12. $\lim\limits_{x\to 0} tg(x)^{sen(x)}$

13. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} tg(x)^{cos(x)}$

14. $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x)^{\frac{x+1}{x^2}}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+3x)^{\frac{1}{2x}}$

16. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+2cos(x))^{\frac{1}{cos(x)}}$

17. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{sen(x)}{x}$

<u>Resolução</u>:

Repare que não existe $\lim\limits_{x\to +\infty} sen(x)$.

Mas, $\dfrac{-1}{x} \le \dfrac{sen(x)}{x} \le \dfrac{1}{x}$ *e como* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-1}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, *então* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{sen(x)}{x} = 0$

(ver o teorema de encaixe de limites).

5.7 Aplicações da derivada ao estudo das funções.

Pontos críticos e intervalos de monotonia:

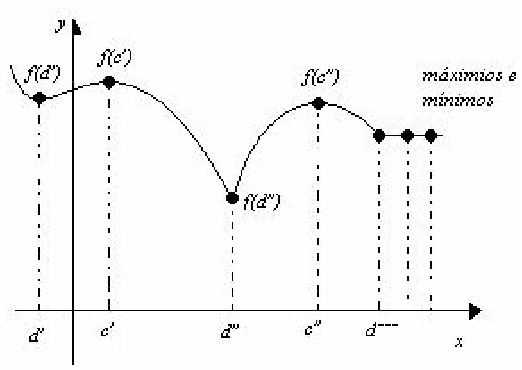
Definição:

Seja f *uma função e* $c \in D_f$. *Diz-se que* $f(c)$ *é um* ***extremo relativo*** *de* f *se em* $x = c$ *ocorre uma máximo ou um mínimo (rever definições página 12).*

Por exemplo, a função representada ao lado tem:

- máximos em $x = c'$ e $x = c''$
- mínimos em $x = d'$, $x = d''$ e $x = d'''$.

Note que os dois últimos pontos assinalados no gráfico da função são simultaneamente máximos e mínimos.



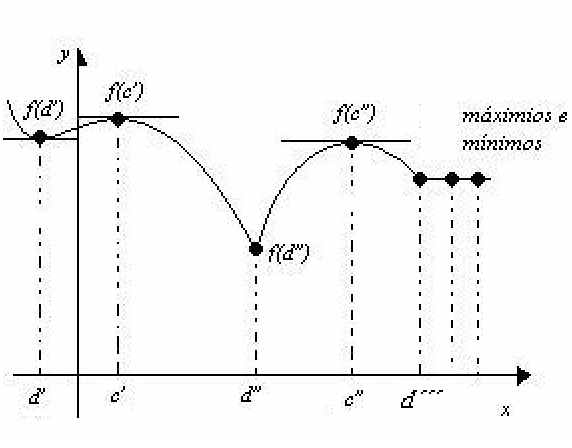
Teorema:

Seja f uma função que tem um extremo relativo em $x = c \in D_f$ (i.e., $f(c)$ é um máximo ou um mínimo local) então ou $f'(c) = 0$ ou não existe $f'(c)$.

Como consequência do teorema anterior resulta que os pontos candidatos a extremos relativos de uma função f encontram-se entre os zeros da função derivada e/ou os pontos do domínio de f que não admitem derivada. A estes pontos chamámos **pontos críticos**.

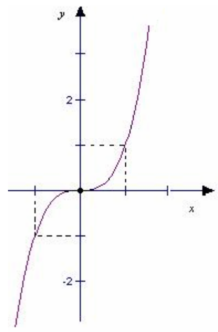
Obs.:

- $f'(c) = 0$ significa que a tangente ao gráfico de f em $x = c$ é horizontal, situação que ocorre em $x = d'$, $x = c'$ e $x = c''$;
- $f'(c)$ não existir significa que as semi-tangentes ao gráfico de f em $x = c$ têm declives distintos, como acontece em $x = d''$ e $x = d'''$.



Nota:

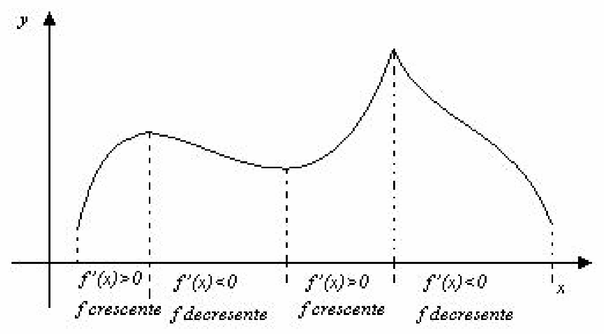
O recíproco deste teorema é falso, isto é, pelo facto de $f'(c) = 0$ não se pode concluir que $f(c)$ seja um extremo. Por exemplo, $f(x) = x^3$ tem derivada $f'(x) = 3x^2$, e $f'(0) = 0$, e no entanto $f(0)$ não é máximo nem mínimo de f. Conclusão: nem todo o ponto crítico é um extremo.



Corolário do teorema de Lagrange: Monotonia

Seja f uma função <u>derivável</u> no intervalo $\left]a,b\right[$, então:

- se $f'(x) > 0$ para todo $x \in \left]a,b\right[$, então f é estritamente crescente;
- se $f'(x) < 0$ para todo $x \in \left]a,b\right[$, então f é estritamente decrescente;
- se $f'(x) = 0$ para todo $x \in \left]a,b\right[$, então f é *constante*.



Como decidir se um ponto crítico é máximo ou mínimo relativo?

Critério da 1ª derivada para classificação de extremos:

Seja f uma função <u>contínua</u> em $c \in \left]a,b\right[$ e derivável em $\left]a,b\right[\setminus \{c\}$. Se $x = c$ é um ponto crítico de f e

- *f' passa de positiva para negativa em $x = c$, então $f(c)$ é máximo relativo;*
- *f' passa de negativa para positiva em $x = c$, então $f(c)$ é mínimo relativo;*
- *$f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ para todo $x \in \left]a,b\right[$, então $f(c)$ não é extremo relativo.*

Critério da 2ª derivada para classificação de extremos:

Seja f uma função derivável em $\left]a,b\right[$, com $c \in \left]a,b\right[$, e $f'(c) = 0$:

- *se $f''(c) < 0$ então f tem um máximo relativo em $x = c$ ($f(c)$ é máximo relativo)*
- *se $f''(c) > 0$ então f tem um mínimo relativo em $x = c$ ($f(c)$ é mínimo relativo).*

Este pode ser compreendido quando analisarmos a concavidade da função f, de que falaremos em seguida.

<u>Exercício:</u>

Determine os extremos relativos e indique os intervalos de monotonia das seguintes funções:

a) $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & , se\ x<0 \\ log_2(x+1) & , se\ x \geq 0 \end{cases}$

b) $g(x)=x^3-x$

c) $h(x)=x^{1/3}(8-x)$

<u>Resolução de c):</u>

$D_h = IR$ e h é contínua, pois é o produto de funções contínuas ($\sqrt[3]{x}$ é uma função irracional e $8-x$ é uma função polinomial)

Note que se existir algum ponto onde a função seja descontínua então ele deve ser considerado como ponto crítico.

<u>Cálculo da primeira derivada:</u>

$$h'(x)=\frac{8-x}{3x^{2/3}}-x^{1/3}=\frac{8-x}{3\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt[3]{x}=\frac{8-4x}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}(2-x);$$

<u>Pontos críticos:</u>

- $x=0$ porque $0 \in D_h$ mas $0 \notin D_{h'}$
- $x=2$ pois $h'(2)=0$

	$-\infty$	0		2	$+\infty$
Sinal de h'	+	n.d.	+	0	-
h	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

n.d. – não definida

<u>Extremos relativos:</u>

Máximos relativos: $h(2)$; Mínimos relativos: não tem;

Note que

- $h(0)$ não é um extremo pois à volta de $x = 0$, h' não muda de sinal;
- alternativamente, podemos utilizar o teste da 2ª derivada para concluir que em $x = 2$ ocorre um máximo pois:

$$\left.\begin{array}{c} h'(2) = 0 \\ \\ h''(x) = \dfrac{-4(x+4)}{9x^{5/3}} \\ \\ h''(2) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad h(2) \quad \text{é um máximo}$$

<u>Intervalos de monotonia:</u>

h é crescente se $x \in \left]-\infty, 2\right[$;

h é decrescente se $x \in \left]2, +\infty\right[$.

Quais os pontos que se devem considerar na elaboração do quadro para o estudo da monotonia de uma função f ?

Devem ser considerados os seguintes pontos:

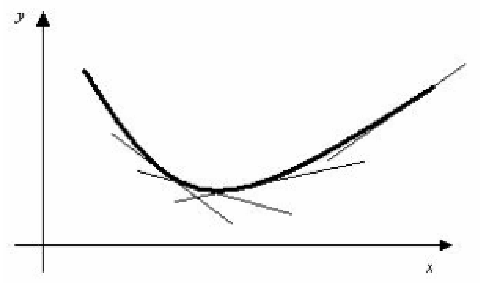
- pontos críticos, i.e. pontos tais que $f'(x) = 0$ ou pontos onde não existe $f'(x)$;
- pontos de descontinuidades de f e
- no caso do domínio ser um intervalo ou união de intervalos há que considerar os extremos desses intervalos.

Pontos inflexões e concavidades:

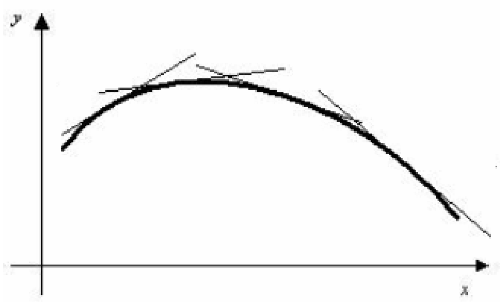
Vimos que o sinal de f' dá-nos informação sobre a monotonia da função f. Analogamente, podemos estudar o sinal de f'' para determinar a monotonia de f'. Assim, se f é duas vezes derivável no intervalo $]a,b[$ e

- se $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in]a,b[$, então f' é crescente;
- se $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in]a,b[$, então f' é decrescente.

Ora, geometricamente, f' ser crescente significa que à medida que x cresce o declive da recta tangente a f aumenta e que o gráfico da função (à volta do ponto x) fica acima de cada tangente (ver figura ao lado).



De forma análoga, f' ser decrescente significa que à medida que x cresce o declive da recta tangente a f diminui e que o gráfico da função (à volta de x) fica abaixo de cada tangente (ver figura ao lado).



Definição:

*Seja f uma função, diz-se que $c \in D_f$ é um **ponto de inflexão** se f muda a concavidade à volta de $x = c$.*

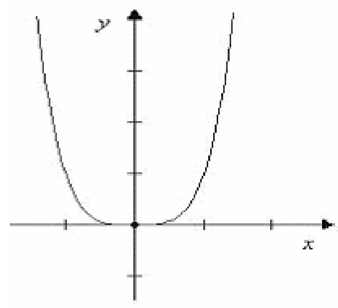
Teorema:

Seja f uma função que tem um ponto de inflexão em $x = c \in D_f$ então ou $f''(c) = 0$ ou não existe $f''(c)$.

Como consequência do teorema anterior resulta que os pontos candidatos a pontos de inflexão de uma função f encontram-se entre os zeros da segunda derivada da função e/ou os pontos do domínio de f que não admitem segunda derivada.

<u>Nota:</u>

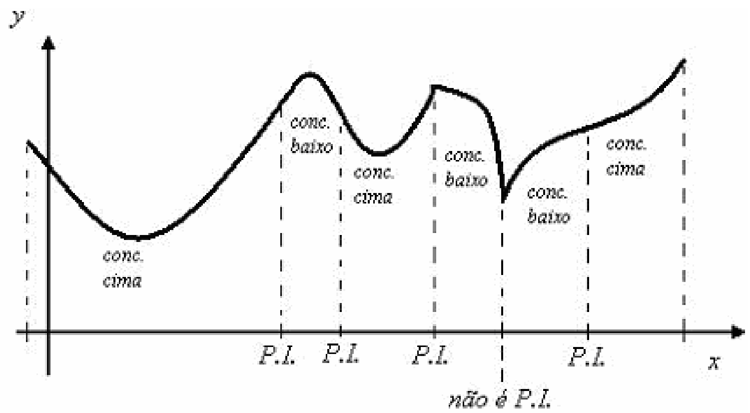
O recíproco deste teorema é falso, isto é, pelo facto de $f''(c)=0$ não se pode concluir que $x=c$ é um ponto de inflexão. Por exemplo, $f(x)=x^4$ tem segunda derivada $f''(x)=12x^2$, e $f''(0)=0$, e no entanto $x=0$ não é ponto de inflexão (porque à volta de $x=0$, f não muda a concavidade) conforme se pode ver na figura ao lado.



Teorema (teste da concavidade)

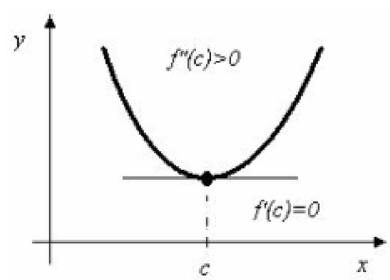
Seja f uma função duas vezes derivável em $]a,b[$.

- Se $f''(x)>0$ para todo $x\in\,]a,b[$, então f tem concavidade voltada para cima;
- Se $f''(x)<0$ para todo $x\in\,]a,b[$, então f tem concavidade voltada para baixo.

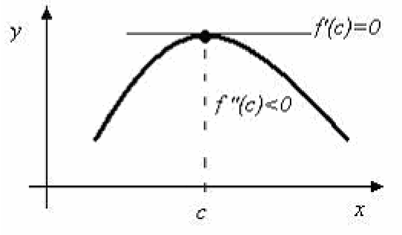


Podemos agora compreender o "***Critério da 2ª derivada para classificação dos extremos***" atrás enunciado:

- se temos $f'(c)=0$ (a tangente em $x=c$ é horizontal), e se $f''(c)>0$ (a concavidade é voltada para cima) então $f(c)$ é um mínimo (ver figura ao lado).



- se temos $f'(c) = 0$ (a tangente em $x = c$ é horizontal), e se $f''(c) < 0$ (a concavidade é voltada para baixo) então $f(c)$ é um máximo (ver figura ao lado).



<u>Exercício:</u>

Determine os pontos de inflexão e a concavidade das seguintes funções:

a) $f(x) = x^{2/3}(5 + x)$

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 3$

c) $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 17$

d) $h(x) = |(x+1)(x-1)^2|$

<u>Resolução da alínea a)</u>:

$D_f = IR$ e f é contínua pois é o produto de funções contínuas ($\sqrt[3]{x^2}$ é uma função irracional e $5 + x$ é uma função polinomial)

Note que se existir algum ponto onde a função seja descontínua então ele deve ser considerado como ponto crítico.

<u>Cálculo da primeira derivada:</u>

$$f'(x) = \frac{2(5+x)}{3x^{1/3}} + x^{2/3} = \frac{10 + 5x}{3x^{1/3}}$$

Embora não seja pedido no enunciado do exercício, vamos fazer o estudo dos pontos críticos, extremos relativos e intervalos de monotonia.

<u>Pontos críticos:</u>

- $x = 0$ porque $0 \in D_f$ mas $0 \notin D_{f'}$
- $x = -2$ pois $f'(-2) = 0$

	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	-	n.d	+
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

n.d. – não definida

<u>Extremos relativos:</u> Máximos relativos: $f(-2)$; Mínimos relativos: $f(0)$.

<u>Obs. – importante!</u>

Apesar de não existir derivada em $x = 0$, f é contínua em $x = 0$ e f' muda de sinal em torno de $x = 0$ e portanto pelo critério da 1ª derivada para classificação de extremos (página 122) podemos concluir que $f(0)$ é um mínimo relativo. ***Muita atenção!!!*** *se f não fosse contínua em $x = 0$ mas $0 \in D_f$ ter-se-ia que analisar os limites laterais para poder concluir se existia ou não extremo nesse ponto.*

<u>Intervalos de Monotonia:</u>

f estritamente crescente: se $x \in \left]-\infty,-2\right[$ e se $x \in \left]0,+\infty\right[$

f estritamente decrescente: $x \in \left]-2,0\right[$.

<u>Cálculo da segunda derivada:</u>

$$f''(x) = \frac{10}{9}\left(\frac{x-1}{x^{4/3}}\right)$$

<u>Candidatos a pontos de inflexão:</u>

- $x = 0$ porque $0 \in D_f$ mas $0 \notin D_{f'}$
- $x = 1$ pois $f''(1) = 0$

	$-\infty$	0		1	$+\infty$
Sinal de f''	-	n.d.	-	0	+
f	$\cap$		$\cap$		$\cup$

Pontos de inflexão: $x = 1$ (**note que:** o ponto de inflexão é o "valor da abcissa" ao contrário dos extremos que se referem ao "valor da ordenada".)

Obs. – importante!

Apesar de $x = 0$ não ser zero da 2^a derivada poderia ser ponto de inflexão, bastaria que à sua volta o sinal de f'' mudasse.

Sentido da concavidade:

f tem concavidade voltada para baixo: se $x \in \left]-\infty, 1\right[$

f tem concavidade voltada para cima: se $x \in \left]1, +\infty\right[$.

Quais os pontos que se devem considerar na elaboração do quadro para o estudo das concavidades de uma função f ?

Devem ser considerados os seguintes pontos:

- pontos candidatos a pontos de inflexão, i.e. pontos $x \in D_f$ tais que $f''(x) = 0$ ou pontos onde não existe $f''(x)$;
- pontos de descontinuidades de f e
- no caso do domínio ser um intervalo ou união de intervalos há que considerar os extremos desses intervalos.

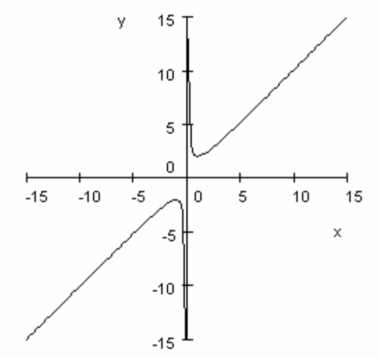
Assímptotas:

Seja f uma função real de variável real.

<u>Ideia intuitiva de assímptota</u>:

Uma recta é uma assímptota de uma função se o seu gráfico se aproxima indefinidamente dessa recta e no limite confunde-se com a própria recta.

Consideremos a função definida por $f(x) = x + \frac{1}{x}$, cuja representação gráfica é:



Esta função não está definida em $x = 0$.

O que é que acontece quando x se aproxima de zero?

À medida que x se aproxima de zero, quer pela direita quer pela esquerda, os correspondentes valores de $f(x)$ "explodem", isto é, crescem sem limite. Podemos então escrever: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} -\infty & se \quad x \to 0^- \\ +\infty & se \quad x \to 0^+ \end{cases}$

Neste caso, dizemos que a recta $x = 0$ é uma assímptota vertical do gráfico de f.

Como determinar as equações das assímptotas verticais do gráfico de uma função?

Para identificar os pontos onde eventualmente o gráfico admite uma assímptota determina-se:

- D_f;
- os pontos $a \in D_f$ onde a função é descontínua;
- no caso do domínio ser um intervalo ou união de intervalos devem-se considerar os pontos extremos que tais que $a \notin D_f$;

- $\lim_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim_{x\to a^+} f(x)$ quando fazem sentido.

  Se algum destes limites for $\pm\infty$, a recta $x = a$ diz-se uma ***assímptota vertical*** do gráfico de f (unilateral ou bilateral conforme exista um ou dois limites laterais infinitos, respectivamente).

__Exercício:__

Determine, caso existam, as assímptotas verticais dos gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

__Resolução:__

$D_f = \{x \in IR : x^2 - 1 > 0\} =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

f é continua porque é quociente entre uma função polinomial e uma função irracional.

Pontos onde podem existir assímptotas verticais: $x = -1$ e $x = 1$.

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

$\therefore$ $x = -1$ e $x = 1$ são duas assímptotas verticais do gráfico de f.

b) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$

__Resolução:__

$D_f = IR \setminus \{0\}$.

f é contínua porque é diferença e quociente de funções contínuas (exponencial, constante e polinomial).

Pontos onde podem existir assímptotas verticais: $x = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ (pela Regra de Cauchy)

$\therefore$ $x = 0$ não é assímptota vertical do gráfico de f.

$\therefore$ o gráfico de f não tem assímptotas verticais.

c) $f(x)=\begin{cases}\ln\left(4-x^2\right) & se \quad x\geq 0\\ -\dfrac{1}{x} & se \quad x<0\end{cases}$

<u>Resolução:</u>

$$\begin{aligned}D_f &= \left\{x\in IR:\left(4-x^2>0 \quad\wedge\quad x\geq 0\right)\quad\vee\quad\left(x\neq 0\quad\wedge\quad x<0\right)\right\}\\ &= \left\{x\in IR:\left(-2<x<2\quad\wedge\quad x\geq 0\right)\quad\vee\quad\left(x\neq 0\quad\wedge\quad x<0\right)\right\}\\ &= \left\{x\in IR: 0\leq x<2\quad\vee\quad x<0\right\}\\ &= \left]-\infty,2\right[\end{aligned}$$

f é continua em todo o seu domínio excepto em $x=0$:

Para $x>0$, f é continua porque é composta de funções contínuas (logarítmica com polinomial). Para $x<0$, f é continua porque é uma função racional.

Para $x=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(x^2+4\right)=\ln(4)\neq -\infty=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, logo f é descontinua em $x=0$.

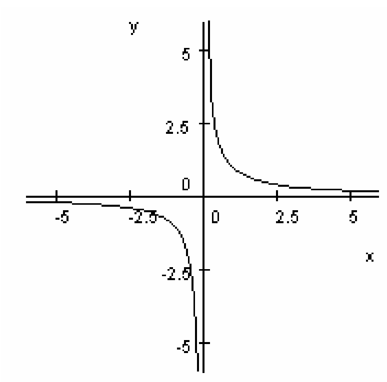
Pontos onde podem existir assímptotas verticais: $x=0$ e $x=2$.

(Exercício …)

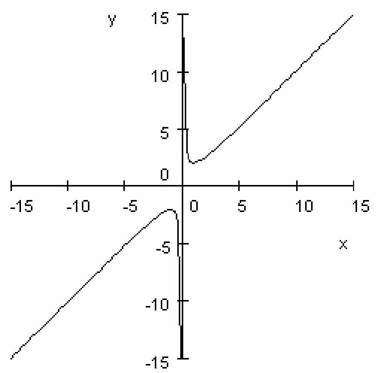
Assímptotas não verticais:

Consideremos as funções representadas graficamente:

$f(x)=\dfrac{1}{x}$



$g(x)=x+\dfrac{1}{x}$



Quando $x\to+\infty$ o gráfico da função f aproxima-se da recta $y=0$. Quando $x\to-\infty$ o gráfico da função f aproxima-se da recta $y=0$.

Dizemos que a recta $y=0$ é uma assímptota horizontal (bilateral).

No caso da função g, quando $x \to \pm\infty$ o gráfico da função g aproxima-se da recta $y = x$. $\left(\textit{Note-se que} \quad g(x) - x = \frac{1}{x} \ \textit{e} \ \frac{1}{x} \to 0 \quad \textit{quando} \quad x \to \pm\infty \right)$

A existência de assímptotas não verticais (horizontais e oblíquas) depende do comportamento da função quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

Se a recta $y = mx + b$ é uma assímptota não vertical do gráfico da função, quando $x \to +\infty$, é porque o gráfico da função se aproxima cada vez mais da recta quando $x \to +\infty$.

(De modo inteiramente análogo se diria quando $x \to -\infty$).

Suponhamos que $x \to +\infty$.

Temos que

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (mx + b) \right] = 0 .$$

Desta expressão vamos determinar as constantes m e b.

Determinação de m:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (mx + b) \right] = 0$$

Dividindo por x vem:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - (mx+b)}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} - \frac{mx}{x} - \frac{b}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} - m = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Logo, $\boxed{m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}}$

Determinação de b:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (mx + b) \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx \right) = \lim_{x \to +\infty} b \quad \Leftrightarrow \quad b = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx \right)$$

Logo, $\boxed{b = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx \right)}$.

No caso em que $x \to -\infty$, procedendo do modo análogo concluímos que:

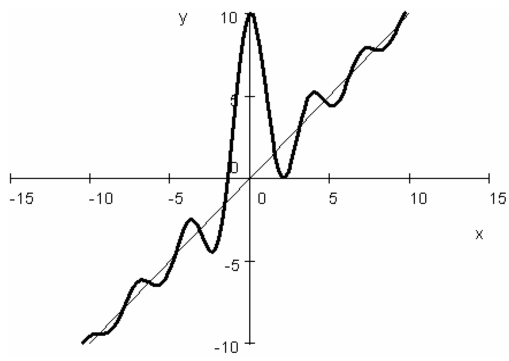
- $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
- $b = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - mx \right)$

Notas:

- A existência de assímptotas não verticais (horizontais ou oblíquas) pressupõe que as expressões $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ tenham sentido, isto é, que o domínio da função contenha um intervalo ilimitado do tipo $]-\infty, a[$ e/ou $]a, +\infty[$.
- Se $m = 0$ então a assímptota, a existir, é horizontal.
- Se $m = \infty$ ou não existir, então o gráfico da função não tem assímptotas não verticais.
- Se $b = \infty$ ou não existir, então o gráfico da função não tem assímptotas
- Em geral, é *mais fácil* determinar as assímptotas horizontais do que as oblíquas, pelo que há vantagem em começar por verificar se uma função tem assímptotas horizontais: $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$, e caso este limite seja finito conclui-se que a (única) assímptota não vertical é $y = b$.
- Se uma função tem uma assímptota horizontal quando $x \to +\infty$ então não pode ter simultaneamente uma oblíqua quando $x \to +\infty$. Porquê?
- Uma função pode ter uma assímptota horizontal e outra oblíqua desde que uma seja quando $x \to +\infty$ e outra quando $x \to -\infty$.
- O gráfico de uma função pode intersectar *no máximo uma vez* uma assímptota vertical (caso em que a função é descontinua num ponto mas está definida nesse ponto).
- O gráfico de uma função *pode intersectar mais do que uma vez* uma assímptota não vertical. Por exemplo, consideremos a função definida

  por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5sen(2x)}{x} + x & se \quad x \neq 0 \\ 10 & se \quad x = 0 \end{cases}$

  cuja representação gráfica é:



Verifique que a recta $y = x$ é uma assímptota oblíqua ao gráfico de f .

<u>Exercício:</u>

Determine, caso existam, as assímptotas não verticais dos gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

<u>Resolução:</u>

$D_f = \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$.

Assímptotas horizontais:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -1$$

Note que nos dois limites anteriores não se consegue levantar as indeterminações aplicando a Regra de Cauchy (experimente!).

$\therefore$ $y = 1$ é uma assímptota horizontal do gráfico de f quando $x \to +\infty$ e $y = -1$ é uma assímptota horizontal do gráfico de f quando $x \to -\infty$.

b) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$

<u>Resolução:</u>

$D_f = IR \setminus \{0\}$.

Assímptotas horizontais:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad (\text{Re}\,gra\ de\ \ Cauchy)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{-1}{-\infty} = 0$$

$\therefore$ $y = 0$ é uma assímptota horizontal do gráfico de f quando $x \to -\infty$ e o gráfico de f não tem assímptotas horizontais quando $x \to +\infty$.

Assimptotas oblíquas:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

$\therefore$ o gráfico de f não admite assímptotas oblíquas quando $x \to +\infty$.

c) $f(x) = \begin{cases} ln\left(4 - x^2\right) & se \quad x \geq 0 \\ -\dfrac{1}{x} & se \quad x < 0 \end{cases}$

<u>Resolução:</u>

$D_f = \left]-\infty, 2\right[$.

Neste caso não faz sentido verificar se a função tem assímptotas oblíquas quando $x \to +\infty$.

Assímptotas horizontais quando $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$\therefore$ $y = 0$ é uma assímptotas horizontal do gráfico de f.