Esboço de gráficos:

Para esboçar o gráfico de uma função deve-se sempre que possível seguir as seguintes etapas:

- Indicar o domínio;
- Determinar os zeros (caso existam);
- Estudar a paridade;
- Estudar a continuidade;
- Identificar as assímptotas;
- Estudar a monotonia e indicar os extremos relativos;
- Determinar o sentido das concavidades do gráfico e indicar os pontos de inflexão.
- Depois destas "etapas cumpridas" tenta-se esboçar o gráfico, indicando por último o contradomínio.

<u>Exercício:</u>

Considere a função definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 1+x+e^{-\frac{1}{x}} & se \quad x\neq 0 \\ 0 & se \quad x=0 \end{cases}$$

1) Faça o estudo da função referindo os seguintes aspectos:
   a) Domínio
   b) Paridade
   c) Continuidade
   d) Assímptotas
   e) Pontos críticos
   f) Extremos relativos
   g) Intervalos de monotonia
   h) Pontos de inflexão e
   i) Concavidades
2) Faça um esboço do gráfico de f .
3) Indique o contradomínio de f .

<u>Resolução:</u>

a)

1. Domínio: IR

2. Paridade:

$$f(-x)=1-x+e^{\frac{1}{x}} \neq f(x) \qquad \forall x \neq 0$$

$$f(-x)=1-x+e^{\frac{1}{x}} \neq -f(x) \qquad \forall x \neq 0$$

f não é par nem ímpar.

3. Continuidade

Se $x \neq 0$, f é continua porque é soma de uma função polinomial $1+x$ com a função $e^{-\frac{1}{x}}$ sendo que esta é a composta da função exponencial com uma função racional, $-\frac{1}{x}$.

Se $x=0$ então $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1+x+e^{-\frac{1}{x}}\right)=1+\infty=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+x+e^{-\frac{1}{x}}\right)=1+0=1$.

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, f é descontínua em $x=0$.

<u>Conclusão</u>: f é contínua em $IR \setminus \{0\}$.

4. Assímptotas:

- Assímptotas verticais:

Pontos onde pode existir assímptotas verticais: $x=0$.

Já vimos que:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(1+x+e^{-\frac{1}{x}}\right)=1+\infty=+\infty\,; \qquad \lim_{x\to 0^+}\left(1+x+e^{-\frac{1}{x}}\right)=1+0=1$$

$\therefore$ $x=0$ é uma assímptota vertical (unilateral) do gráfico de f.

- Assímptotas horizontais:

$$\lim_{x\to \pm\infty}\left(1+x+e^{-\frac{1}{x}}\right)=1\pm\infty+1=\pm\infty$$

$\therefore$ o gráfico de f não admite assímptotas horizontais.

- Assímptotas oblíquas:

$$m=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{1+x+e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to \pm\infty}\left(\frac{1}{x}+1+\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\right)=1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + x + e^{-\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + e^{-\frac{1}{x}}\right) = 2$$

$\therefore\ \ y = x + 2$ é uma assímptota oblíqua bilateral.

<u>1º derivada:</u>

f é descontínua em $x = 0$ pelo que neste ponto não está definida a derivada.

Se $x \neq 0$, $f'(x) = 1 + \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \dfrac{x^2 + e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$

5. Pontos críticos

$x = 0$ pois $0 \in D_f$ mas $0 \notin D_{f'}$

Não existe outro pontos críticos porque a função derivada não tem zeros:

$$f'(x) = 0 \iff \frac{x^2 + e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = 0 \iff x^2 + e^{-\frac{1}{x}} = 0 \ \wedge\ x^2 \neq 0$$

$$\iff \underbrace{e^{-\frac{1}{x}} = -x^2}_{impossível} \ \wedge\ x \neq 0$$

(A derivada nunca se anula pois $e^{-\frac{1}{x}} > 0 \quad \forall x$ e $-x^2 \leq 0$)

6. Extremos relativos:

	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de f'	+	n.d.	+
f	$\nearrow$		$\nearrow$

n.d. – não definida

Como f é <u>descontínua</u> em $x = 0$ é necessário ver o que acontece as imagens em torno deste ponto:

- $f(0) = 0$
- para $x > 0$ é fácil ver que $f(x) = 1 + x + e^{-\frac{1}{x}} > 1$
- para $x < 0$ já vimos que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

- existe uma vizinhança em torno de $x = 0$ onde $f(0)$ é a menor imagem e portanto $f(0)$ é um mínimo relativo.

  <u>Note que</u> apesar de $f(0)$ ser um mínimo, a primeira derivada em torno de $x = 0$ não muda de sinal, mas isto não contradiz o **critério da 1ª derivada para classificação de extremos** (ver página 122) pois neste critério exige-se que a função seja contínua o que não acontece (a função dada é descontinua em $x = 0$).

7. Intervalos de monotonia:

   f é estritamente crescente se $x \in]-\infty,0[$ e se $x \in]0,+\infty[$.

   (**<u>note que</u>** é incorrecto afirmar que a função é estritamente crescente em todo o seu domínio, basta analisar o que se passa à volta de $x = 0$).

<u>2º derivada:</u>

Se $x \neq 0$, $f''(x) = \dfrac{(1-2x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}$

Pontos candidatos a pontos de inflexão:

- $x = 0$ pois não está definida a segunda derivada mas $0 \in D_f$
- $x = \dfrac{1}{2}$ pois $f''\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$

8. Pontos de inflexão:

	$-\infty$	0		$1/2$	$+\infty$
f''	+	n.d.	+	0	-
f	$\cup$		$\cup$		$\cap$

n.d. – não definida

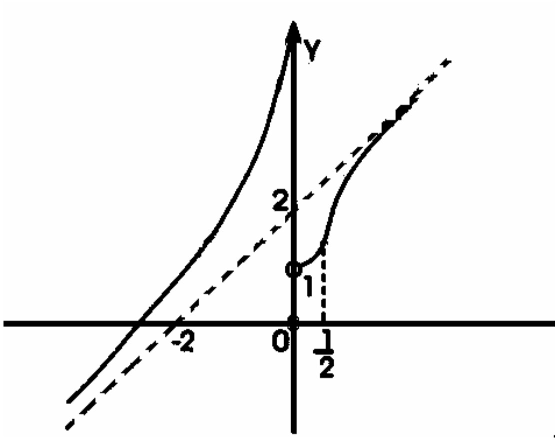
Portanto $x = \dfrac{1}{2}$ é um ponto de inflexão.

9. Concavidades:

Voltada para cima se $x \in \left]-\infty, 0\right[$ e se $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$

Voltada para baixo se $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

b) Esboço do gráfico



Apesar da função f ter dois zeros, não é fácil determinar um deles pois implica a resolução da equação $1 + x = e^{-\frac{1}{x}}$.

c) Contradomínio: $CD_f = IR$.

Extremos absolutos de funções definidas em intervalos fechados

Já sabemos, pelo teorema de Weierstrass (ver página 97), que uma função definida num intervalo fechado $[a,b]$ atinge tem um máximo e um mínimo

Como proceder para encontrar os extremos de uma função definida num intervalo fechado $[a,b]$?

1. Determinar os pontos críticos de f no intervalo $]a,b[$.
2. Calcular a imagem de cada um dos pontos críticos obtido em 1.
3. Calcular as imagens dos extremos $f(a)$ e $f(b)$.
4. Os valores máximo e mínimo de f em $[a,b]$, caso existam, são o maior e o menor valores da função calculados em 2 e 3.

<u>**Exercício 1:**</u>

Considere a função f definida por $f(x) = x^3 - 12x$ onde $x \in [-3,5]$.

Calcule os extremos absolutos de f.

<u>Resolução:</u>

$D_f = [-3,5]$ porque $x \in [-3,5]$.

f é contínua pois é polinomial.

$f'(x) = 3x^2 - 12$

A derivada está definida em todos os pontos, pelos que os pontos críticos se existirem terão que anular a derivada.

<u>Pontos críticos</u>: $x = -2$ e $x = 2$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \quad \vee \quad x = 2$$

Para determinar os extremos absolutos basta calcular as imagens dos pontos críticos e dos extremos do domínio da função f e compará-las. O valor da maior imagem será o máximo absoluto e o valor da menor imagem será o mínimo absoluto.

Como $f(-3) = 9$; $f(-2) = 16$; $f(2) = -4$ e $f(5) = 65$ resulta que 65 e o máximo absoluto e -4 é o mínimo absoluto.

<u>**Note que**</u> não é necessário fazer o quadro do estudo da monotonia da função.

<u>Exercício 2:</u>

Calcule os extremos absolutos, caso existam, da função definida por $f(x) = 4x^2 - 2x^4$ para $x \in [-2,2]$.

<u>Resolução:</u>

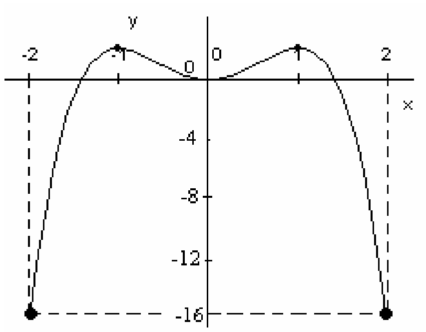
$D_f = [-2,2]$ pois $x \in [-2,2]$; f é contínua pois é polinomial.

$f'(x) = 8x - 8x^3$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1$$

Pontos críticos: $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$.

Como $f(-2) = -16$; $f(-1) = 2$; $f(0) = 0$; $f(1) = 2$ e $f(2) = -16$ resulta que 2 é o máximo absoluto e -16 é o mínimo absoluto.



Note que quando consideramos $f(x) = 4x^2 - 2x^4$ definida em IR podemos verificar facilmente pela análise do quadro da monotonia da função:

	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	-	0	+	0	-
f	↗		↘		↗		↘

que a função definida em IR

- tem um máximo absoluto $f(-1) = f(1) = 2$
- mas não tem mínimo absoluto: $f(0) = 0$ é um mínimo mas não é absoluto.

Problemas de optimização:

Etapas da resolução de um problema de optimização:

- **Ler** atentamente o problema – fundamental!
- Identificar as incógnitas.
- Fazer um esquema do problema representando as incógnitas e as quantidades conhecidas.
- Encontrar as possíveis condições a que estão sujeitas as incógnitas.
- Exprimir a função a optimizar em função de uma única incógnita.
- Encontrar os pontos críticos e extremos da função anteriormente obtida.
- **Dar resposta** ao problema.

Problema 1:

Determine dois números positivos cujo produto seja máximo e a sua soma seja 40.

Resolução:

- Identificar as variáveis

  Sejam x e y os números procurados.

- Restrições das variáveis:

  Sabe-se que:

  - $x > 0$, $y > 0$
  - $x + y = 40$ $(\Leftrightarrow y = 40 - x)$

- Função a maximizar:

  Função produto: $xy = x(40 - x)$

  Defina-se $f(x) = x(40 - x)$

- Determinar pontos críticos de f :

  $D_f =]0,+\infty[$ (note-se que $x > 0$)

  f é continua no seu domínio porque é polinomial.

  $f(x) = x(40 - x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 40 - 2x$

  Pontos críticos: $x = 20$:

  $$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 40 \quad \Leftrightarrow \quad x = 20$$

	0		20	$+\infty$
Sinal de f'		+	0	-
f	n.d.	↗		↘

n.d. – não definida

Logo em $x = 20$ ocorre um máximo relativo

Como a função não está definida nos extremos do D_f , o máximo encontrado é o máximo absoluto.

- Resposta do problema:

  Os números procurados são: $x = 20$ e $y = 40 - x = 40 - 20 = 20$.

  Note que o enunciado pede os números que maximizam o produto e não o produto máximo que seria $f(20) = 20(40 - 20) = 400$.

Problema 2:

Qual o ponto pertencente à hipérbole de equação $xy = 1$, de abcissa positiva, que está mais próximo da origem.

Resolução:

- Identificar as variáveis

  Seja (x, y) o ponto da hipérbole procurado.

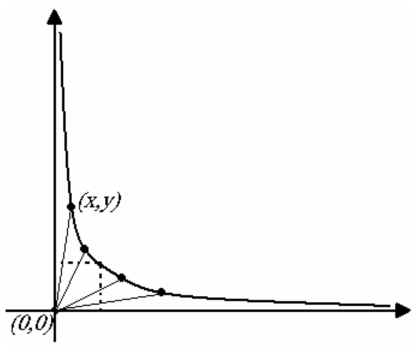
- Restrições das variáveis:

  Sabe-se que:

  - $x > 0$
  - $xy = 1 \quad \left(\Leftrightarrow \quad y = \dfrac{1}{x} \right)$

- Esquema do problema:

  Ideia: coloca-se um ponto sobre o ramo da hipérbole cujas abcissas são positivas e para cada um destes pontos determina-se o comprimento do segmento que une o ponto (x, y) à origem – este processo sugere qual deve ser a função a optimizar.



- <u>Função a minimizar:</u>

  Pretende-se minimizar o comprimento do segmento que une os pontos $(0,0)$ e (x,y):

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}$$

Defina-se $d(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}$

<u>Note que:</u>

O mínimo da função d, caso exista, é atingido no mesmo ponto que o mínimo da função $f=d^2$.

Por simplicidade dos cálculos vamos trabalhar com a função f definida por: $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$

- <u>Determinar pontos críticos de</u> f:

  $D_f=]0,+\infty[$ (note-se que $x>0$)

  f é continua no seu domínio porque é soma de funções racionais

$$f(x)=x^2+\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=2x-\frac{2}{x^3}$$

Pontos críticos: $x=1$:

$$\begin{aligned} f'(x)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x-\frac{2}{x^3}=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^4-1=0 \quad \wedge \quad x^3\neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x^2-1)(x^2+1)=0 \quad \wedge \quad x\neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x=-1 \quad \vee \quad x=1) \quad \wedge \quad x\neq 0 \end{aligned}$$

Note que $-1\notin D_f$ pelo que não é ponto crítico.

	0		1	$+\infty$
Sinal de f'		-	0	+
f	n.d.	↘		↗

n.d. – não definida

Logo em $x=1$ ocorre um mínimo relativo.

Como a função não está definida nos extremos do D_f, o mínimo encontrado é o mínimo absoluto.

- <u>Resposta do problema:</u>

  O ponto procurado da hipérbole tem coordenadas $(1,1)$ pois $y = \frac{1}{x}$.

  <u>Note que</u> o enunciado pede o ponto da hipérbole de abcissa positiva que está mais próximo da origem e não a distância da origem à hipérbole que seria $d(1) = \sqrt{1^2 + \frac{1}{1^2}} = \sqrt{2}$.