Escola Superior de Tecnologia e de Gestão de Bragança

Departamento de Matemática

Análise Matemática I 2005/2006

Cursos: CA, GE

1^a Chamada - 27/1/2006

Duração: 2h 30 min — Com Consulta de Formulário

Resolva os 3 grupos em folhas ou conjuntos de folhas SEPARADOS.
Apresente todos os cálculos necessários, e, dê boa apresentação à prova.

Grupo I

Cotação do grupo por questão/alínea: 1, 1.25, 1; 1, 1.25, 1; 1; 1 valores

1. Sejam f e g duas funções definidas por $f(x) = x^2 - 2x - 3$ e $g(x) = 1 - 3\ln(1-x)$.
   (a) Mostre que g é injectiva.
   (b) Caracterize g^{-1}, indicando a sua expressão analítica, o domínio e o contradomínio (ou imagem).
   (c) Caracterize $g \circ f$, indicando a sua expressão analítica e seu o domínio.

2. Seja h definida por

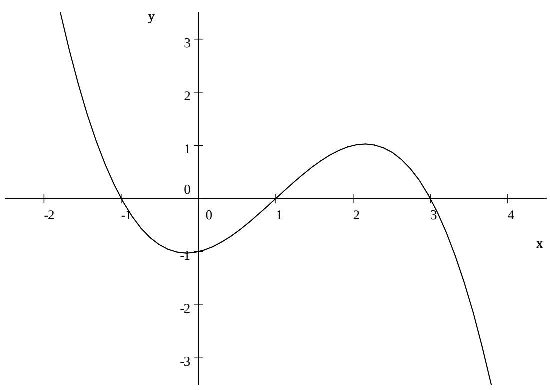
$$h(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) & \text{se } x > 0 \\ 1 + e^{3x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

   (a) Analise h quanto à continuidade (em todo o seu domínio).
   (b) Determine $\frac{dh}{dx}(x)$, justificando convenientemente a existência, ou não, de $h'(0)$.
   (c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico da função h no ponto de abcissa $x = -2$.

3. Segundo o Teorema de Rolle: "Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$."

   Seja $f(x) = e^x \sin(\pi x)$, usando o teorema de Rolle, mostre que f' tem pelo menos um zero no intervalo $]-2,-1[$.

4. Na figura seguinte está, parcialmente, representado o gráfico da função g. Determine a expressão analítica que define a função.



Grupo II

Cotação do grupo por questão/alínea: 1.3; 0.3, 1.3, 0.3, 1.3; 1 valores

5. Calcule o seguinte limite $\lim_{x\to 0}\left(e^x+3x\right)^{\frac{1}{2x}}$.

6. Considere a função h definida por $h\left(x\right)=\dfrac{e^x}{x^2-3}$

   (a) Calcule o domínio de h.

   (b) Determine, caso existam, as assímptotas do gráfico de h.

   (c) Mostre que $h'\left(x\right)=\frac{e^x\left(x^2-2x-3\right)}{\left(x^2-3\right)^2}$.

   (d) Estude a monotonia da função h, e indique os seus extremos relativos.

7. Seja g uma função real de variável real. Proponha um esboço para o gráfico da função g que verifique as seguintes caracteristicas:

   - g é contínua e tem apenas tem um zero em $x=1$;
   - g tem um único ponto de inflexão e $\lim_{x\to+\infty} g\left(x\right)=1$;
   - $x=0$ é uma assimptota vertical ao gráfico de g;
   -

		-2		0		3	
sinal de g'	$-$	0	$+$	n.d.	$+$	n.d.	$-$
sinal de g''	$+$	$+$	$+$	n.d.	$-$	n.d.	$+$

Grupo III

Cotação do grupo por questão/alínea: 1.25; 1, 1.25, 1.25, 1.25 valores

8. Determine a função f cuja derivada é $f'\left(x\right)=\frac{e^{2x}}{\left(e^{2x}+2\right)^3}$ e que verifica $f\left(0\right)=0$.

9. Calcule as seguintes primitivas

   (a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+2}{x}dx=$

   (b) $\int\left(x^2+3x+2\right)\ln x\ dx$

   (c) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3+x^2}dx$

   (d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-4x^2}}dx$ fazendo a substituição $x=2\cos t$.

Fim