Capítulo V

Derivação

5.1 Noção de derivada. Interpretação geométrica de derivada.

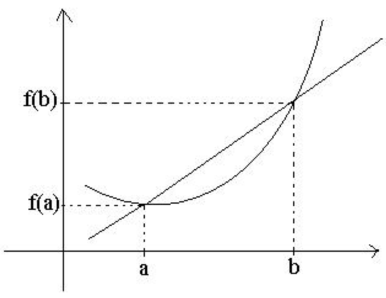
Seja f uma função real de variável real.

Definição:

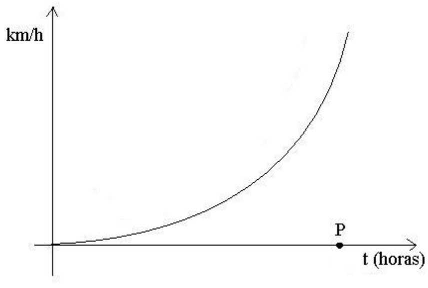
Chama-se **taxa de variação média** *de uma função f entre os pontos a e b ao quociente:*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Geometricamente, a taxa de variação média de uma função f entre os pontos a e b, é o declive da recta definida por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.



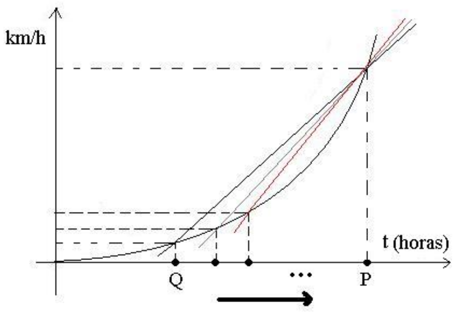
Suponhamos que um automóvel se desloca ao longo de um determinado trajecto e que se pretende saber a velocidade instantânea num instante P.



<u>Ideia:</u>

Considerar um instante Q diferente de P.

À medida que o ponto Q se aproxima de P, a taxa de variação média torna-se cada vez mais próximo da velocidade instantânea no instante P.



Obs.:

Neste caso particular, a taxa de variação média dá-nos a velocidade média (v_m) do veículo entre os instantes Q e P:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{espaço percorrido}}{\text{tempo gasto}}$$

Notas:

- *Recorrendo à definição de limite é possível definir o conceito de velocidade instantânea, (v_i), rigorosamente:*

$$v_i = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

- *A velocidade instantânea no instante P é representada pelo declive da recta tangente em P.*

Definição:

Seja $a \in D_f$ e f definida numa vizinhança do ponto $x = a$.

O limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (1)$$

quando existe (e é finito) designa-se por ***derivada de*** f ***em*** $x = a$ *e representa-se por* $f'(a)$.

Definição:

A função f *diz-se* ***derivável*** *ou* ***diferenciável em*** $x = a$ *se existir e for finito o limite em* (1).

<u>***Exemplo:***</u>

Calcule a partir da definição, a derivada da função $f(x) = x^2$.

<u>Resolução:</u>

Seja $a \in D_f = IR$. Note-se que f está sempre definida numa vizinhança de qualquer ponto do domínio e portanto faz sentido calcular $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Assim, tem-se que:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a) = 2a$$

Logo $f'(x) = 2x \quad \forall x \in D_f$.

Definição:

Uma função f *diz-se* ***derivável*** *ou* ***diferenciável*** *se for diferenciável em todos os pontos do seu domínio.*

<u>**Exemplo:**</u>

Considere a função definida por $f(x) = \frac{1}{x+5}$. Mostre que f é diferenciável.

<u>Resolução:</u>

Para mostrar que f é diferenciável temos que provar que f é diferenciável em qualquer ponto do $D_f = IR \setminus \{-5\}$.

Consideremos um ponto $a \in D_f$. A função f está sempre definida à direita e a esquerda de qualquer ponto do domínio, pelo que faz sentido determinar $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x+5}-\frac{1}{a+5}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-1}{(x+5)(a+5)}=-\frac{1}{(a+5)^2}$$

Como $f'(a)$ existe e é finita para qualquer $a\in D_f=IR\setminus\{-5\}$, concluímos que f é diferenciável.

Definição:

Seja f uma função diferenciável em $x=a$ com derivada $f'(a)$. A ***equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto*** *$(a, f(a))$ é:*

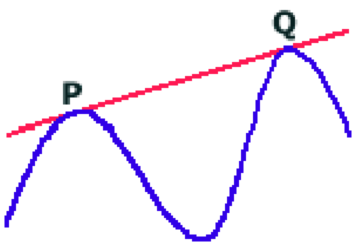
$$y-f(a)=f'(a)(x-a).$$

Obs.:

- *Se $f'(a)=0$ então a recta tangente ao gráfico de f é uma recta horizontal.*

- *Não existem funções diferenciáveis cuja recta tangente seja vertical (porquê?! – a razão é óbvia porque o declive das rectas verticais é ∞ e uma função diferenciável tem derivada finita em cada ponto do seu domínio.)*

- *A recta tangente ao gráfico de uma função num ponto pode intersectar o gráfico dessa função mais que uma vez. Pode até acontecer coincidir com a recta tangente noutro ponto como é ilustrado na figura abaixo: a recta tangente em P coincide com a recta tangente em Q.*



5.2 Derivadas laterais. Interpretação geométrica das derivadas laterais.

Como a derivada de uma função f num ponto $x = a$ é um caso particular de um limite, então também faz sentido calcular derivadas laterais:

$$f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

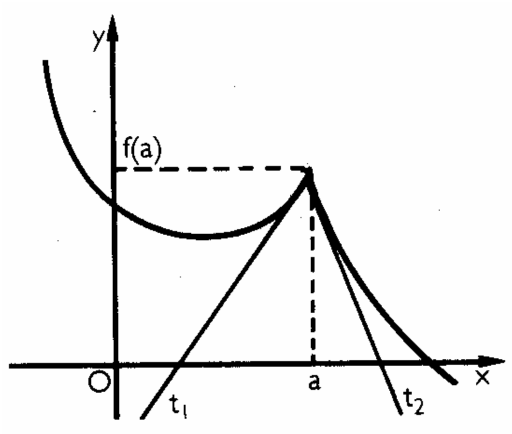
$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

quando tais limites existem, eles são, denominados respectivamente, por ***derivada lateral de*** f ***à esquerda de*** $x = a$ e ***derivada lateral de*** f ***à direita de*** $x = a$.

Notas:

- *Se as derivadas laterais em $x = a$ são iguais então existe derivada em $x = a$ e tem-se que $f'(a^-) = f'(a) = f'(a^+)$*
- *Se as derivadas laterais em $x = a$ são distintas então não existe derivada em $x = a$.*

Interpretação geométrica das derivadas laterais:



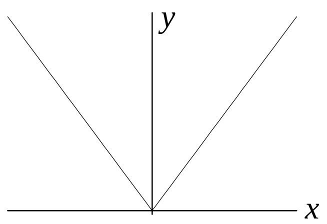
- A derivada à esquerda no ponto $x = a$ identifica-se com o declive da semi-tangente à esquerda de f no ponto $x = a$, (t_1)

- A derivada à direita no ponto $x = a$ identifica-se com o declive da semi-tangente à direita de f no ponto $x = a$, (t_2)
- Uma função tem derivada num ponto se as semi-tangentes nesse ponto estiveram no prolongamento uma da outra, isto é, formarem uma recta.
- Na figura acima as semi-tangentes (t_1) e (t_2) não estão contidas numa mesma recta pelo que não existe derivada no ponto $x = a$.

Exemplo importante:

A função $f(x) = |x|$ não é diferenciável em $x = 0$.

O gráfico de $f(x) = |x|$ é:



De facto, tem-se que:

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$(|x| = -x \text{ para } x < 0)$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$(|x| = x \text{ para } x > 0)$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, não existe $f'(0)$. Logo a função f *não é diferenciável* (pois existe pelo menos um ponto do domínio onde não existe derivada) apesar de ser contínua em todo o seu domínio.

Obs.:

O domínio da derivada de uma função está sempre contido no domínio dessa função, isto é, $D_{f'} \subseteq D_f$.

Por exemplo:

- $f(x) = x^2$ *então* $f'(x) = 2x$ $D_f = D_{f'}$
- $f(x) = |x|$ $D_{f'} = IR \setminus \{0\} \subset IR = D_f$

Nota:

Uma função descontínua não pode ser diferenciável (porquê?!)

No entanto, o recíproco é sempre verdadeiro:

Teorema

Se f é uma função derivável em $x = a$ então f é contínua em $x = a$

(ou equivalentemente, se f é descontínua em $x = a$ então não existe derivada em $x = a$).

Exercício:

Verifique se existe $f'(1)$ onde $f(x) = \begin{cases} ln(x) & se \quad x \geq 1 \\ e^{x-1} & se \quad x < 1 \end{cases}$.

Resolução:

Note que só faz sentido verificar se uma função é derivável num ponto se ela for contínua nesse ponto.

Mas a função f é descontínua em $x = 1$ pois os limites laterais são distintos:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} e^{x-1} = e^0 = 1 \neq 0 = \lim_{x \to 1^+} ln(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

pelo que não existe derivada em $x = 1$.

Obs.:

A função derivada não é necessariamente contínua. Pode eventualmente nem existir como acontece no exemplo seguinte.

A função $f: \ IR \ \to \ IR$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2 sen\left(\dfrac{1}{x}\right) & se \quad x\neq 0 \\ 0 & se \quad x=0 \end{cases}$$

admite derivada em todos os pontos:

$$f'(x)=\begin{cases} 2xsen\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & se \quad x\neq 0 \\ 0 & se \quad x=0 \end{cases}$$

mas como se verifica facilmente não existe $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

<u>Atenção!!!</u>

Para calcular $f'(0)$ *é necessário recorrer à definição de derivada num ponto:* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 sen(1/x)-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0} xsen(1/x)$ *que, pelo teorema do encaixe dos limites (pág. 79), vale* 0.

5.3 Regras de derivação. Propriedades da derivação.

Notação (de Leibniz) para derivadas:

Dado $y=f(x)$ para além da notação f' ou $f'(x)$, usámos $\dfrac{dy}{dx}$ ou $\dfrac{df}{dx}$ ou $\dfrac{d}{dx}f(x)$. Se quisermos especificar o valor num certo ponto a, além de $f'(a)$, usamos $\dfrac{df}{dx}(a)$ ou $\dfrac{df}{dx}|_{x=a}$.

Exemplos:

$\dfrac{d(3x+1)}{dx}=3$; $\quad \dfrac{dx^2}{dx}=2x$; $\quad \dfrac{dx^2}{dx}(3)=2\times 3=6$.

Regras de derivação

Calcular a derivada de uma função ou a função derivada a partir da sua definição pode ser bastante trabalhoso. Por essa razão, partindo da definição de derivada podemos deduzir várias regras de derivação que adiante indicaremos.

Teorema:

Sejam f *e* g *duas funções deriváveis, então*

- $f+g$ *é derivável e tem-se* $(f+g)' = f' + g'$
- fg *é derivável e tem-se* $(fg)' = f'g + fg'$
- cf *é derivável e tem-se* $(cf)' = cf'$, $c \in IR$
- *se* $g(x) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ *é derivável e tem-se* $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Derivadas de funções elementares:

1. função constante $c \in IR$	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
2. função linear $c \in IR$	$f(x) = cx$	$f'(x) = c$
3. potência:	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
4. função exponencial $a > 0$:	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln(a)$
5. função sen	$f(x) = sen(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
6. função $\cos$	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -sen(x)$
7. função tg	$f(x) = tg(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$
8. função $cotg$	$f(x) = cotg(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{sen^2(x)} = -\cos ec^2(x)$

Exercício:

Calcular as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = (x)^{1/n}$, $n \in IN$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

e) $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \in IN$

5.4 Derivada da função composta (ou Regra da cadeia).

Teorema (Derivada da função composta ou Regra da Cadeia):

Sejam f *e* g ***funções deriváveis*** *nos respectivos domínios e seja* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *então*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Na notação de Leibniz, se $u = g(x)$ *então* $f(g(x)) = f(u)$*, e temos*

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}.\frac{du}{dx}.$$

<u>Exercícios:</u>

Calcule a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = e^{x^2}$

b) $f(x) = 3^{x^2}$

c) $f(x) = \ln x^3$

d) $f(x) = \log x^3$

e) $f(x) = x^x$

f) $f(x) = sen(5x^2)$

g) $f(x) = tg(e^{x^2})$

<u>Resolução e)</u>

Podemos ver f como $x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\ln x}$. Assim,

$$\left(e^{x\ln x}\right)' = (x\ln x)'e^{x\ln x} = [(x)'\ln x + x(\ln x)']e^{x\ln x} = \left[\ln x + \frac{x}{x}\right]e^{x\ln x}$$
$$= (\ln x + 1)e^{x\ln x} = x^x(\ln x + 1)$$

De forma análoga, podemos deduzir a derivada de uma função da forma u^v, onde u e v são funções que dependem de uma variável, por exemplo x:

$$\left(u^v\right)' = \underbrace{v'.u^v.\ln u}_{\text{como exponencial}} + \underbrace{v.u^{v-1}.u'}_{\text{como polinomial}}$$