Corolário (derivada da função inversa):

Seja f uma função diferenciável e injectiva definida num intervalo $\boldsymbol{I} \subseteq IR$. Seja $x_0 \in \boldsymbol{I}$ tal que $f'(x_0) \neq 0$, então f^{-1} é derivável em $y_0 = f(x_0)$ e

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Exercício:

Determine a derivada de $arcsen(x)$ para $x \in]-1,1[$.

Resolução:

A função $arcsen$ é inversa da função sen na restrição $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Ora $f(x) = senx$ é uma função diferenciável e injectiva em $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Seja $y_0 = sen(x_0)$ então o corolário anterior firma que

$$\left(arcsen(y_0)\right)' = \frac{1}{\left(sen(x_0)\right)'} = \frac{1}{\cos(x_0)}$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria temos

$$sen^2(x_0) + \cos^2(x_0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos(x_0) = \sqrt{1 - sen^2(x_0)} = \sqrt{1 - {y_0}^2}$$

(note que como $x_0 = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x_0)$ é positivo e nunca se anula) e portanto

$$\left(arcsen(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercício: *Determine*

a) $(\arccos(x))'$ para $x \in]-1,1[$

b) $(arctg(x))'$ para $x \in IR$

c) $\left(arccotg(x)\right)'$ para $x \in IR$;

d) $(\log_a(x))'$ para $x \in IR^+$ ($a > 0$);

Temos portanto as seguintes fórmulas

1. função logaritmo $a > 0$:	$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$
2. função $arcsen$	$f(x) = arcsen(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. função arccos	$f(x)=\arccos(x)$	$f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4. função *arctg*	$f(x)=arctg(x)$	$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$
5. função *arccotg*	$f(x)=arccotg(x)$	$f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Tabelas de Derivadas

Tendo em conta a derivada das funções elementares atrás referidas e a derivada da função composta, podemos escrever as seguintes fórmulas de derivação:

Sejam *u* e *v* funções deriváveis, *k* e $a>0$ constantes:

1. $(u+v)'=u'+v'$

2. $(uv)'=u'v+uv'$

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

4. $(ku)'=ku'$

5. $\left(u^k\right)'=ku^{k-1}u'$

6. $\left(a^u\right)'=u'a^u\ln a$

7. $\left(u^v\right)'=v'.u^v.\ln u+v.u^{v-1}.u'$

8. $(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$

9. $(sen(u))'=u'\cos(u)$

10. $(\cos(u))'=-u'\,sen(u)$

11. $(tg(u))'=u'\sec^2(u)$

12. $(\cot g(u))'=-u'\cos ec^2(u)$

13. $(arcsen(u))'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

14. $(\arccos(u))'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

15. $(arctg(u))'=\dfrac{u'}{1+u^2}$

16. $(arc\cot g(u))'=-\dfrac{u'}{1+u^2}$

5.5 Derivadas de ordem superior

Dada uma função *f* diferenciável, então *f’* é também uma função real de variável real. Assim podemos falar na função derivada de *f’*, ou seja na segunda derivada de *f*.

Em termos práticos *f’’* obtém-se de *f* derivando esta duas vezes, ou seja,

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'$$

Notação: Se $y = f(x)$:

- primeira derivada de f: f' ou, na notação de Leibniz, $\frac{df}{dx}$ ou $\frac{dy}{dx}$;
- segunda derivada de f: f'' ou, na notação de Leibniz, $\frac{d^2 f}{dx^2}$ ou $\frac{d^2 y}{dx^2}$;
- terceira derivada de f: f''' ou, na notação de Leibniz, $\frac{d^3 f}{dx^3}$ ou $\frac{d^3 y}{dx^3}$;
- quarta derivada de f: $f^{(4)}$ ou, na notação de Leibniz, $\frac{d^4 f}{dx^4}$ ou $\frac{d^4 y}{dx^4}$;
- …
- n-ésima derivada de f: $f^{(n)}$ ou, na notação de Leibniz, $\frac{d^n f}{dx^n}$ ou $\frac{d^n y}{dx^n}$, $n \in IN$.

Exercício:

Calcule as três primeiras derivadas da função $f(x) = \ln(x)$.

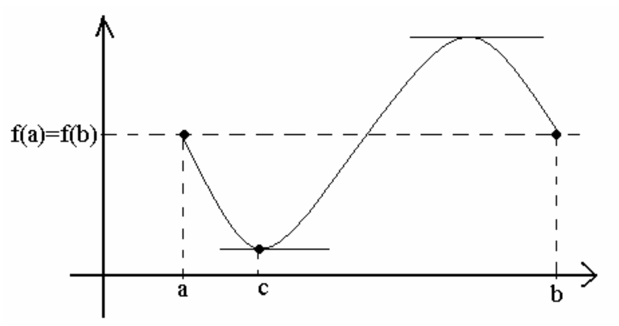
5.6 Teoremas fundamentais sobre derivação

Teorema de Rolle: *Seja* $f : [a,b] \rightarrow IR$ *uma função* *<u>contínua</u>* *no intervalo fechado* $[a,b]$ *e* *<u>derivável</u>* *no intervalo* $]a,b[$.

Se $f(a) = f(b)$ *então existe pelo menos um* $c \in]a,b[: f'(c) = 0$.

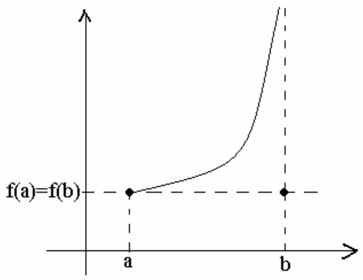
<u>Interpretação geométrica:</u>

O teorema de Rolle afirma entre dois pontos de uma função (<u>contínua</u> e <u>diferenciável</u>) com a mesma imagem existe pelo menos um ponto do gráfico de f onde a recta tangente é horizontal.



Se alguma das condições do teorema falhar a conclusão do teorema pode não se verificar, por exemplo:

1. Consideremos uma função f cuja representação gráfica é:

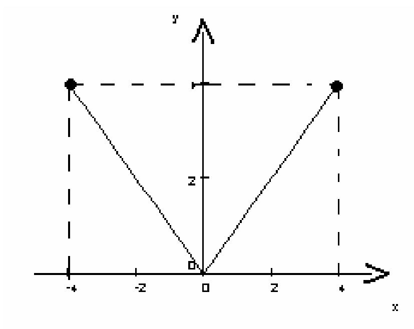


f não é contínua em $x = b$.

Não existe nenhum ponto do intervalo $[a,b]$ cuja recta tangente seja horizontal.

$\therefore$ é essencial a continuidade no intervalo fechado $[a,b]$

2. Seja $f(x) = |x|$, $x \in [-4,4]$. A representação gráfica de f é:



f não admite derivada em $x = 0$

Não existe nenhum ponto do intervalo $[-4,4]$ cuja recta tangente seja horizontal.

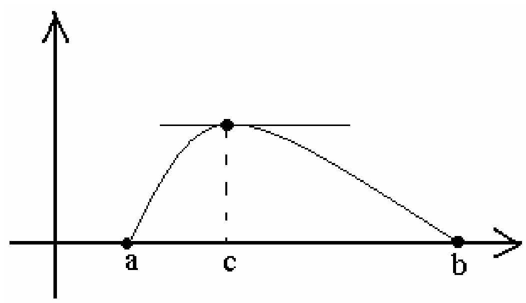
$\therefore$ é essencial a derivabilidade no intervalo aberto $]a,b[$.

Corolário 1: *Seja $f: [a,b] \to IR$ uma função <u>contínua</u> no intervalo fechado $[a,b]$ e com <u>derivada</u> no intervalo $]a,b[$.*

Se a e b são dois zeros de f então existe pelo menos um $c \in]a,b[:\ f'(c) = 0$.

<u>Interpretação geométrica:</u>

O corolário afirma que entre dois zeros de uma função (<u>contínua</u> e <u>derivável</u>) existe pelo menos um zero da derivada.

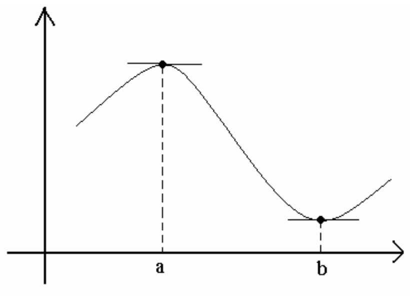


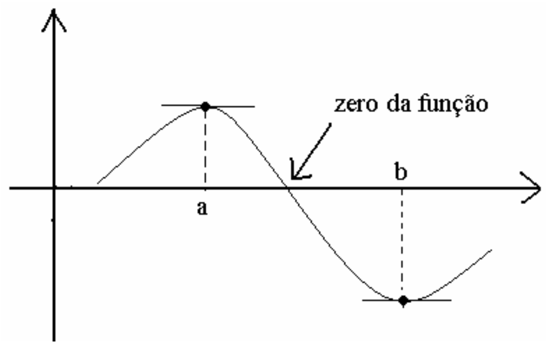
Se alguma das condições do teorema falhar a conclusão do teorema pode não se verificar. (Exercício: encontrar exemplos…)

Corolário 2: Seja $f: I \to IR$ *uma função derivável e* $[a,b] \subset I$.

Se a *e* b *são dois zeros de* f', *então* f *tem no máximo um zero entre* a *e* b.

Interpretação geométrica:

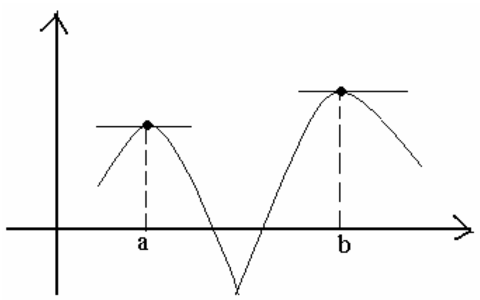




f não tem zeros. f tem um único zeros.

Se a hipótese da derivabilidade falhar no intervalo $[a,b]$ então a conclusão do corolário pode deixar de ser válida.

Por exemplo:



a e b são dois zeros consecutivos da derivada mas entre a e b existe dois zeros da função.

$\therefore$ é essencial a derivabilidade no intervalo fechado $[a,b]$

<u>Exercício:</u>

A equação $e^x = 1 + x$ *admite* $x = 0$ *como solução.*

Mostre que esta equação não pode ter mais nenhuma solução real.

<u>Resolução:</u>

Em primeiro lugar, há que observar que $x = 0$ é efectivamente uma solução da equação dada: $e^0 = 1 + 0$ (proposição verdadeira).

Defina-se $f(x) = e^x - 1 - x$.

Vamos supor que f outro zero: $a \neq 0$.

Então pelo primeiro corolário do teorema de Rolle, existe um ponto entre 0 e a (exclusive) tal que a derivada é nula.

Mas $f'(x) = e^x - 1$ e $f'(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$ – absurdo pois o teorema de Rolle afirma a existência de um zero da derivada entre 0 e a (exclusive).

O absurdo resultou de supor que f admitia mais do que um zero.

Logo f tem um único zero e portanto a equação dada tem uma única raiz.

Teorema de Darboux: *Seja $f: [a,b] \to IR$ uma função <u>contínua</u> no intervalo fechado $[a,b]$ e <u>derivável</u> no intervalo $[a,b]$.*

Então $f'(x)$ toma todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$.

<u>Exemplo:</u> A função

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

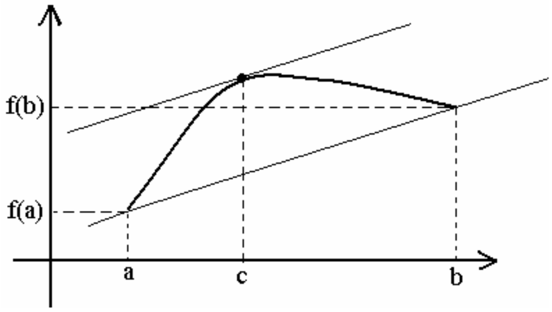
não pode ser a derivada de nenhuma outra função, pois no intervalo $[-1,1]$, $f'(-1) = -1$, $f'(1) = 1$ e $f'(x)$ não toma valores entre -1 e 1.

Teorema do valor médio ou de Lagrange: *Seja $f: [a,b] \to IR$ uma função <u>contínua</u> no intervalo fechado $[a,b]$ e <u>derivável</u> no intervalo $[a,b]$.*

Então existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

<u>Interpretação geométrica:</u>

O teorema de Lagrange afirma que existe um ponto no gráfico de f cujo declive da recta tangente é igual ao da recta que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.



$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corolário: Seja $f: \ I \ \to \ IR$ *uma função* <u>*contínua*</u> *(I um intervalo) e* $c \in I$.

Se f *tem derivada em* $I \setminus \{c\}$ *e se existem e são iguais* $\lim\limits_{x \to c^+} f'(x) = L = \lim\limits_{x \to c^-} f'(x)$ *então existe* $f'(c)$ *e* $f'(c) = L$.

<u>Exemplo:</u> A função

$$g(x) = \begin{cases} x & , x > 0 \\ arctg(x) & , x \leq 0 \end{cases}$$

é contínua (verifique que é contínua em $x = 0$), e temos que para $x \neq 0$ $g'(x)$ é

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ \dfrac{1}{1 + x^2} & , x < 0 \end{cases}.$$

Como *g* é <u>contínua</u> e $\lim\limits_{x \to 0^+} g'(x) = 1 = \lim\limits_{x \to 0^-} g'(x)$ então pelo corolário anterior existe $g'(x)$ em $x = 0$, e $g'(0) = 1$.

Aplicação ao cálculo dos limites nas indeterminações $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

O cálculo de limites por vezes não é simples. Utilizando derivação há um resultado, que em certas condições, nos facilita muito esse cálculo:

Proposição (Regra de Cauchy): *Sejam f e g duas funções definidas em* $]a,b[$ *e* $c \in [a,b]$*, tal que:*

- *f e g são deriváveis em* $]a,b[\setminus \{c\}$
- $g'(x) \neq 0, \quad x \in]a,b[\setminus \{c\}$
- $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ *ou* $\frac{\infty}{\infty}$
- $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe ou é* ∞ *(*)*

Então

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observação:

A regra de Cauchy também se aplica para limites no infinito, $c = \pm\infty$, e para limites laterais, $c = b^-$ ou $c = a^+$.

Repare que "*(*)*" não se trata da derivada do quociente!!!

Por vezes esta regra é também designada por **regra de L'Hospital** (ou L'Hôpital), mas esta é não é tão geral e só é formulada para aplicar à indeterminação $\frac{0}{0}$.

Exercícios: *Calcule os seguintes limites:*

1. $\lim\limits_{x \to o} \frac{sen(x)}{x}$

resolução: *temos uma indeterminação* $\frac{0}{0}$*, aplicando a regra de Cauchy,*

$$\lim_{x \to o} \frac{sen(x)}{x} = \lim_{x \to o} \frac{cos(x)}{1} = 1.$$

2. $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{ln(x+1)}{x}$

<u>resolução</u>: *temos uma indeterminação* $\dfrac{0}{0}$*, aplicando a regra de Cauchy,*

$$\lim_{x \to o} \frac{ln(x+1)}{x} = \lim_{x \to o} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1.$$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n}$ $\quad n \in IN$

<u>resolução</u>: *temos uma indeterminação* $\dfrac{\infty}{\infty}$*, aplicando a regra de Cauchy (n vezes),* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \ldots = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{n!} = +\infty$.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

<u>resolução</u>: *temos uma indeterminação* $\dfrac{0}{0}$*, aplicando a regra de Cauchy,*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x)}{x}$

<u>resolução</u>: *temos uma indeterminação* $\dfrac{\infty}{\infty}$*, aplicando a regra de Cauchy,*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x)}{2x+1}$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{sen^2(x)}$ *(é necessário aplicar a Regra de Cauchy duas vezes)*

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - sen(x)}{e^x - e^{sen(x)}}$ *(é necessário aplicar a Regra de Cauchy duas vezes)*

<u>Obs:</u>

Quando temos indeterminações da forma $\infty.0$ ou $\infty-\infty$ por vezes, podemos transformá-las em indeterminações da forma $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$ para podermos aplicar a regra de Cauchy, como podemos ver nos exemplos seguintes:

9. $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x^2}$

<u>resolução</u>: temos uma indeterminação $\infty.0$, **não podemos aplicar a regra de Cauchy directamente**, mas como $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{x^2}}$ ficamos com uma indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$ e agora podemos aplicar a regra de Cauchy $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{-\infty} = 0$.

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x - ln(3e^x - 1)\right]$

<u>resolução</u>: temos uma indeterminação $\infty-\infty$, **não podemos aplicar a regra de Cauchy directamente**, mas como

$$\lim_{x\to+\infty} \left[x - ln(3e^x - 1)\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[ln\, e^x - ln(3e^x - 1)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} ln\left[\frac{e^x}{3e^x - 1}\right]$$

$$= ln\left[\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3e^x - 1}\right] \quad \textit{pois } ln(x) \textit{ é contínua}$$

ficámos com uma indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$ e agora podemos aplicar a regra de Cauchy ....

Outras indeterminações:

No cálculo de limites da forma $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ por vezes somos conduzidos às seguintes indeterminações:

$$1^{\infty} \qquad\qquad 0^{0} \qquad\qquad \infty^{0}$$

Estas indeterminações levantam-se recorrendo à seguinte igualdade:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x) \ln f(x)}$$

onde $f(x) > 0, \quad \forall x \in D_f$ e $a \in IR \cup \{-\infty, +\infty\}$

Prova:

Se existe e é positivo, $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ *então*

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = A \quad \Leftrightarrow \quad e^{\ln\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}\right]} = A \qquad (\text{ pois } e^{\ln(x)} = x)$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\lim\limits_{x\to a} \ln\left[f(x)^{g(x)}\right]} = A \qquad (\text{ pois } \ln(x) \text{ é contínua})$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\lim\limits_{x\to a} g(x).\ln f(x)} = A \qquad (\text{ propriedades da função } \ln)$$

Nota:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} = e^{k} \qquad k \in IR$$

Exercícios:

Calcule os seguintes limites:

11. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

resolução: temos uma ***indeterminação*** 0^0*, fazendo* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}[x \ln(x)]}$ *temos uma indeterminação* $0.\infty$*, fazendo* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln(x)}{1/x}\right]}$ *temos uma indeterminação* $\frac{\infty}{\infty}$ *e podemos aplicar a regra de Cauchy:*

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln(x)}{1/x}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1/x}{-1/x^2}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{-x^2}{x}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)} = e^{0} = 1.$$