6.6 Outras técnicas de primitivação:

Primitivas de funções trigonométricas,

Substituições trigonométricas,

Racionalização de algumas de algumas funções.

6.6.1. Integração de funções trigonométricas:

Vamos agora ocuparmo-nos dos integrais do tipo

$$\boxed{\int sen^m(x)cos^n(x)dx}$$

onde n,m são números inteiros positivos.

Já sabemos que:

- $\int sen(x)dx = -cos(x)+C$ $\qquad$ ($m=1, \quad n=0$)
- $\int cos(x)dx = sen(x)+C$ $\qquad$ ($m=0, \quad n=1$)

É fácil ver que:

- $$\boxed{\int sen(x)cos^n(x)dx = -\int \underbrace{-sen(x)}_{u'}\underbrace{cos^n(x)}_{u^n}dx = -\frac{cos^{n+1}(x)}{n+1}+C, \qquad n\neq -1}$$

  Note que se $n=-1$ temos

  $$\int sen(x)cos^{-1}(x)dx = \int \frac{sen(x)}{cos(x)}dx = -\int \frac{\overbrace{-sen(x)}^{u'}}{\underbrace{cos(x)}_{u}}dx = -ln\left|cos(x)\right|+C$$

  ou seja, $\int tg(x)dx = -ln\left|cos(x)\right|+C$

- $$\boxed{\int sen^m(x)cos(x)dx = \int \underbrace{cos(x)}_{u'}\underbrace{sen^m(x)}_{u^n}dx = \frac{sen^{m+1}(x)}{m+1}+C, \qquad m\neq -1}$$

  Note que se $m=-1$ temos

$$\int sen^{-1}(x)cos(x)dx = \int \frac{\overbrace{cos(x)}^{u'}}{\underbrace{sen(x)}_{u}} dx = ln\left|sen(x)\right| + C$$

ou seja, $\int cot\,g(x)dx = ln\left|sen(x)\right| + C$

Exemplos:

1. $\int sen(x)cos(x)dx = -\frac{cos^2(x)}{2} + C = \frac{sen^2(x)}{2} + C$

2. $\int sen(x)cos^2(x)dx = -\frac{cos^3(x)}{3} + C$

3. $\int cos(x)sen^2(x)dx = \frac{sen^3(x)}{3} + C$

<u>**Algum dos expoentes ímpar:**</u>

<u>Procedimento</u>: Destaca-se uma unidade à potência impar e o factor resultante passa-se à co-função através da fórmula fundamental da trigonometria:

Exemplos:

a) $\int sen^2(x)cos^3(x)dx$ **b)** $\int sen^6(x)cos^5(x)dx$

<u>Resolução:</u>

a)

$$\int sen^2(x)cos^3(x)dx = \int sen^2(x)cos(x)cos^2(x)dx = \int sen^2(x)cos(x)\left[1 - sen^2(x)\right]dx$$

C

$$= \int sen^2(x)cos(x)dx - \int sen^4(x)cos(x)dx$$

ada um dos integrais resultantes é imediato, logo

$$\int sen^2(x)cos^3(x)dx = \frac{sen^3(x)}{3} - \frac{sen^5(x)}{5} + C$$

b) *Comecemos por escrever* $cos^5(x) = cos(x)\underbrace{cos^4(x)}_{exp.par} = cos(x)(cos^2 x)^2$.

Pela fórmula fundamental da trigonometria tem-se que $cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$, *donde* $cos^5(x) = cos(x)\underbrace{cos^4(x)}_{exp.par} = cos(x)(cos^2 x)^2 = cos(x)\underbrace{[1 - sen^2 x]^2}_{\text{qaundo se desenvolve o quadrado fica tudo em função de seno}}$.

Assim,

$$\int sen^6(x)cos^5(x)dx = \int sen^6(x)cos(x)cos^4(x)dx = \int sen^6(x)cos(x)[cos^2 x]^2 dx$$
$$= \int sen^6(x)cos(x)[1 - sen^2 x]^2 dx$$
$$= \int sen^6(x)cos(x)[1 - 2sen^2(x) + sen^4(x)]dx$$
$$= \int sen^6(x)cos(x)dx - 2\int sen^8(x)cos(x)dx + \int sen^{10}(x)cos(x)dx$$

Cada um dos integrais resultantes é imediato, logo

$$\int sen^6(x)cos^5(x)dx = \frac{sen^7(x)}{7} - 2\frac{sen^9(x)}{9} + \frac{sen^{11}(x)}{11} + C$$

2.

a) $\int sen^3(x)cos^3(x)dx$ **b)** $\int sen^7(x)cos^5(x)dx$

<u>Resolução:</u>

a)

$$\int sen^3(x)cos^3(x)dx = \int sen^3(x)cos(x)cos^2(x)dx = \int sen^3(x)cos(x)[1 - sen^2(x)]dx$$
$$= \int sen^3(x)cos(x)dx - \int sen^5(x)cos(x)dx$$

C

ada um dos integrais resultantes é imediato, logo

$$\int sen^3(x)cos^3(x)dx = \frac{sen^4(x)}{4} - \frac{sen^6(x)}{6} + C$$

b) *Comecemos por escrever* $cos^5(x) = cos(x)\underbrace{cos^4(x)}_{exp.par} = cos(x)(cos^2 x)^2$.

Pela fórmula fundamental da trigonometria tem-se que $cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$, *donde*

$$cos^5(x) = cos(x)\underbrace{cos^4(x)}_{exp.par} = cos(x)(cos^2 x)^2 = cos(x)\underbrace{[1 - sen^2 x]^2}_{\text{qaundo se desenvolve o quadrado fica tudo em função de seno}}$$

Assim,

$$\int sen^7(x)cos^5(x)dx = \int sen^7(x)cos(x)cos^4(x)dx = \int sen^7(x)cos(x)\left[cos^2 x\right]^2 dx$$
$$= \int sen^7(x)cos(x)\left[1-sen^2 x\right]^2 dx$$
$$= \int sen^7(x)cos(x)\left[1-2sen^2(x)+sen^4(x)\right]dx$$
$$= \int sen^7(x)cos(x)dx - 2\int sen^9(x)cos(x)dx + \int sen^{11}(x)cos(x)dx$$

Cada um dos integrais resultantes é imediato, logo

$$\int sen^7(x)cos^5(x)dx = \frac{sen^8(x)}{8} - \frac{sen^{10}(x)}{5} + \frac{sen^{12}(x)}{12} + C$$

3.

a) $\int sen^5(x)cos^2(x)dx$ **b)** $\int sen^3(x)cos^4(x)dx$

Resolução

a)

$$\int sen^5(x)cos^2(x)dx = \int \underbrace{sen^4(x)}_{passar\ a\ cos}sen(x)cos^2(x)dx = \int \left(sen^2 x\right)^2 sen(x)cos^2(x)dx$$
$$= \int \left(1-cos^2 x\right)^2 sen(x)cos^2(x)dx$$
$$= \int \left(1-2cos^2 x+cos^4 x\right)sen(x)cos^2(x)dx$$
$$= \int sen(x)cos^2(x)dx - 2\int sen(x)cos^4(x)dx + \int sen(x)cos^6(x)dx$$

Cada um dos integrais resultantes é imediato, logo

$$\int sen^5(x)cos^2(x)dx = -\frac{cos^3(x)}{3} + 2\frac{cos^5(x)}{5} - \frac{cos^7(x)}{7} + C$$

b)

$$\int sen^3(x)cos^4(x)dx = \int sen(x)sen^2(x)cos^4(x)dx = \int sen(x)\left(1-cos^2(x)\right)cos^4(x)dx$$

C

$$= \int sen(x)cos^4(x)dx - \int sen(x)cos^6(x)dx$$

ada um dos integrais resultantes é imediato e fica como exercício…

<u>Ambas as potências pares:</u>

Recordar:

- $sen(a+b)=sen(a)cos(b)+sen(b)cos(a)$

  No caso particular em que $a=b$ tem-se $\boxed{sen(2a)=2sen(a)cos(a)}$

- $cos(a+b)=cos(a)cos(b)-sen(a)sen(b)$

  No caso particular em que $a=b$ tem-se $\boxed{cos(2a)=cos^2(a)-sen^2(a)}$

  Como $cos^2(a)=1-sen^2(a)$ tem-se que $\boxed{sen^2(a)=\frac{1-cos(2a)}{2}}$ $(*)$

  Como $sen^2(a)=1-cos^2(a)$ tem-se que $\boxed{cos^2(a)=\frac{1+cos(2a)}{2}}$ $(**)$

Exemplos:

4.

a) $\int sen^2(x)cos^2(x)dx$ **b)** $\int sen^4(x)cos^2(x)dx$

<u>*Resolução:*</u>

a)

$$\int sen^2(x)cos^2(x)dx = \int [sen(x)cos(x)]^2 dx = \int \left[\frac{2sen(x)cos(x)}{2}\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int sen^2(2x)dx \qquad por \ \ (*)$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1-cos(4x)}{2}dx$$

O integral resultante é imediato e fica como exercício...

b) *Note que agora não pode usar a mesma técnica da alínea anterior porque o expoente não é o mesmo.*

Neste caso como estamos a trabalhar com potências pares é necessário para o arco-duplo através das fórmulas (*) e/ou (··).

$$\begin{aligned}\int sen^4(x)cos^2(x)dx &= \int sen^2(x)sen^2(x)cos^2(x)dx\\ &= \int \frac{1-cos(2x)}{2}\cdot\frac{1-cos(2x)}{2}\cdot\frac{1+cos(2x)}{2}dx\\ &= \frac{1}{8}\int(1-cos(2x))\underbrace{((1-cos(2x))(1+cos(2x)))}\\ &= \frac{1}{8}\int(1-cos(2x))(1-cos^2(2x))dx\\ &= \frac{1}{8}\int(1-cos(2x))sen^2(2x)dx\\ &= \frac{1}{8}\int sen^2(2x)dx-\frac{1}{8}\int cos(2x)sen^2(2x)dx\\ &= \frac{1}{8}\int\frac{1-cos(4x)}{2}dx-\frac{1}{8}\int cos(2x)sen^2(2x)dx \qquad por\ (**)\end{aligned}$$

Os integrais resultantes são imediatos e ficam como exercício...

Consideremos integrais do tipo

$$\boxed{\int\frac{sen^m(x)}{cos^n(x)}dx},\ \boxed{\int\frac{cos^n(x)}{sen^m(x)}dx}$$

onde n,m são números inteiros positivos.

Já sabemos que:

- $\int tg(x)dx = \int\frac{sen(x)}{cos(x)}dx = -ln|cos(x)|+C$
- $\int cot\,g(x)dx = \int\frac{cos(x)}{sen(x)}dx = ln|sen(x)|+C$

É fácil ver que:

- $$\boxed{\int\frac{sen(x)}{cos^n(x)}dx = -\int\underbrace{-sen(x)}_{u'}\underbrace{cos^{-n}(x)}_{u^{-n}}dx = \frac{1}{(n-1)cos^{n-1}(x)}+C, \qquad n\neq 1}$$
- $$\boxed{\int\frac{cos(x)}{sen^m(x)}dx = \int\underbrace{cos(x)}_{u'}\underbrace{sen^{-m}(x)}_{u^{-m}}dx = -\frac{1}{(m-1)sen^{m-1}(x)}+C, \qquad m\neq 1}$$

***Exemplos*:**

a) $\displaystyle\int \frac{sen(x)}{cos^2(x)}dx = \frac{1}{cos(x)} + C$

b) $\displaystyle\int \frac{sen(x)}{cos^3(x)}dx = \frac{1}{2cos^2(x)} + C$

c) $\displaystyle\int \frac{cos(x)}{sen^2(x)}dx = -\frac{1}{sen(x)} + C$

<u>Para outros expoentes:</u>

<u>Procedimento:</u> Usar integração por partes e aplicar fórmulas trigonométricas.

Exemplos:

1.

a) $\displaystyle\int \frac{sen^2(x)}{cos^3(x)}(x)dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{sen^4(x)}{cos^3(x)}dx$

<u>Resolução:</u>

a)

$$\int \frac{sen^2(x)}{cos^3(x)}dx = \int \underbrace{sen(x)}_{g}\underbrace{\frac{sen(x)}{cos^3(x)}}_{f'}dx = \frac{senx}{2cos^2 x} - \int \frac{1}{2cos\,x}dx$$

$$= \frac{sec(x)tg(x)}{2} - \frac{1}{2}\int sec(x)dx$$

$$= \frac{sec(x)tg(x)}{2} - \frac{ln|sec(x)+tg(x)|}{2} + C$$

b)

$$\int \frac{sen^4(x)}{cos^3(x)}dx = \int \frac{sen^2(x)sen^2(x)}{cos^3(x)}dx = \int \frac{[1-cos^2(x)]sen^2(x)}{cos^3(x)}dx$$

$$= \int \frac{sen^2(x)}{cos^3(x)}dx - \int \frac{sen^2(x)}{cos(x)}dx$$

$$= \int \frac{sen^2(x)}{cos^3(x)}dx - \int sec(x)dx + \int cos(x)dx$$

Usando a alínea anterior e a tabela de primitivas facilmente se conclui que

$$\int \frac{sen^4(x)}{cos^3(x)}dx = \frac{sec(x)tg(x)}{2} - \frac{3ln|sec(x)+tg(x)|}{2} + sen(x) + C$$

2.

a) $\displaystyle\int \frac{sen^3(x)}{cos^5(x)}dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{sen^5(x)}{cos^3(x)}dx$

<u>*Resolução:*</u>

a)

$$\int \frac{sen^3(x)}{cos^5(x)}dx = \int \frac{sen^2(x)sen(x)}{cos^5(x)}dx = \int \frac{\left[1-cos^2(x)\right]sen(x)}{cos^5(x)}dx$$
$$= \int \frac{sen(x)}{cos^5(x)}dx - \int \frac{sen(x)}{cos^3(x)}dx$$

Cada um dos integrais resultantes é imediato e fica como exercício…

b)

$$\int \frac{sen^5(x)}{cos^3(x)}dx = \int \frac{sen^2(x)sen^3(x)}{cos^3(x)}dx = \int \frac{\left(1-cos^2(x)\right)sen^3(x)}{cos^3(x)}dx$$
$$= \int \frac{sen^3(x)}{cos^3(x)}dx - \int \frac{sen^3(x)}{cos(x)}dx$$
$$= \int \frac{\left(1-cos^2(x)\right)sen(x)}{cos^3(x)}dx - \int \frac{\left(1-cos^2(x)\right)sen(x)}{cos(x)}dx$$
$$= \int \frac{sen(x)}{cos^3(x)}dx - 2\int \frac{sen(x)}{cos(x)}dx + \int cos(x)sen(x)dx$$

Cada um dos integrais resultantes é fácil de calcular e fica como exercício…

3.

a) $\displaystyle\int \frac{sen^5(x)}{cos^2(x)}dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{sen^3(x)}{cos^4(x)}dx$

<u>*Resolução:*</u> *a)*

$$\int \frac{sen^5(x)}{cos^2(x)}dx = \int \frac{sen^2(x)sen^3(x)}{cos^2(x)}dx = \int \frac{\left(1-cos^2(x)\right)sen^3(x)}{cos^2(x)}dx = \int \frac{sen^3(x)}{cos^2(x)}dx - \int sen^3(x)dx$$
$$= \int \frac{\left(1-cos^2(x)\right)sen(x)}{cos^2(x)}dx - \int \left(1-cos^2(x)\right)sen(x)dx$$
$$= \int \frac{sen(x)}{cos^2(x)}dx - 2\int sen(x)dx + \int sen(x)cos^2(x)dx$$

Cada um dos integrais resultantes é imediato e fica como exercício…

b)

$$\int \frac{sen^3(x)}{cos^4(x)}dx = \int \frac{sen^2(x)sen(x)}{cos^4(x)}dx = \int \frac{\left(1-cos^2(x)\right)sen(x)}{cos^4(x)}dx$$
$$= \int \frac{sen(x)}{cos^4(x)}dx - \int \frac{sen(x)}{cos^2(x)}dx$$

Cada um dos integrais resultantes é imediato e fica como exercício…

4.

a) $\int \frac{sen^2(x)}{cos^2(x)}dx$

b) $\int \frac{sen^4(x)}{cos^2(x)}dx$

c) $\int \frac{sen^2(x)}{cos^4(x)}dx$

Resolução:

a)

$$\int \frac{sen^2(x)}{cos^2(x)}dx = \int \frac{1-cos^2(x)}{cos^2(x)}dx = \int sec^2(x)dx - \int dx = tg(x) - x + C$$

b)

$$\int \frac{sen^4(x)}{cos^2(x)}dx = \int \frac{sen^2(x)sen^2(x)}{cos^2(x)}dx = \int \frac{(1-cos^2(x))sen^2(x)}{cos^2(x)}dx$$

$$= \int \frac{sen^2(x)}{cos^2(x)}dx - \int sen^2(x)dx$$

$$= \int \frac{sen^2(x)}{cos^2(x)}dx - \int \frac{1-cos(2x)}{2}dx$$

Os integrais resultantes são fáceis de calcular e ficam como exercício...

c)

$$\int \frac{sen^2(x)}{cos^4(x)}dx = \int \underbrace{\frac{sen(x)}{cos^4(x)}}_{f'}\underbrace{sen(x)}_{g}dx = \frac{sen(x)}{3cos^3(x)} - \int \frac{1}{3cos^2(x)}dx = \frac{sen(x)}{3cos^3(x)} - \frac{1}{3}tg(x) + C$$

<u>Consideremos integrais do tipo</u>:

$$\boxed{\int \frac{1}{sen^m(x)cos^n(x)}dx},$$

onde n, m são números inteiros positivos.

Para este tipo de integrais não faremos um estudo exaustivo ficam apenas quatro exemplos:

a) $\int \frac{1}{sen(x)cos(x)}dx$

b) $\int \frac{1}{sen^2(x)cos(x)}dx$

c) $\int \frac{1}{\cos^3(x)}dx$

d) $\int \frac{1}{sen^4(x)cos^3(x)}dx$

<u>Resolução:</u>

a) $$\int \frac{1}{sen(x)cos(x)}dx = \int \frac{2}{2sen(x)cos(x)}dx = \int 2\,cos\,ec(2x)dx$$
$$= ln\left|cos\,ec(2x) + cot\,g(2x)\right| + C$$

b) $$\int \frac{1}{sen^2(x)cos(x)}dx = \int \frac{1+cot\,g^2(x)}{cos(x)}dx = \int sec(x)dx - \int \frac{cos(x)}{sen^2(x)}dx$$

Os integrais que resultam são fáceis de calcular e ficam como exercício…

c) $$\int \frac{1}{\cos^3(x)}dx = \int \frac{sen^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^3(x)}dx = \int \underbrace{\frac{sen(x)}{\cos^3(x)}}_{f'}\underbrace{sen(x)}_{g}dx + \int \sec(x)dx$$

O primeiro integral calcula-se usando primitivação por partes, o segundo é imediato pelo que o resto da resolução do exercício fica como exercício.

d)
$$\int \frac{1}{sen^4(x)\cos^3(x)}dx = \int \frac{tg^2(x)+1}{sen^4(x)\cos(x)}dx$$
$$= \int \frac{1}{sen^2(x)\cos^3(x)}dx - \int \frac{1}{sen^4(x)\cos(x)}dx$$
$$= \int \frac{tg^2(x)+1}{sen^2(x)\cos(x)}dx - \int \frac{\overbrace{sen^2(x)+\cos^2(x)}^{=1}}{sen^4(x)\cos(x)}dx$$
$$= \int \frac{1}{\cos^3(x)}dx - 2\int \frac{1}{sen^2(x)\cos(x)}dx - \int \frac{\cos(x)}{sen^4(x)}dx$$

(exercício...)

<u>**Estudemos por último os integrais do tipo**</u>

$$\boxed{\int sen(ax)cos(bx)dx},\ \boxed{\int sen(ax)sen(bx)dx},\ \boxed{\int cos(ax)cos(bx)dx}$$

onde a,b são reais não nulos.

<u>**Recordar**</u>

- $sen(a+b) = sen(a)cos(b) + sen(b)cos(a)$

  $sen(a-b) = sen(a)cos(b) - sen(b)cos(a)$

de onde de deduz que: $\boxed{sen(a)cos(b) = \dfrac{sen(a+b)+sen(a-b)}{2}}$ (1)

- $cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)$

  $cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sen(a)sen(b)$

  de onde se deduz que: $\boxed{sen(a)sen(b) = \dfrac{cos(a-b)-cos(a+b)}{2}}$ (2)

  $\boxed{cos(a)cos(b) = \dfrac{cos(a+b)+cos(a-b)}{2}}$ (3)

Exemplos:

a) $\int sen(3x)cos(5x)dx$

b) $\int sen(3x)sen(2x)dx$

c) $\int cos(4x)cos(2x)dx$

<u>*Resolução:*</u>

a) *Comparando com a fórmula (1) temos* $a = 3x$ *e* $b = 5x$ *pelo que*

$$\int sen(3x)cos(5x)dx = \int \frac{sen(8x)+sen(-2x)}{2}dx = \int \frac{sen(8x)-sen(2x)}{2}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int sen(8x)dx - \frac{1}{2}\int cos(2x)dx$$

Os integrais que resultam são imediatos e ficam como exercício...

b) *Comparando com a fórmula (2) temos* $a = 3x$ *e* $b = 2x$ *pelo que*

$$\int sen(3x)sen(2x)dx = \int \frac{cos(x)-cos(5x)}{2}dx = \frac{1}{2}\int cos(x)dx - \frac{1}{2}\int cos(5x)dx$$

Os integrais que resultam são imediatos e ficam como exercício...

6.6.2. Substituições Trigonométricas

No cálculo de primitivas quando aparecem alguns tipos de radicais fazem-se as substituições a seguir indicadas:

I. Primitivas do tipo:

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{a^2 - u^2}\right) dx}$$

onde $R\left(x, \sqrt{a^2-u^2}\right)$ é uma função racional $a > 0$ e u é função de x:

<u>**Substituição:**</u> $u = a\, sen(t)$

Logo,

$$\sqrt{a^2 - u^2} = a\, cos(t) \qquad du = a\, cos(t)\, dt$$

pois, $\sqrt{a^2-u^2} = \sqrt{a^2 - (a\, sen(t))^2} = \sqrt{a^2\left(1 - sen^2(t)\right)} = a\sqrt{cos^2(t)} = a\, cos(t)$

e $\dfrac{du}{dt} = a\, cos(t) \Leftrightarrow du = a\, cos(t)\, dt$

<u>Obs.:</u> *No fim da primitiva, para voltar à variável inicial há que ter em conta o seguinte:*

- $u = a\, sen(t) \Leftrightarrow arcsen\left(\dfrac{u}{a}\right) = t$
- $u = a\, sen(t) \Leftrightarrow sen(t) = \dfrac{u}{a}$
- $\sqrt{a^2-u^2} = a\cos(t) \Leftrightarrow \cos(t) = \dfrac{\sqrt{a^2-u^2}}{a}$
- *tendo em conta o 2º e 3º ponto, podemos fazer a substituição de todas as funções trigonométricas directas:* $tg(t) = \dfrac{sen(t)}{cos(t)}$; $\mathbf{cotg}(t) = \dfrac{cos(t)}{sen(t)}$;

  $sec(t) = \dfrac{1}{cos(t)}$; $\mathbf{cosec}(t) = \dfrac{1}{sen(t)}$.

Nota: Podemos fazer a substituição $u = a\cos(t)$ e nesse caso temos: $\sqrt{a^2 - u^2} = a\ sen(t)$ e $du = -a\,sen(t)\,dt$.

Exemplo: $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Resolução:

Fazendo $x = sen(t)$ *temos* $dx = \cos(t)\,dt$ *e* $\sqrt{1-x^2} = \cos(t)$*:*

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int cos(t)(cos(t)\,dt) = \int cos^2(t)dt = \int \frac{1+cos(2t)}{2}dt$$

$$= \int \frac{1}{2}dt + \int \frac{cos(2t)}{2}dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\frac{sen(2t)}{2} + C$$

Como $sen(2\alpha) = 2sen(\alpha)\cos(\alpha)$ *temos* $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\frac{2sen(t)cos(t)}{2} + C$

Para voltar à variável inicial (tal como refere a Obs.1) há que ter em conta que $sen(t) = x$ $\cos(t) = \sqrt{1-x^2}$ *e que* $t = arcsen(x)$*, logo*

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}arcsen(x) + \frac{1}{2}\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{2} + C\,.$$

II. Primitivas do tipo:

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{u^2 - a^2}\right)dx}$$

onde $R\left(x, \sqrt{u^2 - a^2}\right)$ é uma função racional $a > 0$ e u é função de x:

Substituição: $u = a\sec(t)$

Logo,

$\sqrt{u^2 - a^2} = a\ tg(t)$ $du = a\sec(t)tg(t)\,dt$

Como $(sec(t))' = sec(t)tg(t)$ e $sen^2(t) + cos^2(t) = 1 \underset{\substack{dividindo \\ por\ cos^2 t}}{\Longleftrightarrow} tg^2(t) + 1 = sec^2(t)$ temos:

$$\frac{du}{dt} = a\sec(t)tg(t) \Leftrightarrow du = a\sec(t)tg(t)\ dt \quad \text{e}$$

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{(a\sec(t))^2 - a^2} = \sqrt{a^2\left(\sec^2(t) - 1\right)} = a\sqrt{tg^2(t)} = a\,tg(t)$$

<u>Obs.:</u> *No fim da primitiva, para voltar à variável inicial há que ter em conta o seguinte:*

- $u = a\sec(t) \Leftrightarrow u = a\dfrac{1}{\cos(t)} \Leftrightarrow \cos(t) = \dfrac{a}{u}$
- $u = a\sec(t) \Leftrightarrow arccos\left(\dfrac{a}{u}\right) = t$
- $\sqrt{u^2 - a^2} = a\ tg(t)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{u^2 - a^2} = a\frac{sen(t)}{\cos(t)} \Leftrightarrow sen(t) = \cos(t)\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a} \Leftrightarrow sen(t) = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}$$

- *tendo em conta o 2º e 3º ponto, podemos fazer a substituição de todas as funções trigonométricas directas.*

Exemplo: $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2 - 1}}\,dx$

<u>*Resolução:*</u>

Fazendo $2x = \sec(t)$ *temos* $dx = \dfrac{1}{2}\sec(t)tg(t)\,dt$, $\sqrt{4x^2 - 1} = tg(t)$ *e* $x^2 = \dfrac{\sec^2(t)}{4}$:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2 - 1}} = \frac{4}{2}\int \frac{\sec(t)tg(t)}{\sec^2(t)tg(t)}\,dt = 2\int \frac{1}{\sec(t)}\,dt = 2\int \cos(t)dt = sen(t) + C$$

Como $2x = \sec(t) \Leftrightarrow \cos(t) = \dfrac{1}{2x}$ *e* $\sqrt{4x^2 - 1} = tg(t) \Leftrightarrow sen(t) = \dfrac{1}{2x}\sqrt{4x^2 - 1}$ *temos*

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2 - 1}}\,dx = sen(t) + C = \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{2x} + C\,.$$

III. Primitivas do tipo:

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{a^2+u^2}\right)dx}$$

onde $R\left(x, \sqrt{a^2+u^2}\right)$ é uma função racional $a > 0$ e u é função de x:

Substituição: $u = a\,tg(t)$

Logo,

$$\sqrt{a^2+u^2} = a\ \sec(t) \qquad du = a\ \sec^2(t)\,dt$$

Porque $(tg(t))' = sec^2(t)$ e $sen^2(t)+cos^2(t)=1 \underset{\substack{dividindo \\ por\ cos^2 t}}{\Leftrightarrow} tg^2(t)+1 = sec^2(t)$ temos:

$$\frac{du}{dt} = a\sec^2(t) \Leftrightarrow du = a\sec^2(t)\,dt \text{ e}$$

$$\sqrt{a^2+u^2} = \sqrt{a^2+(a\,tg(t))^2} = \sqrt{a^2\left(1+tg^2(t)\right)} = a\sqrt{\sec^2(t)} = a\sec t)$$

Obs.: *No fim da primitiva, para voltar à variável inicial há que ter em conta o seguinte:*

- $u = a\,tg(t) \Leftrightarrow arctg\left(\dfrac{u}{a}\right) = t$
- $\sqrt{a^2+u^2} = a\ \sec(t) \Leftrightarrow \sqrt{a^2+u^2} = \dfrac{a}{\cos(t)} \Leftrightarrow \cos(t) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+u^2}}$
- $u = a\,tg(t) \Leftrightarrow u = a\dfrac{sen(t)}{\cos(t)} \Leftrightarrow sen(t) = \dfrac{u}{\sqrt{a^2+u^2}}$
- *tendo em conta o 2º e 3º ponto, podemos fazer a substituição de todas as funções trigonométricas directas.*

Exemplo: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$

Resolução:

Fazendo $x = 3tg(t)$ *temos* $dx = 3\sec^2(t)\,dt$ *e* $\sqrt{x^2+9} = 3\sec(t)$*:*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \int \frac{3sec^2(t)}{3sec(t)}dt = \int sec(t)dt = ln\left|sec(t)+tg(t)\right| + C = ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{x}{3}\right| + C.$$

Exercício: Calcule:

1) $\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$ (sugestão: $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$).

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+8x-3}}$ (sugestão: $-4x^2+8x-3=-4(x-1)^2+1=1-(2x-2)^2$).

6.6.3. Racionalização de algumas de algumas funções

Vamos ver com podemos racionalizar primitivas que envolvam as funções $sen(x)$ e $\cos(x)$

$$\boxed{\int R(sen(x), cos(x))dx}$$

onde $R(sen(x), cos(x))$ é uma função racional:

<u>Substituição</u>: $tg\left(\frac{x}{2}\right)=t$

onde $sen(x)$ e $cos(x)$ e dx são substituídos por:

$$sen(x)=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

As igualdades anteriores são obtidas das seguintes identidades trigonométricas:

$sen\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{2tg(x)}{1+tg^2(x)}$ e $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1-tg^2(x)}{1+tg^2(x)}$.

dx obtém-se da forma seguinte: $tg\left(\frac{x}{2}\right)=t \Leftrightarrow x=2arctg(t)$ logo, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

Exemplos:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+sen(x)+cos(x)}dx$

<u>Resolução:</u>

Fazendo $tg\left(\frac{x}{2}\right)=t$ *temos:*

$$\int \frac{dx}{1+sen(x)+cos(x)} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{1}{1+t}dt = ln|1+t| + C = ln\left|1+tg\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

b) $\displaystyle\int sec(x)dx = \int \frac{1}{cos(x)}dx$

<u>Resolução:</u> *Fazendo* $tg\left(\frac{x}{2}\right)=u$ *temos:*

$$\int \frac{1}{cos(x)}dx = \int \frac{1}{\frac{1-u^2}{1+u^2}}.\frac{2du}{1-u^2} = \int \frac{2}{1-u^2}du = \int\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)du$$

$$= ln|1+u| + ln|1-u| + C$$

$$= ln\left(\frac{|1+u|}{|1-u|}\right) + C = ln\left(\frac{\left|1+tg\left(\frac{x}{2}\right)\right|}{\left|1-tg\left(\frac{x}{2}\right)\right|}\right) + C$$

$$= ln|sec(x)+tg(x)| + C$$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-sen(x)}$

<u>Resolução:</u> *Fazendo* $tg\left(\frac{x}{2}\right)=y$ *temos:*

$$\int \frac{dx}{1-sen(x)} = \int \frac{1}{1-\frac{2y}{1+y^2}}.\frac{2}{1+y^2}dy = \int \frac{1+y^2}{1+y^2-2y}.\frac{2}{1+y^2}dy$$

$$= 2\int \frac{1}{(y-1)^2}dy = 2\frac{-1}{y-1} + C = \frac{2}{1-tg\left(\frac{x}{2}\right)} + C$$

<u>Exercício:</u> Calcule as seguintes primitivas:

1. $\int \frac{dx}{3+5\cos(x)}$

2. $\int \frac{dx}{sen(x)+\cos(x)}$

3. $\int \frac{1+tg(x)}{1-tg(x)}dx$

4. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2(x)}$

Fim