Capítulo VI

Primitivação

6.1 Definição de Primitiva. Relação entre primitiva e derivadas.

Dada uma função *F* já sabemos determinar uma nova função *F'* que se obtém da anterior através da derivação. Pensemos no problema ao contrário:

Dada uma função f, será possível determinar uma
outra função F tal que $F'(x) = f(x)$?

A uma tal função *F* chama-se **primitiva** ou **integral** de f.

Tal como há regras para a derivação, vamos encontrar regras para a primitivação ou integração.

Definição:

Uma função F é uma ***primitiva*** *ou* ***integral*** *de uma função $f : I \rightarrow IR$ se*

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I$$

(I é um intervalo ou reunião finita de intervalos).

Exemplo:

1) $F(x) = x^2 + x$ é uma primitiva de $f(x) = 2x + 1$.

   $G(x) = x^2 + x + 2$ também é uma primitiva de $f(x) = 2x + 1$.

   $H(x) = x^2 + x - 30$ também é uma primitiva de $f(x) = 2x + 1$.

2) Uma primitiva de $f(x) = e^{2x} + x^2$ é $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}x^3$, outro exemplo também pode ser $G(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}x^3 + 5$. De facto, tem-se $F'(x) = G'(x)$.

Teorema:

Se F, G *são duas primitivas de* $f : I \to IR$, *então F e G diferem apenas numa constante, isto é, existe* C *constante, tal que* $G(x) = F(x) + C, \quad \forall x \in I$.

Segundo este teorema não se tem uma só primitiva de uma função, mas sim uma família de primitivas, cuja diferença entre elas é uma constante. Assim, podemos dizer que uma primitiva é <u>**única** a menos de uma constante</u>.

Notação:

Para indicar uma primitiva geral de f (nos termos do teorema anterior), utiliza-se a notação:

$$\int f(x)\, dx$$

Sinal de integral

Função a primitivar

Indica em ordem a que variável se vai primitivar

Escreve-se $\int f(x)\, dx = F(x) + C$ *quando* $F'(x) = f(x)$. C *é a constante de integração.*

<u>Exemplo:</u>

1) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{x} + C$ *2)* $\int \frac{1}{x}\, dx = ln(x) + C, \; x > 0$ 3) $\int e^x\, dx = e^x + C$

6.2 Primitivas imediatas. Regras de primitivação.

Como vimos pela definição a primitivação ou **integração é a operação inversa da derivação** e portanto temos as seguintes propriedades:

- $\int F'(x)\, dx = F(x) + C$;
- $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\, dx\right) = f(x)$.

Esta relação permite obter directamente propriedades e primitivas de várias funções a partir das propriedades e tabelas de derivação:

Fórmula de derivação	Fórmula de primitivação
$\frac{d}{dx}(C)=0$	$\int 0\ dx = C$
$\frac{d}{dx}(ax)=a$	$\int a\ dx = ax + C$
$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$	$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ para $(n \neq -1)$ (*)
$\frac{d}{dx}(ln(x))=\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\ dx = ln\lvert x\rvert + C$ (**)
$\frac{d}{dx}(sen(x))=cos(x)$	$\int cos(x)\ dx = sen(x) + C$
$\frac{d}{dx}(cos(x))=-sen(x)$	$\int sen(x)\ dx = -cos(x) + C$
$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$	$\int e^x\ dx = e^x + C$
$\frac{d}{dx}(arctg(x))=\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = arctg(x) + C$
$\frac{d}{dx}(arcsen(x))=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = arcsen(x) + C$

(*a* e *C* são constantes.)

A fórmula (*) não é válida para o caso em que $n = -1$, nesse caso aplica-se a fórmula (**).

Exercício:

Verifique que $\frac{d}{dx}(ln\lvert x\rvert)=\frac{1}{x}$.

Proposição:

Tal como a derivação também a primitivação é uma operação linear, isto é:

- $\int k.f(x)\ dx = k\int f(x)\ dx$
- $\int [f(x)+g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$

Exercício 2:

Calcule as seguintes primitivas.

1) $\int \left(3x^4 - 2x + 5\right) dx$

2) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx$

3) $\int \frac{3x^2 - 2}{x^2}\, dx$

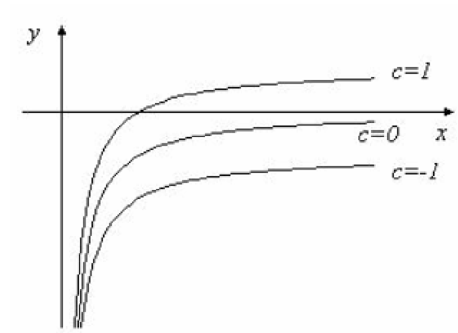
4) $\int \frac{dx}{x^2}$

Resolução de 4)

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C .$$

Observação:

Se considerarmos $x > 0$ comparemos o gráfico das três diferentes primitivas de $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Os gráficos correspondem a funções da forma $-\frac{1}{x} + C$, para valores de C iguais a 1, 0 e -1:



Exercício 3:

Determine a primitiva F da função $f(x) = 2x + e^{-x}$ *tal que F(0)=3.*

Resolução:

1º) Calcular a primitiva de f:

$$\int \left(2x + e^{-x}\right) dx = \int 2x\ dx + \int e^{-x}\ dx = 2\int x\ dx + \int e^{-x}\ dx = 2\frac{x^2}{2} + C_1 + \int e^{-x}\ dx =$$
$$= x^2 + C_1 + \int e^{-x}\ dx$$

É fácil de ver que uma primitiva de e^{-x} é $-e^{-x}$: $\frac{d}{dx}\left(-e^{-x}\right) = e^{-x}$.

Logo $\int \left(2x + e^{-x}\right) dx = x^2 + C_1 - e^{-x} + C_2 = x^2 - e^{-x} + C = F(x)$.

Note-se que a soma das constantes C_1, C_2 ainda é uma constante, C.

2º) Determinar C de modo que $F(0) = 3$:

$$F(0) = 0^2 - e^{-0} + C = 3 \quad \Leftrightarrow \quad -1 + C = 3 \quad \Leftrightarrow \quad C = 4$$

A resposta é $F(x) = x^2 - e^{-x} + 4$.

Nota:

- *Podemos sempre verificar se o resultado de uma primitiva está ou não correcto, por derivação;*
- *Resultados de uma primitiva aparentemente distintos podem, na verdade, diferir entre si apenas em uma constante;*
- Há funções que apesar de serem *elementares* a sua primitiva não é *elementar*, por exemplo e^{-x^2} e $\frac{sen(x)}{x}$.

6.3 Primitivação por substituição.

Já vimos como calcular primitivas de funções simples a partir da tabela de derivação. Passemos agora a funções mais "complicadas".

A **Regra da Cadeia** (ou regra da derivada da função composta – rever página 108) para derivação de uma **função composta** é:

$$\frac{d}{dx}F(u(x)) = F'(u(x)).u'(x)$$

Relacionando a regra da cadeia com a primitivação temos:

$$\int F'(u(x)).u'(x)\ dx = F(u(x)) + C$$

Exemplo:

Seja $f(x) = e^{kx}$ *onde* k *é uma constante diferente de zero.*

Pretende-se determinar $\int ke^{kx}dx$.

Podemos encarar a função f *como composta das funções* $u(x) = kx$ *e* $F(x) = e^x$.

Então, temos que:

- $F(u(x)) = e^{kx}$
- $F'(u(x)) \cdot u'(x) = ke^{kx}$ *(derivada da função composta).*
- $\int ke^{kx}dx = \int F'(u(x)) \cdot u'(x)dx = \int [F(u(x))]'dx = F(u(x)) + C = e^{kx} + C$

Se em vez de $\int ke^{kx}dx$ *tivermos* $\int e^{kx}dx$*, o problema é de fácil resolução pois*

$$\int e^{kx}dx = \int \frac{k}{k}e^{kx}dx = \frac{1}{k}\int ke^{kx}dx$$

e este integral já sabemos calcular e portanto $\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$.

Exercício:

a) Calcule a primitiva da função $f(x) = 2xe^{x^2-1}$.

Resolução:

Fazendo $u(x) = x^2 - 1$ vem que

$$\int f(x)dx = \int 2xe^{x^2-1}dx = \int u'(x)e^{u(x)}dx = \int \left(e^{u(x)}\right)' dx = e^{u(x)} + C = e^{x^2-1} + C$$

b) $\int 2xe^{x^2-1}dx$

Resolução:

Fazendo $u(x) = x^2 - 1$, $u' = 2x$ vem que

$$\int \underbrace{2x}_{u'}\underbrace{e^{x^2-1}}_{e^u}dx = \int \left(e^{x^2-1}\right)'dx = e^{x^2-1} + C$$

c) $\int \frac{e^{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}}dx$

Resolução:

Fazendo $u(x) = \sqrt{x} - 1$, $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ podemos escrever o integral como $\int \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}-1}dx$, mas só aparece o factor $\frac{1}{\sqrt{x}}$ em vez de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Ora este problema resolve-se multiplicando o integral por $\frac{2}{2}$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}-1}dx = 2\int \overbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}^{u'}\overbrace{e^{\sqrt{x}-1}}^{e^u}dx = 2\overbrace{e^{\sqrt{x}-1}}^{e^u} + C.$$

Deduzimos assim uma fórmula mais geral de primitivação da função exponencial:

$$\int u' e^u \, dx = e^u + C$$

Ora esta fórmula pode, também, ser deduzida tendo em conta que se u é função de x :

$\frac{d}{dx}\left(e^{u(x)}\right) = u'(x) e^{u(x)}$	(1) $\int u' e^u \, dx = e^u + C$

Procedendo de forma análoga temos:

$\frac{d}{dx}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = u' u^n$	(2) $\int u'.u^n \, dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, se $n \neq -1$
$\frac{d}{dx}\left(\ln\lvert u\rvert\right) = \frac{u'}{u}$	(3) $\int \frac{u'}{u} dx = \ln\lvert u\rvert + C$
$\frac{d}{dx}\left(sen(u)\right) = u'.\cos(u)$	(4) $\int u'.\cos(u) \, dx = sen(u) + C$
$\frac{d}{dx}\left(\cos(u)\right) = -u' sen(u)$	(5) $\int -u' sen(u) \, dx = -\cos(u) + C$
$\frac{d}{dx}\left(arctg(u)\right) = \frac{u'}{1+u^2}$	(6) $\int \frac{u'}{1+u^2} \, dx = arctg(u) + C$
$\frac{d}{dx}\left(arcsen(u)\right) = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$	(7) $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \, dx = arcsen(u) + C$

Exemplo:

a) $\int 2x.\left(x^2+1\right)^5 dx$

<u>Resolução:</u>

Fazendo $u(x) = x^2 + 1$, $u' = 2x$, logo $\int \overbrace{2x}^{u'} \overbrace{\left(x^2+1\right)^5}^{u^5} dx = \frac{\left(x^2+1\right)^6}{6} + C$

b) $\int \frac{3x^2+4}{x^3+4x} dx$

<u>Resolução:</u>

Fazendo $u(x) = x^3 + 4x$, $u' = 3x^2 + 4$, logo

$$\int \frac{3x^2+4}{x^3+4x} dx = \int \overbrace{\left(3x^2+4\right)}^{u'} \overbrace{\frac{1}{x^3+4x}}^{1/u} dx \overset{(3)}{=} \ln\left|x^3+4x\right| + C$$

O que fizemos nos exercícios anteriores foi reconhecer que a função integrando, podia ser escrita como a derivada de uma função composta.

Esta técnica pode ser usada de uma forma mais sistemática pelo chamado **Método de substituição de variável** para o qual existe uma notação particularmente adequada e prática:

Suponhamos que queremos calcular $\int f(u(x)) \cdot u'(x)\, dx$.

Se $u(x)$ *for derivável temos* $\frac{du}{dx} = u'(x)$ *encarando* $\frac{du}{dx}$ *como um quociente, temos:*

$$du = u'(x)\, dx$$

Então, com esta notação

$$\int \underbrace{f(u(x))}_{f(u)} \cdot \underbrace{u'(x)\, dx}_{du} = \underbrace{F(u(x))}_{F(u)} + C\,, \qquad se \quad F' = f$$

Ou seja:

$$\int f(u)du = F(u) + C\ .$$

Exemplo:

$\int x\sqrt{x^2+4}\, dx$

Resolução:

O cálculo deste integral pode ser feito do seguinte modo:

Consideramos a substituição: $u = x^2 + 4$. Então $\frac{du}{dx} = 2x$ e portanto $\frac{1}{2}du = x\ dx$

Logo $\int x\sqrt{x^2+4}\, dx = \int \underbrace{\sqrt{x^2+4}}_{\sqrt{u}} . \underbrace{x\ dx}_{\frac{1}{2}du} = \int \sqrt{u}\,\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int \sqrt{u} du$

Calculamos a primitiva expressa em função de u:

$$\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\ du = \frac{1}{2}\frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{1}{3}u^{3/2} + C$$

Como o nosso objectivo é a determinação de uma primitiva de $x\sqrt{x^2+4}$ substituímos por fim u por x^2+4 obtendo:

$$\frac{1}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{3}\left(x^2+4\right)^{3/2} + C$$

Este é o **método de substituição** para o cálculo de primitivas ou integrais e deve ser empregue sempre que o cálculo do integral $\int f(u)\,du$ for mais simples.

Exercício:

Calcule os seguintes integrais usando o método de substituição:

a) $\int xe^{x^2}dx$ fazendo $u = x^2$

b) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ fazendo $u = \sqrt{x}$;

c) $\int \frac{\ln(x)}{2x}dx$ fazendo $u = \ln(x)$

d) $\int \frac{1}{x\ln(x)}dx$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

f) $\int \frac{x}{9-4x^2}dx$

g) $\int e^{\sqrt{x}}dx$ (faça apenas a substituição $u = \sqrt{x}$, a continuação da resolução implica a utilização da técnica de primitivação por partes, que será dada a seguir).

Resolução:

a) $\int xe^{x^2}dx$

Se $u = x^2$ então $\frac{du}{dx} = 2x \iff \frac{du}{2} = xdx$.

Logo $\int xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}xdx = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C$.

b) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

Se $u = \sqrt{x}$ então $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \iff 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Logo $\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int 2(1+u)du = \int (2+2u)du = 2u + u^2 + C = 2\sqrt{x} + x + C$.

c) $\int \frac{\ln(x)}{2x}dx$

Se $u=\ln(x)$ então $\frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad du=\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{du}{2}=\frac{dx}{2x}$

Logo $\int \frac{\ln(x)}{2x}dx=\int \ln(x)\cdot\frac{dx}{2x}=\int u\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int u\,du=\frac{1}{2}\frac{u^2}{2}+C=\frac{(\ln x)^2}{4}+C$

d) $\int \frac{1}{x\ln(x)}dx$

Se $u=\ln(x)$ então $\frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad du=\frac{dx}{x}$.

Logo $\int \frac{1}{x\ln(x)}dx=\int \frac{1}{\ln(x)}\cdot\frac{dx}{x}=\int \frac{1}{u}du=\ln|u|+C=\ln|\ln(x)|+C$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

Se $u=\sqrt{x}$ então $\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad 2du=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

Logo $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=\int \frac{1}{1+x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int \frac{2}{1+u^2}du=2arctg(u)+C=2arctg\left(\sqrt{x}\right)+C$

f) $\int \frac{x}{9-4x^2}dx$

Se $u=9-4x^2$ então $\frac{du}{dx}=-8x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{-8}du=x\,dx$

Logo $\int \frac{x}{9-4x^2}dx=\int \frac{1}{9-4x^2}xdx=\int \frac{1}{u}\frac{du}{-8}=\frac{-1}{8}\int \frac{1}{u}du=\frac{-1}{8}\ln|u|+C=\frac{-1}{8}\ln\left|9-4x^2\right|+C$

g) $\int e^{\sqrt{x}}dx$

Se $u=\sqrt{x}$ então $\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad 2\,du=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

Mas $\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ não aparece na primitiva.

Então tendo em conta que $u=\sqrt{x}$ temos $2\,du=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx \Leftrightarrow 2u\,du=dx$.

Substituindo:

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=\int e^{u}\,2u\,du=\int 2ue^{u}\,du$$

(a continuação da resolução implica a utilização da técnica de primitivação por partes, que será dada a seguir).

<u>Note que</u> a partir do momento em que se substitui dx por du só pode aparecer u na primitiva.

6.4 Primitivação por partes.

A regra para a derivação do produto de duas funções é:

$$\frac{d(fg)}{dx}=f\,'g+fg'$$

Então, em termos de primitivas temos:

$$\int\frac{d(fg)}{dx}dx=\int f\,'g\,dx+\int fg\,'dx \quad\Leftrightarrow\quad fg=\int f\,'g\,dx+\int fg\,'dx\,.$$

logo,

$$\int f'gdx=fg-\int fg'dx$$

esta é a fórmula para o método de primitivação por partes.

<u>Nota:</u>

1. *Aplicámos primitivação por partes quando temos as condições:*
   - *Queremos primitivar um produto de funções que não conseguimos primitivar directamente,* $\int f\,'(x)g(x)\,dx$*;*
   - *Conhecemos uma primitiva de* f' *,* $\int f\,'(x)\,dx=f(x)$*;*
   - *A primitiva* $\int f(x)g'(x)\,dx$ *é mais simples de calcular.*

2. *Quando queremos primitivar um produto de funções por este método, escolhemos uma função para primitivar, f', e outra para derivar, g. Essa escolha deve ser feita tendo em conta os três pontos anteriores.*

Exemplos:

a) $\int x(x-1)^8\,dx$

- Escolhendo $f'(x)=(x-1)^8$ temos $f(x)=\dfrac{(x-1)^9}{9}$ pois $\int (x-1)^8\,dx=\dfrac{(x-1)^9}{9}$;
- Escolhendo $g(x)=x$ temos $g'(x)=1$

Aplicando a fórmula de primitivação por partes temos:

$$\int \underbrace{x}_{g}\underbrace{(x-1)^8}_{f'}\,dx = \overbrace{x}^{g}\overbrace{\frac{(x-1)^9}{9}}^{f}-\int \overbrace{1}^{g'}\overbrace{\frac{(x-1)^9}{9}}^{f}dx = x\frac{(x-1)^9}{9}-\frac{1}{9}\frac{(x-1)^{10}}{10}+C$$

Note que:

Se tivéssemos escolhido $f'(x)=x$ e $g(x)=(x-1)^8$ ao aplicar a fórmula de primitivação por partes ficaríamos com uma primitiva mais complicada para calcular.

b) $\int \underbrace{x}_{g}\underbrace{e^{-2x}}_{f'}dx$

Escolhendo $f'(x)=e^{-2x}$ e $g(x)=x$ temos $f(x)=\int e^{-2x}dx=\dfrac{e^{-2x}}{-2}$ e $g'(x)=1$.

Aplicando a fórmula de primitivação por partes temos:

$$\int \underbrace{x}_{g}\underbrace{e^{-2x}}_{f'}dx = x\frac{e^{-2x}}{-2}-\int \overbrace{1}^{g'}\overbrace{\frac{e^{-2x}}{-2}}^{f}dx = -x\frac{e^{-2x}}{2}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = -x\frac{e^{-2x}}{2}+\frac{1}{2}\frac{e^{-2x}}{(-2)}+C$$

c) $\int x^2e^x\,dx$

Escolhendo $f'(x)=e^x$ e $g(x)=x^2$ temos $f(x)=\int e^x dx=e^x$ e $g'(x)=2x$.

Aplicando o método de primitivação por partes temos

$$\int \underbrace{x^2}_{g}\underbrace{e^x}_{f'}\,dx = \underbrace{x^2}_{g}\underbrace{e^x}_{f}-\int \underbrace{2x}_{g'}\underbrace{e^x}_{f}\,dx$$

Ora a primitiva $\int 2xe^x \, dx$ também não é imediata, **aplicando novamente o método de primitivação por partes <u>da seguinte forma</u>**:

fazendo $f'(x) = e^x$ e $g(x) = 2x$ temos $f(x) = \int e^x dx = e^x$ e $g'(x) = 2$ e portanto

$$\int \underbrace{2x}_{g}\underbrace{e^x}_{f'} \, dx = 2xe^x - \int 2e^x dx = 2xe^x - 2e^x + C$$

Logo

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x \, dx = x^2 e^x - \left(2xe^x - 2e^x\right) + C = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

<u>Note que:</u>

Na segunda vez que se aplica a fórmula de primitivação por partes devemos continuar a considerar como $f'(x) = e^x$.

Em geral, sempre que é necessário aplicar repetidamente o método de primitivação por partes devemos manter a escolha de f'

d) $\int arctg(x) \, dx$

<u>Note que:</u>

Neste integral só temos uma função para integrar. Mas não sabemos primitivar o $arctg(x)$. *Então para podermos aplicar integração por partes olhamos para a função a integrar como* $1.arctg(x)$.

Então $\int arctg(x) \, dx = \int 1.arctg(x) dx$

Fazendo $f'(x) = 1$ e $g(x) = arctg(x)$ temos $f(x) = \int 1dx = x$ e $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Aplicando a fórmula de primitivação por partes temos

$$\begin{aligned}
\int arctg(x) \, dx = \int \underbrace{1}_{f'}.\underbrace{arctg(x)}_{g} \, dx &= x.arctg(x) - \int x \frac{1}{1+x^2} \, dx \\
&= x.arctg(x) - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx \\
&= x.arctg(x) - \frac{1}{2} \ln\left|1+x^2\right| + C
\end{aligned}$$

e) $\int \ln(x) \, dx$ (resolução análoga à anterior)

f) $\int e^{2x}\cos(x)\,dx$

Escolhendo $f'(x)=e^{2x}$ e $g(x)=\cos(x)$ temos $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{2}$ e $g'(x)=-sen(x)$.

Aplicando a fórmula de primitivação por partes temos

$$\begin{aligned}\int \underbrace{e^{2x}}_{f'}\underbrace{\cos(x)}_{g}\,dx &= \underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{f}\underbrace{\cos(x)}_{g}-\int \underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{f}\underbrace{(-sen(x))}_{g'}dx\\ &=\frac{e^{2x}sen(x)}{2}+\frac{1}{2}\int e^{2x}sen(x)dx\end{aligned}$$

Aplicando novamente primitivação por partes (e tendo em conta o que foi dito numa nota anterior) temos que:

$$\begin{aligned}\int \underbrace{e^{2x}}_{f'}\underbrace{sen(x)}_{g}\,dx &= \underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{f}\underbrace{sen(x)}_{g}-\int \underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{f}\underbrace{\cos(x)}_{g'}\,dx\\ &=\frac{e^{2x}sen(x)}{2}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos(x)dx\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\cos(x)\,dx &= \frac{e^{2x}sen(x)}{2}+\frac{1}{2}\int e^{2x}sen(x)dx\\ &=\frac{e^{2x}sen(x)}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}sen(x)}{2}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos(x)dx\right)\\ &=\frac{e^{2x}sen(x)}{2}+\frac{e^{2x}sen(x)}{4}-\frac{1}{4}\int e^{2x}\cos(x)dx\end{aligned}$$

Note que:

O integral que aparece no 2º membro é igual ao inicial, então podemos passá-lo para o primeiro membro e resolver a equação em ordem a $\int e^{2x}\cos(x)\,dx$ *:*

$$\begin{aligned}&\int e^{2x}\cos(x)\,dx=\frac{e^{2x}sen(x)}{2}+\frac{e^{2x}sen(x)}{4}-\frac{1}{4}\int e^{2x}\cos(x)dx\\ \Leftrightarrow\quad &\frac{5}{4}\int e^{2x}\cos(x)\,dx=\frac{e^{2x}sen(x)}{2}+\frac{e^{2x}sen(x)}{4}\\ \Leftrightarrow\quad &\int e^{2x}\cos(x)\,dx=\frac{4}{5}\left(\frac{e^{2x}sen(x)}{2}+\frac{e^{2x}sen(x)}{4}\right)+C\end{aligned}$$

Exercício:

Calcule as seguintes primitivas utilizando primitivação por partes:

1. $\int sen^2(x)\,dx$

2. $\int x\sqrt{x+5}dx$

3. $\int sen(\ln(x))dx$

4. $\int x\ln(x)\,dx$

5. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx$

6. $\int sen(2x)e^{sen(x)}\,dx$