Escola Superior de Tecnologia e de Gestão de Bragança

Departamento de Matemática

Análise Matemática I 2005/2006

Cursos: CA, GE

1^o Teste - 7/12/2005

Duração: 1h 30 min — Com Consulta de Formulário

Proposta de resolução

Grupo I

Cotação do grupo por questão/alínea: 1; 1.5; 2; 1.5; 1; 1, 1, 1 valores

1. Resolva e indique o conjunto solução da equação $2x^2 - 2x = 4$.

   $2x^2 - 2x = 4$

   $\iff 2x^2 - 2x - 4 = 0$

   $\iff x = \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4.2.(-4)}}{2.(2)}$

   $\iff x = -1 \;\vee\; x = 2$

   $\iff x \in \{-1,\; 2\}$

2. Seja $g(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{2-x} - 1\right)$. Determine o domínio de g.

   $$D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+1}{2-x} - 1 > 0\right\}$$

   $$\frac{x+1}{2-x} - 1 > 0$$

   $$\iff \frac{x+1-1(2-x)}{2-x} > 0$$

   $\iff \frac{2x-1}{2-x} > 0;$

   Vamos determinar os zeros do númerador e do denominador para fazer uma tabela:

   $2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$

   $2 - x = 0 \iff x = 2$

		$\frac{1}{2}$		2	
$2x-1$	-	0	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	0	-
$\frac{2x-1}{2-x}$	-	0	$+$	n.d.	-

   Então $D_g = \left]\frac{1}{2}, 2\right[$.

3. Seja $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 2x^2 - 2x - 4$. Caracterize a função $(f \circ g)$ (indicando a expressão analítica, o domínio e a imagem de $f \circ g$).

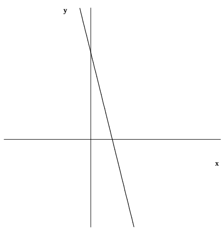
- Expressão analítica: $f \circ g(x) = f\left(g\left(x\right)\right) = f\left(2x^2 - 2x - 4\right) = \sqrt{2x^2 - 2x - 4}$
- Domínio: $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \ \wedge \ g\left(x\right) \in D_f\}$
  $D_g = \mathbb{R}$ porque é um polinómio;
  $D_f = [0, +\infty[$;
  logo, $g\left(x\right) \in D_f \iff 2x^2 - 2x - 4 \geq 0$, como foi calculado na 1^a questão os zeros desta parábola são em $x = -1$ e $x = 2$, e, como o coeficiente de x^2 é positivo, a parábola tem a concavidade voltada para cima, e portanto a solução desta condição é $x \in [-1, 2]$.
  Assim, $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x \in]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[\} =]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$.
- Imagem de $f \circ g$:
  $x \in D_{f \circ g} \iff -\infty < x \leq -1 \wedge 2 \leq x < +\infty$ e como $2x^2 - 2x - 4$ é uma parábola com concavidade voltada para cima, temos:
  $\iff 0 \leq 2x^2 - 2x - 4 < +\infty$ e como $\sqrt{x}$ é uma função crescente, obtemos
  $\iff \sqrt{0} \leq \sqrt{2x^2 - 2x - 4} < "\sqrt{+\infty}"$
  $\iff 0 \leq \sqrt{2x^2 - 2x - 4} < +\infty$, e então $\operatorname{Im}\left(f \circ g\right) = [0, +\infty[$.

4. Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - 2x^2}$.

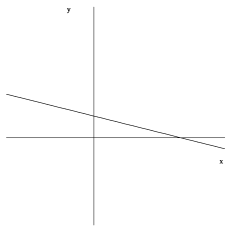
   $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - 2x^2} = \frac{\infty}{\infty}$; como se trata de um limite quando $x \to -\infty$, e os numerador e denominador são polinómios, então o limite que queremos calcular é igual ao limite do quociente dos termos de maior grau de cada polinómio:

   $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - 2x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{-2x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-2} = \tfrac{-\infty}{-2} = +\infty.$$

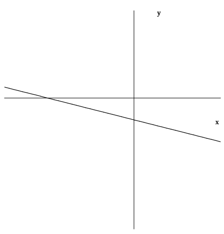
5. Seja f uma função cujo gráfico está representado, parcialmente, na figura em baixo. Das figuras (A), (B), (C) e (D), indique qual a que pode representar, parcialmente, o gráfico de f^{-1}. Justifique, suscintamente, a sua opção.



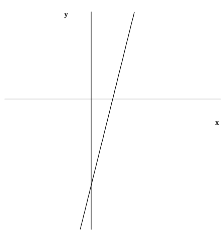
Grfico de f



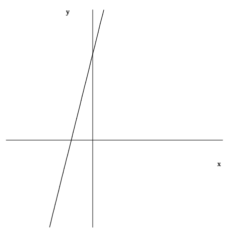
(A)



(B)



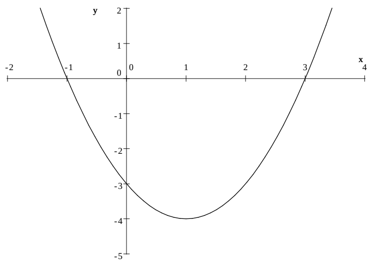
(C)



(D)

O gráfico da função inversa de f obtém-se do gráfico de f trocando os eixos dos $xx's$ com o dos $yy's$ e vice-versa. Sendo assim, observando o gráfico de f vemos se trata de uma recta que intersecta ambos os eixos nas respectivas partes positivas; no gráfico de f^{-1}, ao trocar os eixos estes serão intersectados nas partes positivas. Analisando as opções a única que é intersectado nas partes positivas é o da opção (A).

6. Seja f uma função cujo gráfico está representado, parcialmente, na figura seguinte.



(a) Com base na figura, determine a expressão analítica que define a função.

Segundo a figura verificamos que se trata de uma parábola com zeros em $x = -1$ e em $x = 3$, e tem vértice em $(1, -4)$.

Sendo assim, $f(x) = C(x - (-1))(x - 3) = C(x^2 - 2x - 3)$, onde C é uma constante positiva (porque a parábola tem concavidade voltada para cima). Vamos determinar C sabendo que

$f(1) = -4 \Longleftrightarrow C(-4) = -4 \Longleftrightarrow C = 1$, portanto $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

(b) Indique a imagem (ou o contradomínio) de f.

$\mathrm{Im}(f) = [-4, +\infty[$.

(c) Analise f quanto à injectividade.

f não é injectiva, porque: $x = -1$ e $y = 3$ são diferentes e pertencem ao domínio de f e no entanto têm imagens iguais: $f(-1) = 0 = f(3)$.

Grupo II

Cotação do grupo por questão/alínea: 1, 2.5, 2.5, 2; 2 valores

7. Seja f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{se } x > 1 \\ 1 + \ln(2 - x) & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

(a) Calcule $f(1)$ e $f(2)$.

$f(1) = 1 + \ln(2 - 1) = 1 + \ln(1) = 1$

$f(2) = 3.2^2 - 1 = 3.4 - 1 = 12 - 1 = 11$

(b) Analise f quanto à continuidade (em todo o seu domínio).

- Para $x > 1$, $f(x) = 3x^2 - 1$, e portanto, como se trata de uma função polinomial (função quadrática), é contínua em todo o seu domínio (que é $\mathbb{R}$), e portanto f é contínua para $x > 1$.
- Para $x < 1$, $f(x) = 1 + \ln(2 - x)$. O domínio de $1 + \ln(2 - x)$ é $\{x \in \mathbb{R} : 2 - x > 0\} =]-\infty, 2[$, e portanto está bem definida para $x < 1$.
  Quanto à continuidade,
  $\ln(2 - x)$ é contínua porque é a composta das funções contínuas $\ln x$ com $2 - x$;
  a função constante 1 é contínua;
  e portanto, $1 + \ln(2 - x)$ é contínua porque é a soma de funções contínuas.

- Para $x = 1$ temos que analisar a contínuidade por definição pois à direita f está definida por $3x^2 - 1$ e à esquerda por $1 + \ln(2 - x)$.
  $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (3x^2 - 1) = 2$
  $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (1 + \ln(2 - x)) = 1 + \ln 1 = 1$
  Como $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, então não existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ e portanto f não é contínua em $x = 1$.

(c) Determine $\dfrac{df}{dx}(x)$, justificando convenientemente a existência, ou não, de $f'(1)$.

- Para $x > 1$, $\dfrac{df}{dx}(x) = (3x^2 - 1)' = 6x$
- Para $x < 1$, $\dfrac{df}{dx}(x) = (1 + \ln(2 - x))' = \frac{(2-x)'}{2-x} = \frac{-1}{2-x} = \frac{1}{x-2}$
- Para $x \neq 1$, como a função não é contínua então não existe $f'(1)$.
  Assim, $f(x) = \begin{cases} 6x & \text{se } x > 1 \\ \frac{1}{x-2} & \text{se } x < 1 \end{cases}$.

(d) Determine a equação da recta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $x = 2$.
A fórmula da equação da recta tangente é: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, onde
$x_0 = 2$
$f(x_0) = f(2) = 3(2)^2 - 1 = 11$
$f'(x_0) = f'(2) = 6.2 = 12$
Assim, a equação da recta tangente é $y - 11 = 12(x - 2) \iff y = 12x - 13$.

8. Segundo o Teorema dos Valores Intermédios: "Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, e se d é uma constante que está entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe uma abcissa $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = d$."

   Seja $h(x) = e^{3x-2} + x$, usando o Teorema dos Valores Intermédios, mostre que a equação $h(x) = 2$ tem pelo menos uma solução.

   Vamos aplicar o teorema para o intervalo $[0, 2]$:

   - $h(x) = e^{3x-2} + x$ é contínua porque é a soma das funções contínuas x com e^{3x-2} (esta é contínua porque é a composta das funções contínuas e^x com $3x - 2$);
   - $h(0) = e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1$
   - $h(2) = e^4 + 2 > 18$
     Então como h é contínua em $[0, 2]$ e 2 está entre $h(0)$ e $h(2)$ então existe $c \in]0, 2[$ tal que $h(x) = 2$.