

Exercício:

Calcule as seguintes primitivas utilizando primitivação por partes:

1. $\int \sin^2(x) dx$

2. $\int x\sqrt{x+5} dx$

3. $\int \sin(\ln(x)) dx$

4. $\int x \ln(x) dx$

5. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$

6. $\int \sin(2x)e^{\sin(x)} dx$

6.5 Primitivação de funções racionais

Vamos começar por ver três tipos especiais de funções racionais: as **fracções parciais**.

Tipo I	Tipo II	Tipo III
$\frac{c}{(mx+b)^n}$	$\frac{m}{(ax^2+bx+c)^n}$	$\frac{mx+e}{(ax^2+bx+c)^n}$
c, m, b, n constantes	m, a, b, c, n constantes	m, e, a, b, c, n constantes
$m, n \neq 0$	$a, n \neq 0$	$a, m, n \neq 0$
	$\Delta = b^2 - 4ac < 0$	$\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Tipo I

Já sabemos integrar este tipo de funções.

Exemplo 1:

a) $\int \frac{2dx}{3x-4} = \frac{2}{3} \int \frac{3dx}{3x-4} = \frac{2}{3} \ln|3x-4| + C$

b) $\int \frac{dx}{(2x-5)^2} = \frac{1}{2} \int 2(2x-5)^{-2} dx = -\frac{1}{2} (2x-5)^{-1} + C = \frac{1}{10-4x} + C$

Tipo II

Pode ser reduzido por substituição a um integral do tipo $\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ que pode ser resolvido usando a fórmula de redução:

$$\boxed{\int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{1}{(2n-2)} \frac{t}{(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} \quad n \neq 1} \quad (\dagger)$$

Note que no caso em que $n = 1$ temos $\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctg(t) + C$

Exemplo 2:

a) $\int \frac{dx}{26-4x+4x^2}$ (neste caso $n = 1$)

Note-se que o denominador não tem zeros reais ($\Delta < 0$) mas podemos escrevê-lo na forma $C(1+t^2)$ onde C é constante, completando o quadrado.

Assim, no integral que estamos a resolver temos:

$$\begin{aligned} 26 - 4x + 4x^2 &= \underbrace{4x^2 - 4x + 1}_{(2x-1)^2} - 1 + 26 = (2x-1)^2 + 25 \\ &= 25 \left(\frac{(2x-1)^2}{25} + 1 \right) \\ &= 25 \left(\left(\frac{2x-1}{5} \right)^2 + 1 \right) \end{aligned}$$

Fazendo $t = \frac{2x-1}{5}$, $dt = \frac{2dx}{5} \Leftrightarrow dx = \frac{5dt}{2}$.

Logo

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{26-4x+4x^2} &= \int \frac{\frac{5}{2} dt}{25(t^2+1)} = \frac{1}{10} \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{\arctg(t)}{10} + C \\ &= \frac{1}{10} \arctg\left(\frac{2x-1}{5}\right) + C \end{aligned}$$

b) $\int \frac{dx}{(9x^2 + 12x + 13)^2}$

O denominador não tem zeros reais.

$$9x^2 + 12x + 13 = \underbrace{9x^2 + 12x + 4}_{(3x+2)^2} - 4 + 13 = (3x+2)^2 + 9 = 9 \left(\left(\frac{3x+2}{3} \right)^2 + 1 \right)$$

Fazendo $t = \frac{3x+2}{3} = x + \frac{2}{3}$, $dt = dx$ e temos

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(9x^2 + 12x + 13)^2} &= \int \frac{dt}{(9(t^2 + 1))^2} \\ &= \frac{1}{81} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2}, \end{aligned}$$

usando a fórmula (†) temos que

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{2+2t^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{t}{2+2t^2} + \frac{1}{2} \arctg(t),$$

pelo que

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(9x^2 + 12x + 13)^2} &= \int \frac{dt}{(9(t^2 + 1))^2} \\ &= \frac{1}{81} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} = \frac{1}{81} \times \frac{1}{2} \left(\frac{t}{1+t^2} + \arctg(t) \right) + C \\ &= \frac{1}{162} \left(\frac{x + \frac{2}{3}}{1 + \left(x + \frac{2}{3}\right)^2} + \arctg\left(x + \frac{2}{3}\right) \right) + C \\ &= \frac{1}{162} \left(\frac{9x+6}{9x^2 + 12x + 13} + \arctg\left(x + \frac{2}{3}\right) \right) + C \end{aligned}$$

Tipo III

Pode ser reduzido à soma de dois integrais, um do tipo II e outro quase imediato.

Exemplo 3:

a) $\int \frac{x+1}{1+x^2} dx = \underbrace{\int \frac{x}{1+x^2} dx}_{\text{quase imediato}} + \underbrace{\int \frac{1}{1+x^2} dx}_{\text{tipo II}} = \frac{\ln|1+x^2|}{2} + \arctg(x) + C$

b) $\int \frac{3+16x}{26-4x+4x^2} dx$

O denominador não tem raízes.

Note-se que

- $(26 - 4x + 4x^2)' = -4 + 8x$
- $3 + 16x = 2(-4 + 8x) + 11$

Pelo que se pode escrever:

$$\begin{aligned}\int \frac{3+16x}{26-4x+4x^2} dx &= \int \frac{2(-4+8x)+11}{26-4x+4x^2} dx \\ &= 2 \int \frac{-4+8x}{26-4x+4x^2} dx + 11 \underbrace{\int \frac{dx}{26-4x+4x^2}}_{\text{exemplo 2a)}} \\ &= 2 \ln|26-4x+4x^2| + \frac{11}{10} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{5}\right) + C\end{aligned}$$

c) $\int \frac{xdx}{(9x^2+12x+13)^2}$

O denominador não tem raízes.

Note-se que

- $(9x^2 + 12x + 13)' = 18x + 12$
- $x = \frac{1}{18}(18x + 12) - \frac{2}{3}$

Pelo que se pode escrever:

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{(9x^2+12x+13)^2} &= \frac{1}{18} \underbrace{\int \frac{18x+12}{(9x^2+12x+13)^2} dx}_{\text{imediato}} - \frac{2}{3} \underbrace{\int \frac{dx}{(9x^2+12x+13)^2}}_{\text{exemplo 2b)}} \\ &= -\frac{1}{18(9x^2+12x+13)} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{162} \left(\frac{9x+6}{9x^2+12x+13} + \operatorname{arctg}\left(x + \frac{2}{3}\right) \right) + C\end{aligned}$$

Decomposição em fracções parciais

Vamos tentar exprimir uma dada função racional, $\frac{p(x)}{q(x)}$, como soma de funções racionais.

Nota:

No caso em que o grau de $p(x)$ é superior ao de $q(x)$ começa-se por efectuar o algoritmo da divisão de polinómios obtendo-se

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \underbrace{d(x)}_{\text{polinómio}} + \underbrace{\frac{r(x)}{q(x)}}_{\text{grau } r(x) < \text{grau } q(x)}$$

onde $d(x)$ é o quociente e $r(x)$ o resto da divisão. Para integrar $\frac{p(x)}{q(x)}$ basta escrever

$\frac{r(x)}{q(x)}$ como soma de fracções racionais e integrar cada uma das parcelas (como veremos mais à frente).

Observação:

Todo o polinómio $q(x)$, não constante com coeficientes reais pode ser escrito de modo único (a menos da ordem dos factores) como produto de polinómios lineares, $ax + b$, e polinómios quadráticos sem raízes reais, $ax^2 + bx + c$ com $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Assim podemos factorizar $q(x)$ do seguinte modo:

$$q(x) = A \underbrace{(x - a_1)^{n_1}} \underbrace{(x - a_2)^{n_2}} \dots \underbrace{(x - a_l)^{n_l}} \underbrace{(x^2 + b_1x + c_1)^{m_1}} \underbrace{(x^2 + b_2x + c_2)^{m_2}} \dots \underbrace{(x^2 + b_kx + c_k)^{m_k}}$$

Polinómios lineares distintos Polinómios quadráticos distintos
(sem raízes reais)

Notar que a constante A que aparece na decomposição de $q(x)$ é igual ao coeficiente do termo de maior grau de $q(x)$.

Como decompor $\frac{p(x)}{q(x)}$ em fracções parciais?

1. Começar por factorizar $q(x)$ de modo que a sua decomposição envolva somente polinómios lineares e quadráticos sem raízes reais.
2. Aplique as seguintes regras:
 - a) Para cada factor $(x - \alpha)^n$ com $n \geq 1$, a decomposição em fracções parciais envolve uma soma de n fracções parciais da forma

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-\alpha)^n}$$

onde os A_i 's representam constantes.

- b) Para cada factor $(ax^2 + bx + c)^m$ com $m \geq 1$ e $ax^2 + bx + c$ sem raízes reais, a decomposição em fracções parciais envolve uma soma de m fracções parciais da forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_mx + B_m}{(ax^2 + bx + c)^m}$$

onde os A_i 's e B_i 's representam constantes.

3. Os coeficientes do ponto anterior determinam-se pelo método dos coeficientes indeterminados.

Vamos agora ver alguns exemplos que ilustram a decomposição em fracções parciais.

Exemplo 4:

a) $\int \frac{x^2 - 2x + 4}{x(x-1)^2} dx$

Trata-se de um integral de uma função racional cujo denominador já está factorizado:

- expoente do factor x é 1
- expoente do factor $x-1$ é 2

Na decomposição em fracções parciais poderemos encontrar os denominadores:

$$x, \quad x-1 \quad e \quad (x-1)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 2x + 4}{x(x-1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{A(x^2 - 2x + 1) + B(x^2 - x) + Cx}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A}{x(x-1)^2} \end{aligned}$$

Como temos uma igualdade e os denominadores são iguais então temos que ter forçosamente os numeradores iguais, isto é:

$$x^2 - 2x + 4 = (A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A$$

Note que dois polinómios são iguais se os coeficientes de cada potência de x são iguais.

Assim teremos que ter

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A - B + C = -2 \\ A = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + B = 1 \\ -8 - B + C = -2 \\ A = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -3 \\ C = 6 + B \\ A = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -3 \\ C = 3 \\ A = 4 \end{cases}$$

Pelo que

$$\frac{x^2 - 2x + 4}{x(x-1)^2} = \frac{4}{x} + \frac{-3}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2x + 4}{x(x-1)^2} dx &= 4 \int \frac{dx}{x} - 3 \int \frac{dx}{x-1} + 3 \int \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= 4 \ln|x| - 3 \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C \end{aligned}$$

b) $\int \frac{2x^3}{x^4 - 1} dx$

Factorização do denominador:

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x+1) \underbrace{(x^2 + 1)}_{\substack{\text{não tem raízes} \\ \text{reais}}}$$

Na decomposição em fracções parciais poderemos encontrar os denominadores:

$$x-1 \quad x+1 \quad x^2 + 1$$

(note que cada factor da decomposição do denominador tem expoente 1).

Atenção! Como existe um polinómio de 2ª grau sem raízes reais na factorização do denominador, o numerador da fracção parcial correspondente será da forma $Cx + D$.

$$\begin{aligned} \frac{2x^3}{x^4 - 1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} \\ &= \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} \\ &= \frac{A(x^3 + x^2 + x + 1) + B(x^3 - x^2 + x - 1) + (Cx+D)(x^2 - 1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} \\ &= \frac{A(x^3 + x^2 + x + 1) + B(x^3 - x^2 + x - 1) + Cx^3 + Dx^2 - Cx - D}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} \end{aligned}$$

Como temos uma igualdade e os denominadores são iguais então temos que ter forçosamente os numeradores iguais, isto é:

$$2x^3 = (A + B + C)x^3 + (A - B + D)x^2 + (A + B - C)x + (A - B - D)$$

Igualando as potências de x , temos

$$\begin{cases} A + B + C = 2 \\ A - B + D = 0 \\ A - B - D = 0 \\ A + B - C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} A = B = \frac{1}{2} \\ C = 1 \\ D = 0 \end{cases}$$

Pelo que

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3}{x^4 - 1} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{xdx}{x^2 + 1} \\ &= \frac{\ln|x-1|}{2} + \frac{\ln|x+1|}{2} + \frac{\ln|x^2 + 1|}{2} + C \end{aligned}$$

c) $\int \frac{x^5}{(1+x^2)^3} dx$

O denominador da fracção $\frac{x^5}{(1+x^2)^3}$ já está factorizado.

Na decomposição em fracções parciais poderemos encontrar os denominadores:

$$1+x^2 \quad (1+x^2)^2 \quad (1+x^2)^3$$

(note que o expoente do denominador é maior que 1).

Atenção! Como existe um polinómio de 2ª grau sem raízes reais na factorização do denominador, o numerador da fracção parcial correspondente será da forma $Ax + B$.

$$\begin{aligned} \frac{x^5}{(1+x^2)^3} &= \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{(1+x^2)^2} + \frac{Ex+F}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{(Ax+B)(1+x^2)^2 + (Cx+D)(1+x^2) + Ex+F}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{Ax + 2Ax^3 + Ax^5 + B + 2Bx^2 + Bx^4 + Cx + Cx^3 + D + Dx^2 + Ex + F}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{Ax^5 + Bx^4 + (2A+C)x^3 + (2B+D)x^2 + (A+C+E)x + (B+D+F)}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

Como temos uma igualdade e os denominadores são iguais então temos que ter forçosamente os numeradores iguais, isto é:

$$x^5 = Ax^5 + Bx^4 + (2A + C)x^3 + (2B + D)x^2 + (A + C + E)x + (B + D + F)$$

Igualando as potências de x , temos

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ 2A + C = 0 \\ 2B + D = 0 \\ A + C + E = 0 \\ B + D + F = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = -2 \\ D = 0 \\ E = 1 \\ F = 0 \end{cases}$$

Pelo que

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5}{(1+x^2)^3} dx &= \int \frac{x}{1+x^2} dx - \int \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx + \int \frac{x}{(1+x^2)^3} dx \\ &= \frac{\ln|1+x^2|}{2} + \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4(1+x^2)^2} + C \end{aligned}$$

d) $\int \frac{x^3}{x^2 + x - 12} dx$

Note que o grau do numerador é superior ao grau do denominador, pelo que é necessário recorrer ao algoritmo da divisão de polinómios:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2 + x - 12 \\ -x^3 & -x^2 + 12x \\ \hline & -x^2 + 12x \\ & x^2 + x - 12 \\ \hline & +13x - 12 \end{array}$$

Assim temos que

$$x^3 = (x-1)(x^2 + x - 12) + (13x - 12)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{x^2 + x - 12} &= \frac{(x-1)(x^2 + x - 12) + (13x - 12)}{x^2 + x - 12} \\ &= (x-1) + \frac{13x - 12}{x^2 + x - 12} \end{aligned}$$

Portanto

$$\int \frac{x^3}{x^2 + x - 12} dx = \int (x-1) dx + \int \frac{13x-12}{x^2 + x - 12} dx$$

Um dos integrais resultantes é imediato e o outro tem grau do numerador menor que o grau do denominador.

Vamos começar por calcular $\int \frac{13x-12}{x^2 + x - 12} dx$.

Factorização do denominador: $x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)$

Na decomposição em fracções parciais poderemos encontrar os denominadores:

$$x-3 \quad e \quad x+4$$

Vamos decompor a função integrando em fracções parciais:

$$\begin{aligned} \frac{13x-12}{x^2 + x - 12} &= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4} \\ &= \frac{(A+B)x + (4A-3B)}{(x-3)(x+4)} \end{aligned}$$

Como temos uma igualdade e os denominadores são iguais então temos que ter forçosamente os numeradores iguais, isto é:

$$13x-12 = (A+B)x + (4A-3B)$$

Igualando as potências de x , temos

$$\begin{cases} A+B=13 \\ 4A-3B=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=13-B \\ 52-7B=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{27}{7} \\ B=\frac{64}{7} \end{cases}$$

Pelo que

$$\begin{aligned} \int \frac{13x-12}{x^2 + x - 12} dx &= \frac{27}{7} \int \frac{dx}{x-3} + \frac{64}{7} \int \frac{dx}{x+4} \\ &= \frac{27}{7} \ln|x-3| + \frac{64}{7} \ln|x+4| + C \end{aligned}$$

Conclusão:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{x^2 + x - 12} dx &= \int (x-1) dx + \int \frac{13x-12}{x^2 + x - 12} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x + \frac{27}{7} \ln|x-3| + \frac{64}{7} \ln|x+4| + C \end{aligned}$$