y = 200 - 2x \end{aligned}$$

Agora podemos escrever uma expressão para a função a maximizar, dependente apenas de uma variável:

$$A(x) = x.(200 - 2x) = 200x - 2x^2$$

Para calcular o máximo da função área, basta procurar os extremos relativos e provar que existe um máximo relativo. Começamos por calcular a derivada e determinar os pontos em que esta se anula.

$$A'(x) = 200 - 4x$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 200 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{200}{4} \Leftrightarrow x = 50$$

Existe um extremo relativo em $x = 50$. Temos agora que demonstrar que a função tem um máximo neste ponto. Examinamos por isso o comportamento da derivada de $A(x)$ em torno deste ponto. (Só tem sentido considerar valores $x > 0$, porque x é um comprimento):

	0	50	∞
A'	+	0	$-$
A	$\nearrow$	$Máx.$	$\searrow$

A outra dimensão da vedação é $y = 200 - 2x = 200 - 2 \times 50 = 100$ metros.

Assim, a área máxima de terreno que se consegue vedar é $A_{max} = 50 \times 100 = 5000\ m^2$.

Grupo III

Cotação do grupo por questão/alínea: 1.2; 1, 1.2, 1.4, 1.2 valores

9. **Determine a função f cuja derivada é $f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+1}}$ e que verifica $f(0) = 2$.**

Determinar a função $f(x)$ que tem por derivada $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{(x^2-4x+1)}}$ e que verifica $f(0) = 2$. Temos que $\int f'(x)dx = f(x) + c$ com $c \in \mathbb{R}$, logo calculemos o valor de $\int f'(x)dx$. Seja

$$\begin{aligned} \int \frac{x-2}{\sqrt{(x^2-4x+1)}}dx &= \int (x-2)(x^2-4x+1)^{-\frac{1}{2}}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \underbrace{(2x-4)}_{u'}\underbrace{(x^2-4x+1)^{-\frac{1}{2}}}_{u^n}dx \end{aligned}$$

como $\int u'u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$, $c \in \mathbb{R}$, vem que

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{(x^2-4x+1)}}dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2-4x+1)^{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \left(x^2-4x+1\right)^{\frac{1}{2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Agora falta calcular o valor da constante c tal que $f(0) = 2$. Seja

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \\ &\Leftrightarrow (1)^{\frac{1}{2}} + c = 2 \\ &\Leftrightarrow c = 1 \end{aligned}$$

Resultado final, a função $f(x)$ que verifica as condições é dada por $f(x) = \left(x^2-4x+1\right)^{\frac{1}{2}} + 1$.

10. **Calcule as seguintes primitivas:**

(a) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+3}{e^x}\mathbf{dx}$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{3x}+3}{e^x}dx &= \int \frac{e^{3x}}{e^x}dx + \int \frac{3}{e^x}dx \\ &= \int e^{2x}dx + 3\int \frac{1}{e^x}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \underbrace{2}_{u'}\underbrace{e^{2x}}_{u^n}dx - 3\int -e^{-x}dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^{-x} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\ \mathbf{dx}$

$\int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{f'}\underbrace{\ln(x)}_{g}dx$ vamos aplicar primitivação por partes, temos

- $f' = \frac{1}{x^2} \Longrightarrow f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \frac{1}{x^2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = -x^{-1}$
- $g = \ln(x) \Longrightarrow g' = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{f'}\underbrace{\ln(x)}_{g}dx &= -x^{-1}\ln(x) - \int -x^{-1}\frac{1}{x}dx \\ &= -x^{-1}\ln(x) + \int \frac{1}{x}\frac{1}{x}dx \\ &= -\frac{1}{x}\ln(x) + \int \frac{1}{x^2}dx \\ &= -\frac{1}{x}\ln(x) + \int x^{-2}dx \\ &= -\frac{1}{x}\ln(x) - x^{-1} \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + c \\ &= -\frac{\ln(x)+1}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+x-2}\mathbf{dx}$

$\int \frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+x-2}dx$ estamos perante uma fracção racional cujo grau do polinómio que está em denominador é inferior ao grau do polinómio que está em numerador vamos efectuar em primeiro a divisão dos dois polinómios, donde se obtem:

$$x^3+x^2+3x+1=(x)(x^2+x-2)+(5x+1)$$

e consequentemente,

$$\frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+x-2}=x+\frac{5x+1}{x^2+x-2}$$

e portanto, o integral dado inicialmente decompoe-se da seguinte forma:

$$\int \frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+x-2}dx=\int xdx+\int \frac{5x+1}{x^2+x-2}dx$$

O primeiro integral é imediato no segundo temos que utilizar o método dos coeficientes indeterminados para decompor a fracção racional em fracções simples.

Em primeiro lugar temos de factorizar o polinómio que está em denominador; usando a fórmula resolvente determinamos duas raízes reais, $x=1$ e $x=-2$ ambas com multiplicidade 1. Então a decomposição é a seguinte:

$$\begin{aligned}
\frac{5x+1}{(x-1)(x+2)} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}\\
&\Leftrightarrow \frac{5x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{A\,(x+2)}{(x-1)\,(x+2)}+\frac{B\,(x-1)}{(x+2)\,(x-1)}\\
&\Leftrightarrow (5x+1)=(A+B)x+(2A-B)\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 5 &=& A+B\\ 1 &=& 2A-B \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} A &=& 2\\ B &=& 3 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

e, então, temos $\frac{5x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{2}{(x-1)}+\frac{3}{(x+2)}$ logo o integral inicial é calculado usando a decomposição encontrada

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+x-2}dx &= \int xdx+\int \frac{2}{(x-1)}dx+\int \frac{3}{(x+2)}dx,\\
&= \frac{x^2}{2}+2\ln|x-1|+3\ln|x+2|+c,\quad c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}dx$ **fazendo a substituição** $t=\cos x$**.**

$t=\cos(x)\Leftrightarrow \frac{dt}{dx}=-\operatorname{sen}(x)\Leftrightarrow -dt=\operatorname{sen}(x)dx$, então temos após a substituição o seguinte,

$$\begin{aligned}
\int \frac{-dt}{t^3} &= \int -t^{-3}dt\\
&= -\int t^{-3}dt=-\frac{t^{-2}}{-2}+c
\end{aligned}$$

efectuando a substituição $t = \cos(x)$ vem finalmente

$$= \frac{1}{2cos^2(x)} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Fim