Escola Superior de Tecnologia e de Gestão de Bragança

Departamento de Matemática

Análise Matemática I 2005/2006

Cursos: CA, GE

1^a Chamada - 27/1/2006

Duração: 2h 30 min — Com Consulta de Formulário

Proposta de resolução

Grupo I

Cotação do grupo por questão/alínea: 1, 1.25, 1; 1, 1.25, 1; 1; 1 valores

1. **Sejam f e g duas funções definidas por** $f(x) = x^2 - 2x - 3$ **e** $g(x) = 1 - 3\ln(1-x)$.

   (a) **Mostre que g é injectiva.**

   g é injectiva se e só se $\forall a, b \in D_g$, $g(a) = g(b) \iff a = b$. Assim:

$$\begin{aligned} g(a) &= g(b) \\ &\Leftrightarrow 1 - 3\ln(1-a) = 1 - 3\ln(1-b) \\ &\Leftrightarrow \ln(1-a) = \ln(1-b) \\ &\Leftrightarrow 1 - a = 1 - b \\ &\Leftrightarrow a = b \end{aligned}$$

   portanto, g é injectiva.

   (b) **Caracterize g^{-1}, indicando a sua expressão analítica, o domínio e o contradomínio (ou imagem).**

   Expressão analítica:

$$\begin{aligned} g(x) &= y \\ &\Leftrightarrow 1 - 3\ln(1-x) = y \\ &\Leftrightarrow \ln(1-x) = \frac{y-1}{-3} \\ &\Leftrightarrow 1 - x = e^{\frac{y-1}{-3}} \\ &\Leftrightarrow x = 1 - e^{\frac{1-y}{3}} \end{aligned}$$

   portanto, $g^{-1}(x) = 1 - e^{\frac{1-x}{3}}$.

   Contra-domínio (ou imagem) de g^{-1}: $\mathrm{Im}\left(g^{-1}\right) = D_g$ pois g é injectiva.

   Ora, $D_g = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x > 0\} =]-\infty, 1[$.

   Domínio de g^{-1}: $D_{g^{-1}} = \mathrm{Im}(g)$. Seja $x \in D_g$, então

$$\begin{aligned} -\infty &< x < 1 \\ -1 &< -x < \infty \\ 0 &< 1 - x < \infty \\ -\infty &< \ln(1-x) < \infty \\ -\infty &< 1 - 3\ln(1-x) < \infty \end{aligned}$$

   e, portanto, $D_{g^{-1}} = \mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$.

(c) **Caracterize $g \circ f$, indicando a sua expressão analítica e seu o domínio.**

Expressão analítica:

$$g \circ f\,(x) = g\,(f\,(x)) = g\left(x^2 - 2x - 3\right) = 1 - 3\ln\left(1 - x^2 + 2x + 3\right).$$

Domínio de $g \circ f$:

$D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f\,(x) \in D_g\}$

$D_f = \mathbb{R}$, porque f é uma função polinomial ;

$D_g = \left]-\infty, 1\right[$, logo $f\,(x) \in D_g \Longleftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 1 \Longleftrightarrow x^2 - 2x - 4 < 0$

Zeros de $x^2 - 2x - 4$:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{5} \vee x = 1 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

estudando o sinal da parábola:

		$1-\sqrt{5}$		$1+\sqrt{5}$	
$x^2 - 2x - 4$	$+$	0	$-$	0	$+$

concluímos que $f\,(x) \in D_g \Longleftrightarrow x \in \left]1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}\right[$.

Então $D_{g\circ f} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge x \in \left]1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}\right[\right\} = \left]1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}\right[$.

2. **Seja h definida por**

$$h\,(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) & \text{se } x > 0 \\ 1 + e^{3x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

(a) **Analise h quanto à continuidade (em todo o seu domínio).**

O domínio de h é $\mathbb{R}$ (porque $1 + e^{3x}$ tem domínio $\mathbb{R}$ e $\ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$ tem domínio $\left]-1, \infty\right[$ e portanto está bem definida para $x > 0$).

Para $x > 0$: $h\,(x) = \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$ é uma função contínua, porque é a composta das funções $\ln x$ com $\left(\frac{1}{x+1}\right)$, que são ambas contínuas.

Para $x < 0$: $h\,(x) = 1 + e^{3x}$ é uma função contínua, porque é a soma das funções contínuas 1 com e^{3x} (que é contínua porque é a composta das funções contínuas e^x com $(3x)$).

Para $x = 0$: temos que analisar a continuidade pela definição

$$\lim_{x\to 0^-} h\,(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(1 + e^{3x}\right) = 1 + e^0 = 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} h\,(x) = \lim_{x\to 0^-} \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{0+1}\right) = \ln 1 = 0$$

Como os limites laterais de h em 0 são diferentes, concluímos que h não é contínua em $x = 0$, e, consequentemente, h não é contínua.

(b) **Determine $\dfrac{dh}{dx}(x)$, justificando convenientemente a existência, ou não, de $h'(0)$.**

Para $x > 0$: $h\,(x) = \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$ logo, $h'\,(x) = \frac{\left(\frac{1}{x+1}\right)'}{\frac{1}{x+1}} = \frac{-\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}} = -\frac{1}{x+1}$.

Para $x < 0$: $h\,(x) = 1 + e^{3x}$ logo, $h'\,(x) = 1' + (3x)'\,e^{3x} = 3e^{3x}$.

Para $x = 0$: como h não é contínua em $x = 0$ então não tem derivada em 0.

Portanto $h'\,(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x+1} & \text{se } x > 0 \\ 3e^{3x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

(c) **Determine a equação da recta tangente ao gráfico da função h no ponto de abcissa $x = -2$.**

A fórmula da equação da recta tangente é: $y - h(x_0) = h'(x_0)(x - x_0)$, onde
$x_0 = -2$
$h(x_0) = h(-2) = 1 + e^{-6}$
$h'(x_0) = h'(-2) = 3e^{-6}$
Assim, a equação da recta tangente é:

$$y - \left(1 + e^{-6}\right) = 3e^{-6}(x + 2) \Longleftrightarrow y = 3e^{-6}x + 7e^{-6} + 1.$$

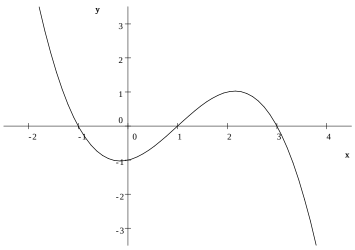
3. **Segundo o Teorema de Rolle: "Seja $f : [a, b] \to R$ é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$."**

Seja $f(x) = e^x \operatorname{sen}(\pi x)$, usando o teorema de Rolle, mostre que f' tem pelo menos um zero no intervalo $]-2, -1[$.

- f é contínua em $\mathbb{R}$ porque é o produto das funções contínuas e^x com $\operatorname{sen}(\pi x)$ (esta é contínua porque é a composta das funções contínuas $\operatorname{sen} x$ com (πx)); portanto, em particular é contínua em $[-2, -1]$;
- $f'(x) = e^x \operatorname{sen}(\pi x) + \pi e^x \cos(\pi x)$, que está definida em $\mathbb{R}$, e portanto é derivável em $]-2, -1[$.
- $f(-2) = e^{-2} \operatorname{sen}(-2\pi) = 0 = e^{-1} \operatorname{sen}(-\pi) = f(-1)$

  Temos, portanto, que f satisfaz as condições do teorema de Rolle em $[-2, -1]$.
  Então pelo teorema de Rolle, f' tem um zero no intervalo $]-2, -1[$.

4. **Na figura seguinte está, parcialmente, representado o gráfico da função g. Determine a expressão analítica que define a função.**



Segundo a figura verificamos que se trata de uma função contínua e derivável com três zeros: em $x = -1$; em $x = 1$; em $x = 3$; e que $g(2) = 1$.

Sendo assim, g pode ser uma função polinomial de grau 3 da forma:

$$g(x) = C(x - (-1))(x - 1)(x - 3)$$

onde C é uma constante diferente de zero tal que $g(2) = 1$. Vamos determinar C:

$$g(2) = 1 \Longleftrightarrow C(3)(1)(-1) = 1 \Longleftrightarrow C = -\frac{1}{3}.$$

Portanto $g(x) = -\frac{1}{3}(x + 1)(x - 1)(x - 3) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x - 1$.

Grupo II

Cotação do grupo por questão/alínea: 1.3; 0.3, 1.3, 0.3, 1.3; 1 valores

5. **Calcule o seguinte limite $\lim_{x \to 0} (e^x + 3x)^{\frac{1}{2x}}$.**

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (e^x + 3x)^{\frac{1}{2x}}$$

Trata-se de uma indeterminação do tipo 1^∞. Para calcular este limite com indeterminação, vamos escrever a função $f(x)$ de outra forma, usando a propriedade $fof^{-1}(x) = x$, com as funções exponencial e logarítmica. Isto permitir-nos-á usar uma propriedade da função logarítmica para transformar esta indeterminação numa outra de outro tipo. Assim, neste caso $f(x) = e^{\ln f(x)}$e por isso,

$$\lim_{x\to 0}(e^x+3x)^{\frac{1}{2x}} = e^{\lim_{x\to 0}\ln(e^x+3x)^{\frac{1}{2x}}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\ln(e^x+3x)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+3x)}{2x}}$$

O limite que aparece em expoente é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Este limite pode ser calculado por aplicação Regra de Cauchy. Assim, o expoente vem,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+3x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+3}{e^x+3x}}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+3}{2(e^x+3x)} = \frac{4}{2} = 2$$

Deste modo,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(e^x+3x)^{\frac{1}{2x}} = e^2$$

6. **Considere a função h definida por $h(x) = \dfrac{e^x}{x^2-3}$**

   (a) **Calcule o domínio de h.**

$$\begin{aligned} D_h &= \left\{x\in\mathbb{R} : x^2-3\neq 0\right\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R} : x^2\neq 3\right\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R} : x\neq -\sqrt{3}\wedge x\neq\sqrt{3}\right\} \\ &= \mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\} \end{aligned}$$

   (b) **Determine, caso existam, as assímptotas do gráfico de h.**

   - Para determinar as <u>*assímptotas verticais*</u> consideramos os pontos em que $h(x)$ é descontínua, $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$, e calculamos os limites laterais nesses pontos.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -\sqrt{3}^+} h(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to -\sqrt{3}^-} h(x) &= +\infty \\ \lim_{x\to \sqrt{3}^+} h(x) &= +\infty \\ \lim_{x\to -\sqrt{3}^-} h(x) &= -\infty \end{aligned}$$

     Assim, $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$ são duas assímptotas verticais do gráfico de $h(x)$.

   - Quanto às <u>*assímptotas horizontais*</u>, examinamos o comportamento da função quando $x\to -\infty$ e quando $x\to +\infty$.

$$\lim_{x\to -\infty} h(x) = \lim_{x\to -\infty}\frac{e^x}{x^2-3} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

     Assim, existe uma assímptota horizontal quando $x\to -\infty$ de equação $y = 0$, e esta é, portanto, a única assimptota não vertical quando $x\to -\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2-3}$$

onde vamos obter uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Como as funções que figuram no numerador e no denominador são contínuas e deriváveis, podemos aplicar a Regra de Cauchy sucessivamente até deixarmos de obter indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

Assim, concluímos que não existe assímptota horizontal quando $x\to+\infty$, e, quando muito poderá existir uma assimptota oblíqua quando $x\to+\infty$.

- Analisemos, então, a existência de <u>*assimptota oblíqua*</u> quando $x\to+\infty$, de equação $y=mx+b$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x(x^2-3)}$$

que se trata de uma indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$. Como as funções que figuram no numerador e no denominador são contínuas e deriváveis, podemos aplicar a Regra de Cauchy.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x(x^2-3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2-3}$$

que é de novo uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Podemos voltar a aplicar a Regra de Cauchy até deixarmos de ter indeterminações deste tipo.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty$$

Concluimos, pois, que não existe uma assímptotas oblíquas quando $x\to+\infty$ (nem quando $x\to-\infty$).

(c) **Mostre que $h'(x)=\frac{e^x\left(x^2-2x-3\right)}{\left(x^2-3\right)^2}$.**

Aplicamos a regra de derivação do produto,

$$(u.v)^{'}=\frac{u^{'}v-uv^{'}}{v^2}$$

Assim, temos

$$h^{'}(x)=\frac{(e^x)^{'}(x^2-3)-e^x(x^2-3)^{'}}{(x^2-3)^2}=\frac{e^x.(x^2-3)-e^x.2x}{(x^2-3)^2}=\frac{e^x(x^2-2x-3)}{(x^2-3)^2}$$

como queríamos demonstrar.

(d) **Estude a monotonia da função h, e indique os seus extremos relativos.**

Para estudar a monotonia da função h, há que estudar as propriedades (nomeadamente o sinal) da sua derivada. A derivada de h, com a expressão analítica,

$$h^{'}(x)=\frac{e^x(x^2-2x-3)}{(x^2-3)^2}$$

contém vários factores com as seguintes características:

- e^x , função exponencial, tem sempre sinal positivo;
- $(x^2-3)^2$ é um factor sempre positivo (é um quadrado), excepto para os valores de x onde a função é descontínua;
- x^2-2x-3 é um polinómio o 2^o grau com raízes: $x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4x1x(-3)}}{2x1}=\frac{2\pm4}{2}$; $x=-1\vee x=3$;
- "ss" tem o sentido de "sem significado".

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		-1		$\sqrt{3}$		3	$+\infty$
e^x	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-2x-3	$+$	$+$	$+$	0	-	-	-	0	$+$
$(x^2-3)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$h'(x)$	$+$	ss	$+$	0	-	ss	-	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	ss	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	ss	$\searrow$	Min	$\nearrow$

Podemos apresentar num quadro a variação de cada um dos termos, e associar o sinal da derivada ao sentido de variação da função h.

Podemos agora concluir acerca da monotonia da função:

_ é monotona crescente para $x \in \left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]-\sqrt{3}, -1\right[\cup]3, +\infty[$;

_ é monotona decrescente para $x \in \left]-1, \sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, 3\right[$;

Em $x = -1$ existe um máximo relativo e em $x = 3$ existe um mínimo relativo:

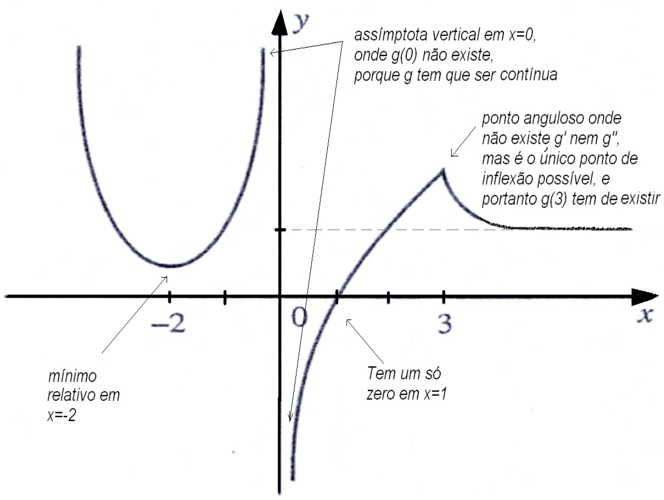
_ Máximo relativo de $h(x)$: $h(-1) = \frac{1}{-2e}$;

_ Mínimo relativo de $h(x)$: $h(3) = \frac{e^3}{24}$.

7. **Seja g uma função real de variável real. Proponha um esboço para o gráfico da função g que verifique as seguintes caracteristicas:**

- **g é contínua e tem apenas tem um zero em $x = 1$;**
- **g tem um único ponto de inflexão e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$;**
- **$x = 0$ é uma assimptota vertical ao gráfico de g;**
-

		-2		0		3	
sinal de $\mathbf{g'}$	$-$	**0**	$+$	**n.d.**	$+$	**n.d.**	$-$
sinal de $\mathbf{g''}$	$+$	$+$	$+$	**n.d.**	$-$	**n.d.**	$+$



Grupo III

Cotação do grupo por questão/alínea: 1.25; 1, 1.25, 1.25, 1.25 valores

8. **Determine a função f cuja derivada é $f'(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+2)^3}$ e que verifica $f(0) = 0$.**

Temos que $\int f'(x)dx = f(x) + c$ com $c \in \mathbb{R}$ logo calculemos o valor de $\int f'(x)dx$. Seja

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+2)^3}dx &= \int e^{2x}(e^{2x}+2)^{-3}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \underbrace{2e^{2x}}_{u'}\underbrace{(e^{2x}+2)^{-3}}_{u^n}dx\end{aligned}$$

como $\int u'u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$, $c \in \mathbb{R}$, vem que

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+2)^3}dx &= \frac{1}{2}\frac{(e^{2x}+2)^{-2}}{-2} + c \\ &= -\frac{1}{4}(e^{2x}+2)^{-2} + c, \text{ com } c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Agora falta calcular o valor da constante c tal que $f(0) = 0$. Seja

$$\begin{aligned}&f(0) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{4}(e^0+2)^{-2} + c = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{4}(3)^{-2} + c = 0 \\ &\Leftrightarrow c = \frac{1}{36}.\end{aligned}$$

Portanto, a função $f(x)$ que verifica as condições é dada por $f(x) = -\frac{1}{4}(e^{2x}+2)^{-2} + \frac{1}{36}$.

9. **Calcule as seguintes primitivas:**

(a) $\int \frac{\sqrt{x}+2}{x}\mathbf{dx}$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}+2}{x}dx &= \int \frac{\sqrt{x}}{x}dx + \int \frac{2}{x}dx \\ &= \int \frac{x^{1/2}}{x}dx + 2\int \frac{1}{x}dx \\ &= \int x^{-1/2}dx + 2ln\,|x| + c, c \in \mathbb{R}, \\ &= \int \underbrace{1}_{u'}\underbrace{x^{-1/2}}_{u^n}dx + 2ln\,|x| + c \\ &= \frac{x^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + 2ln\,|x| + c \\ &= 2x^{1/2} + 2ln\,|x| + c \\ &= \ 2(\sqrt{x} + ln|x|) + c, c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

(b) $\int \left(x^2+3x+2\right)\ln \mathbf{x}\ \mathbf{dx}$

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{(x^2+3x+2)}_{f'}\underbrace{\ln x}_{g}dx &= \underbrace{\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+2x\right)}_{f}\underbrace{\ln x}_{g} - \int \underbrace{\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+2x\right)}_{f}\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\,dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+2x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^3}{3x}+\frac{3x^2}{2x}+\frac{2x}{x}\right)dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+2x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^2}{3}+\frac{3x}{2}+2\right)dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+2x\right)\ln x - \left(\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}+2x\right)+c\ ,c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3+x^2}\mathbf{dx}$

Como estamos perante uma fracção racional cujo grau do polinómio que está em denominador é superior ao grau do polinómio que está em numerador, vamos decompôr a fracção como uma soma de fracções simples.

Em primeiro lugar, vamos factorizar o polinómio que está em denominador:

$$x^3+x^2=x^2\,(x+1)$$

e vemos que tem duas raízes reais, $x=0$ com multiplicidade 2, e, $x=-1$ com multiplicidade 1.

Em segundo, decompôr a fracção como uma soma de fracções simples:

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x^2(x+1)} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{(x+1)} \\
&\Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2(x+1)} = \frac{(A+C)x^2+(A+B)x+(B)}{x^2(x+1)} \\
&\Leftrightarrow (x-1)=(A+C)x^2+(A+B)x+(B) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = A+C \\ 1 = A+B \\ -1 = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \\ C = -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

então temos $\frac{x-1}{x^2(x+1)}=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x+1}$. Então, por fim, o integral inicial é calculado usando a decomposição encontrada:

$$\begin{aligned}
\int (\frac{x-1}{x^3+x^2})dx &= \int (\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x+1})dx \\
&= 2\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x^2}dx - 2\int \frac{1}{x+1}dx \\
&= 2ln|x| - \int x^{-2}dx - 2ln|x+1|+c \\
&= 2ln|x| - \frac{x^{-1}}{-1} - 2ln|x+1|+c \\
&= 2ln|x| + x^{-1} - 2ln|x+1|+c, c\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-4x^2}}dx$ **fazendo a substituição** $x=2\cos t$**.**

$x=2\cos(t)\Rightarrow x^2=4\cos^2(t)$

$x = 2\cos(t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -2\,\mathrm{sen}(t) \Leftrightarrow dx = -2\,\mathrm{sen}(t)dt$

A raíz vai ser substituída da seguinte forma:

$$\sqrt{16-4x^2} = \sqrt{16-4.4\cos^2 t} = \sqrt{16\left(1-\cos^2 t\right)}$$

e como pela Fórmula Fundamental da Trigonometria temos $\mathrm{sen}^2\, t + \cos^2 t = 1 \Leftrightarrow \mathrm{sen}^2\, t = 1-\cos^2 t$, donde

$$\sqrt{16\left(1-\cos^2 t\right)} = \sqrt{16\ \ \mathrm{sen}^2\, t} = 4\,\mathrm{sen}\, t$$

Agora, efectuando a substituição no integral, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-4x^2}}dx &= \int \frac{1}{4\cos^2 t * 4\,\mathrm{sen}\, t}\left(-2\,\mathrm{sen}\, t\right)dt \\
&= \int \frac{-2\,\mathrm{sen}\, t}{4\cos^2 t * 4\,\mathrm{sen}\, t}dt \\
&= -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\cos^2 t}dt \\
&= -\frac{1}{8}\int \sec^2 t dt \\
&= -\frac{1}{8}\,\mathrm{tg}\, t + c
\end{aligned}$$

voltando à variável inicial, temos que:

$\cos t = \frac{x}{2}$

e como $\sqrt{16-4x^2} = 4\,\mathrm{sen}\, t \Leftrightarrow \mathrm{sen}\, t = \frac{\sqrt{16-4x^2}}{4}$

vem que $\mathrm{tg}\, t = \frac{\mathrm{sen}\, t}{\cos t} = \frac{\frac{\sqrt{16-4x^2}}{4}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{16-4x^2}}{2x} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$, e portanto, obtemos:

$$-\frac{1}{8}\,\mathrm{tg}\, t + c = -\frac{1}{8}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Fim