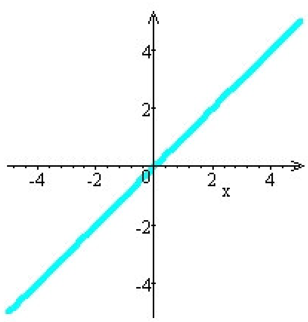
Capítulo IV

Funções Contínuas

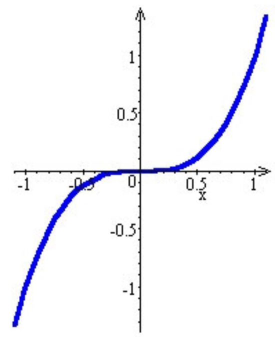
4.1 Noção de Continuidade

Uma ideia muito básica de função contínua é a de que o seu gráfico pode ser traçado ***sem levantar o lápis do papel***; se houver necessidade de interromper o traço do gráfico para o continuar noutro local então é porque ocorre uma “descontinuidade”.

De acordo com esta ideia, observando as figuras seguintes, vemos que f e g são contínuas,

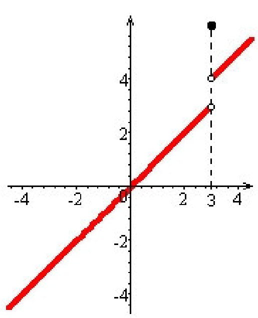


$f(x) = x$

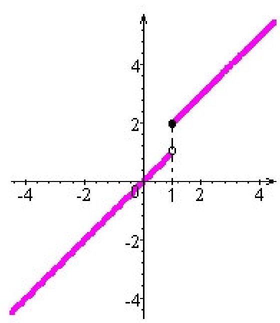


$g(x) = x^3$

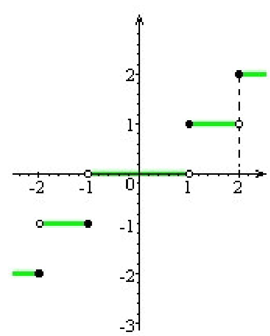
enquanto que as funções h, j e k são descontínuas (respectivamente em $x=1$; $x=3$ e $x \in Z \setminus \{0\}$)



$$j(x) = \begin{cases} x & se \quad x < 3 \\ 6 & se \quad x = 3 \\ x+1 & se \quad x > 3 \end{cases}$$

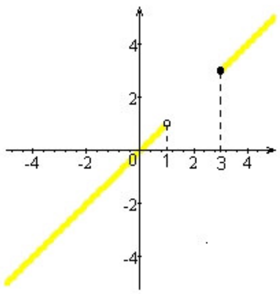


$$h(x) = \begin{cases} x & se \quad x < 1 \\ x+1 & se \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

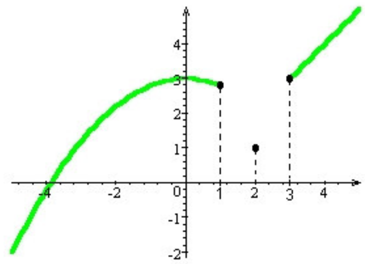


$k(x) = Trunc(x)$

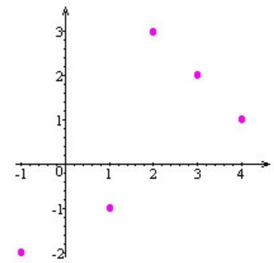
E quanto às funções m, n e l?



$$l(x) = \begin{cases} x & se \quad x < 1 \\ x & se \quad x \geqslant 3 \end{cases}$$



$$m(x) = \begin{cases} -\frac{1}{5}x^2 + 3 & se \quad x \leqslant 1 \\ 1 & se \quad x = 2 \\ x & se \quad x \geqslant 3 \end{cases}$$



$$n(x) = \begin{cases} -2 & se \quad x = -1 \\ -1 & se \quad x = 1 \\ 3 & se \quad x = 2 \\ 2 & se \quad x = 3 \\ 1 & se \quad x = 4 \end{cases}$$

O que acontece nestas três funções é que as possíveis descontinuidades encontram-se nos extremos dos respectivos domínios.

Pergunta: *Serão estas três funções descontínuas?*
Resposta: *Não.*

Como temos "falado", o conceito de continuidade num ponto $x = a$ está relacionado com o comportamento da função numa vizinhança de $f(a)$ e em $f(a)$. Isto recorda-nos o conceito de limite, assim:

Definição:

1) *Se $a \in D_f$ e f está definida numa vizinhança de $x = a$, diz-se que f **é contínua em** $x = a$ quando e só quando*

- *existe* $\lim_{x \to a} f(x)$ *e*
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

2) *Se $a \in D_f$ e f não está definida numa vizinhança de $x = a$ (isto é, a é um ponto isolado) então f é contínua em $x = a$.*

3) *Se $a \in D_f$ e f está definida numa vizinhança de $x = a$, diz-se que f **é descontínua em** $x = a$ se*

- *não existe* $\lim_{x \to a} f(x)$ *(isto é, os limites laterais são diferentes, ou são infinitos, ou simplesmente não existem) ou*
- $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

4) *Diz-se que* f *é uma* ***função contínua*** *se é contínua para todo ponto* $a \in D_f$.

A definição formal de continuidade é a seguinte:

Seja $f : D_f \subset IR \to IR$ *e* $a \in D_f$.

Diz-se que f *é uma* ***função contínua no ponto*** a, *se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Isto quer dizer que:

f *é uma* ***função contínua no ponto*** a se

– **para qualquer** intervalo centrado em $f(a)$ do tipo $]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$ (relativamente às ordenadas),

– existe pelo menos um intervalo da forma $]a - \delta, a + \delta[$, onde a imagem de qualquer ponto pertence ao intervalo $]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$.

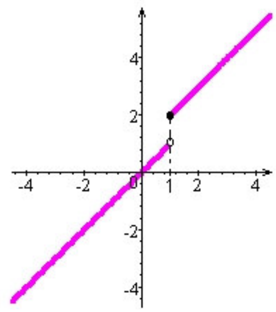
Compare esta definição com a de limite. Estas definições são parecidas, o que altera é que em vez de L temos $f(a)$, e em vez de $]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}$ temos $]a - \delta, a + \delta[$.

Definição:

Se $a \in D_f$, f *diz-se* ***contínua à direita de*** $x = a$ *se* $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Se $a \in D_f$, f *diz-se* ***contínua à esquerda de*** $x = a$ *se* $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

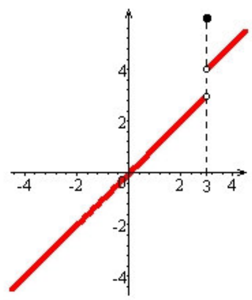
Exemplos:



$$h(x)=\begin{cases} x & , x<1 \\ x+1 & , x\geq 1 \end{cases}$$

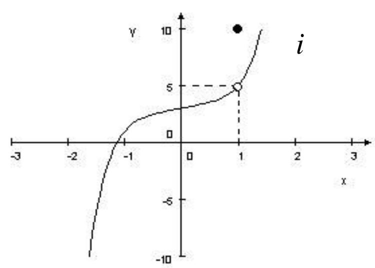
h não é contínua em $x=1$ porque $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)=1\neq 2=\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$.

(Pode dizer-se que é contínua à direita em $x=1$).

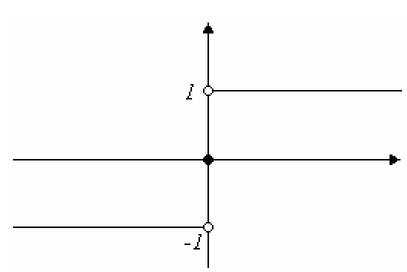


$$j(x)=\begin{cases} x & , x<3 \\ 6 & , x=3 \\ x+1 & , x>3 \end{cases}$$

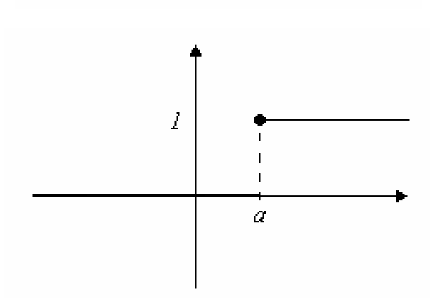
j não é contínua em $x=3$ pois $\lim\limits_{x\to 3^-} j(x)=3\neq 4=\lim\limits_{x\to 3^+} j(x)$ (j não é continua à esquerda nem à direita de $x=3$)



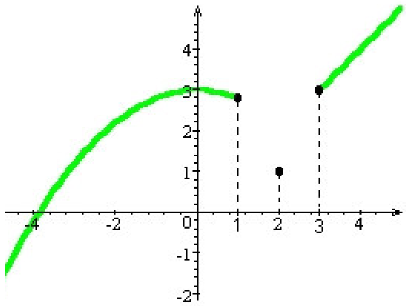
i não é contínua em $x=1$ pois $\lim\limits_{x\to 1} i(x)=5\neq 10=i(1)$



A **função Sinal** definida por $Sng(x)=\begin{cases} 1 & , x>0 \\ 0 & , x=0 \\ -1 & , x<0 \end{cases}$ não é uma função contínua em $x=0$ pois $\lim\limits_{x\to 0^-} Sng(x)=-1\neq 1=\lim\limits_{x\to 0^+} Sng(x)$.

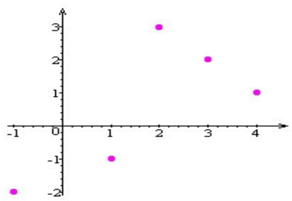


A **função Heaviside** definida por $H(x-a)=\begin{cases} 1 & , x\geq a \\ 0 & , x<a \end{cases}$ não é uma função contínua em $x=a$ pois $\lim\limits_{x\to a^-} H(x-a)=0\neq 1=\lim\limits_{x\to a^+} H(x-a)$, no entanto é continua à direita de $x=a$



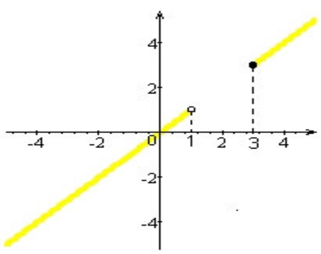
$$m(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2}{3}+3 & , x\le 1\\ 1 & , x=2\\ x & , x\ge 3\end{cases}$$

- m é contínua em $x=1$ e $x=3$ pois $\lim\limits_{x\to 1} m(x)=$ $=\lim\limits_{x\to 1^-} m(x)=m(1)$ e $\lim\limits_{x\to 3} m(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} m(x)=m(3)$;
- m é contínua em $x=2$ pois é um ponto isolado.



$$n(x)=\begin{cases}-2 & se \quad x=-1\\ -1 & se \quad x=1\\ 3 & se \quad x=2\\ 2 & se \quad x=3\\ 1 & se \quad x=4\end{cases}$$

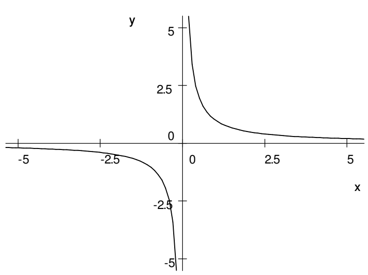
$$n(x)=\begin{cases}-2 & , x=-1\\ -1 & , x=1\\ 3 & , x=2\\ 2 & , x=3\\ 1 & , x=4\end{cases}$$ é contínua pois todos os pontos do seu domínio $D_n=\{-1,1,2,3,4\}$ são pontos isolados.



$$l(x)=\begin{cases}x & se \quad x<1\\ x & se \quad x\geqslant 3\end{cases}$$

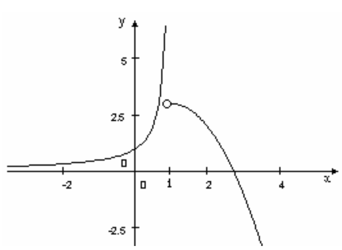
$$l(x)=\begin{cases}x & , x<1\\ x & , x\ge 3\end{cases}$$

- não tem sentido analisar a continuidade de l em $x=1$ pois $1\notin D_l$
- l é contínua em $x=3$ pois $\lim\limits_{x\to 3} l(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} l(x)=3=$ $=l(3)$.



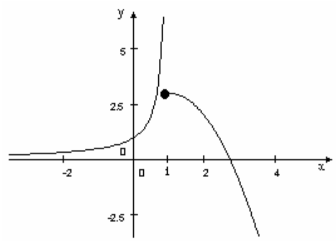
A função $f(x)=\dfrac{1}{x}$ é contínua (em todo o seu domínio).

O ponto onde poderia surgir dúvida era $x=0$ mas $x=0\notin D_f$.



A função $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & x<1\\ 3-(x-1)^2 & x>1\end{cases}$ é contínua (em todo o seu domínio).

Onde poderia haver dúvidas era em $x=1$ mas $1\notin D_f$.



A função $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & x<1\\ 3-(x-1)^2 & x\geq 1\end{cases}$ não é contínua (em $x=1$), porque $1\in D_f$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1-x}=+\infty$.

Nota:

Ao contrário da definição de limite, só tem sentido falar em continuidade de uma função f em $x=a$ se $a\in D_f$, e interessa o que se passa numa na vizinhança do ponto a (incluindo a) e também a imagem do ponto a.

4.2 Propriedades das funções contínuas

Teorema:

1. *Sejam f e g duas funções contínuas em a. Então as funções $f\pm g$; cf ($c\in IR$); fg; $\dfrac{f}{g}$ ($g(a)\neq 0$) também são funções contínuas em a.*
2. *Se g é continua em a e f é contínua em $g(a)$, então $f\circ g$ é contínua em a.*
3. *Se $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ e se f é contínua em b então*

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

(Exemplos: $\lim\limits_{x\to a} e^{f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ e $\lim\limits_{x\to a} sen(f(x))=sen\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$)

Proposição:

As funções polinomiais, racionais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas directas e trigonométricas inversas <u>são funções contínuas</u>.

Exercício:

Mostre que a função f definida por $f(x)=\begin{cases} arcsen\left(\dfrac{x}{2}\right) & se\ \ -2\leq x\leq 0 \\ \dfrac{x^2+1}{\ln x} & se\ \ x>0 \end{cases}$ é contínua.

Resolução:

O domínio de f é $[-2,+\infty[\setminus\{1\}$ $(verifique)$!

- Se $x\in[-2,0[$ a função é definida por $arcsen\left(\dfrac{x}{2}\right)$, esta é uma função contínua **pois** é composta da função inversa trigonométrica $arcsen(x)$ com a função polinomial $\dfrac{x}{2}$, ambas funções contínuas.
- Se $x\in\,]0,+\infty[\setminus\{1\}$ a função é definida por $\dfrac{x^2+1}{\ln(x)}$, esta é uma função contínua **pois** é quociente da função polinomial x^2+1 com a função logaritmo $\ln(x)$ que pela proposição anterior sabemos tratar-se de funções contínuas.

- Falta analisar a continuidade em $x=0$:
  - $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} arcsen\left(\dfrac{x}{2}\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+1}{\ln(x)}=\dfrac{0}{-\infty}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$ existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$;
  - $f(0)=arcsen(0)=0$

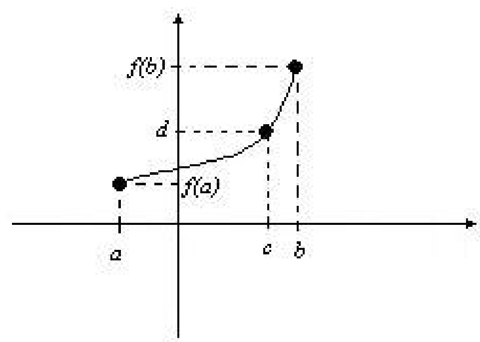
  Logo f é contínua em $x=0$ pois verifica-se $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

4.3 Teoremas fundamentais sobre continuidade

Teorema dos valores intermédios ou de Bolzano:

Seja f uma função <u>contínua</u> no <u>intervalo fechado</u> $[a,b]$.

Se d está entre $f(a)$ e $f(b)$ então existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = d$.



Note que a condição de continuidade é fulcral neste resultado pois caso não se verifique a conclusão do teorema pode não ser válida.

<u>Exemplo:</u>

Seja f definida no intervalo fechado $[0,2]$ tal que $f(x) = \begin{cases} x & se \quad 0 \le x < 1 \\ 2 & se \quad x = 1 \\ x+2 & se \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$

Não existe nenhum elemento $c \in [0,2]$ tal que $f(c) = \frac{3}{2}$.

O intervalo onde esta função está definida é fechado mas a função <u>não é contínua</u> no ponto $x = 1$.

Este teorema tem particular interesse na obtenção de zeros (raízes) de funções reais.

Corolário:

Seja f uma função <u>contínua</u> no <u>intervalo fechado</u> $[a,b]$.

*Se $f(a).f(b) < 0$ então existe **pelo menos** um zero no intervalo $[a,b]$, isto é,* $\exists \quad c \in [a,b] \quad : \quad f(c) = 0$

Exercício 1:

Mostre que a função $f(x)=x^4-3x^3+5$ *tem pelo menos um zero intervalo* $]-1,2[$.

Resolução:

Como f *é uma função polinomial é contínua em* IR, *e em particular é contínua no intervalo fechado* $[-1,2]$.

Além disso, $f(-1)=9$ *e* $f(2)=-3$.

Como $f(-1).f(2)<0$, *o corolário afirma que existe pelo menos um zero no intervalo* $[-1,2]$.

Como $f(-1)\neq 0$ *e* $f(2)\neq 0$, *podemos garantir a existência de um zero da função* f *no intervalo aberto* $]-1,2[$.

Exercício 2:

Mostre, utilizando o teorema de Bolzano (ou o seu corolário) que a equação

$$x^3-3x^2+2x+1=0$$

tem pelo menos uma raiz real.

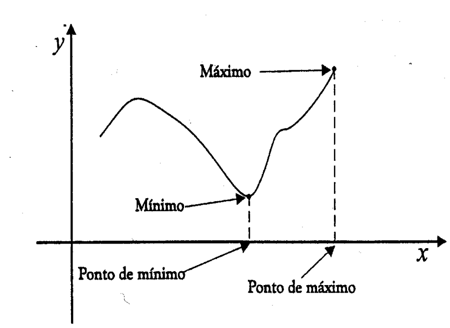
Resolução:

Defina-se $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ no intervalo fechado $[-1,0]$.

f é uma função polinomial logo é contínua em IR e em particular no subconjunto $[-1,0]$.

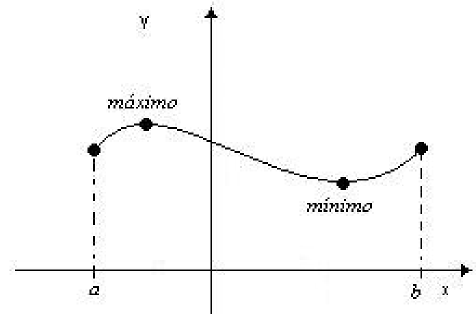
Como $f(-1)\cdot f(0)=-5\times 1<0$ o corolário anterior afirma que existe pelo menos um $c\in[-1,0]$: $f(c)=0$, ou seja, a equação $x^3-3x^2+2x+1=0$, no intervalo $[-1,0]$ tem pelo menos a solução $x=c$, ficando desde já provada a existência de pelo menos uma raiz real.

Como foi definido atrás, seja $f: \ D \ \rightarrow \ IR$ e $c\in D_f$, diz-se que $f(c)$ é um máximo de f se $f(x)\leq f(c) \quad \forall\, x\in D$, e, diz-se que $f(c)$ é um mínimo de f se $f(c)\leq f(x) \quad \forall\, x\in D$.



Teorema de Weierstrass:

Se f é uma função <u>contínua</u> no <u>intervalo fechado</u> $[a,b]$ então f atinge o valor máximo e o valor mínimo.



É claro que se f é uma função constante, $f(x)=c$ definida no intervalo $[a,b]$ então é óbvio que a constante c é o valor máximo e mínimo de f.

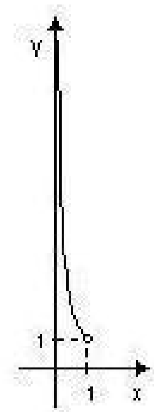
<u>Observação:</u>

Se alguma das condições do teorema falhar a conclusão do teorema poderá não se verificar.

<u>Exemplos:</u>

1. *Seja $f(x)=\dfrac{1}{x}$ definida no intervalo aberto $]0,1[$.*

   Esta função não tem máximo nem mínimo. Repare que não se pode aplicar o teorema de Weierstrass porque o intervalo onde esta função está definida <u>não é fechado</u> (embora f seja contínua pois é quociente de funções polinomiais).



2. *Seja agora f definida no intervalo fechado $[0,1]$ tal que*

$$f(x)=\begin{cases} 1 & se \quad x=0 \\ 2x & se \quad 0<x<1 \\ 1 & se \quad x=1 \end{cases}$$

   A função f não é contínua nos pontos $x=0$ e $x=1$, e portanto não se pode aplicar o teorema de Weierstrass (relembrar que nos pontos extremos do domínio só a continuidade lateral deve ser verificada). É fácil ver que esta função também não tem máximo nem mínimo.