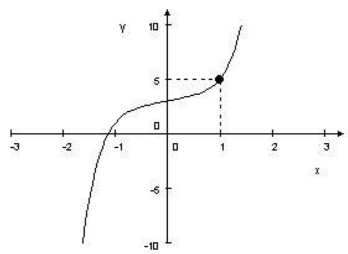
Capítulo III

Limite de Funções

3.1 Noção de Limite

Dada uma função f , o que é que significa $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$?



A ideia intuitiva do que queremos dizer com isto é:

quando x toma valores cada vez mais próximos de 1, a respectiva imagem, $f(x)$, aproxima--se do valor 5.

Definição:

Diz-se que existe e que $L \in IR$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a e escreve-se

$\lim_{x \to a} f(x) = L$

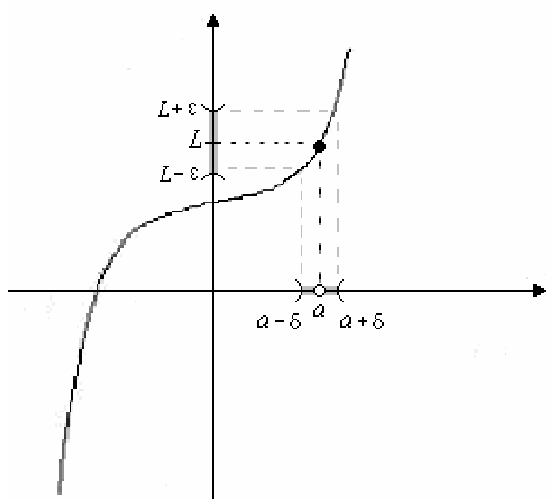
quando e só quando $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

Expliquemos o que quer dizer, em linguagem corrente, a última fórmula.

Diz-se que o $\lim_{x \to a} f(x)$ é L se

– **para qualquer** intervalo centrado em L do tipo $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$ (relativamente às ordenadas),

– existe pelo menos um intervalo da forma $]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\}$, onde a imagem de qualquer ponto pertence ao intervalo $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$.



Obervação.:

- *De acordo com a definição, só tem sentido calcular* $\lim_{x\to a} f(x)$ *se a função está definida* ***num vizinhança de*** a*, isto é, ou imediatamente antes de* a *(se existe* $\delta>0$ *tal que* $]a-\delta, a[\subset D_f$*) ou imediatamente depois de* a *(se existe* $\delta>0$ *tal que* $]a, a+\delta[\subset D_f$*).*

  Por exemplo, não faz sentido calcular $\lim_{x\to -2} ln(x)$ pois $-2\notin D_{ln(x)}=]0,\infty[$, mas tem sentido calcular $\lim_{x\to 0} ln(x)$ pois qualquer valor à direita de 0 pertence $D_{ln(x)}$.

- *De acordo com a definição de limite, para calcular* $\lim_{x\to a} f(x)$ *não interessa o que se passa em* a *(pode até acontecer que* $a\notin D_f$*), o que importa é o que se passa imediatamente antes o depois de a.*

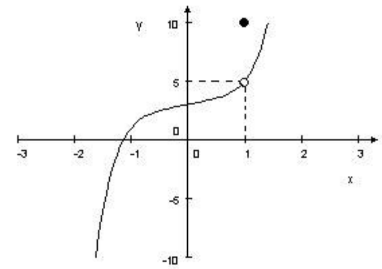
Exemplos:

1)

$$\lim_{x\to 1} f(x)=5$$

e

$$f(1)=10$$

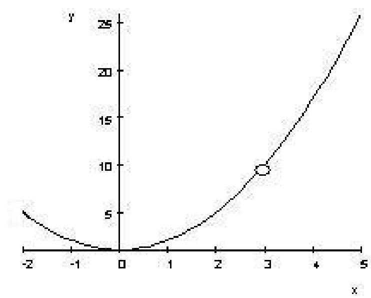


2)

$$\lim_{x\to 3} f(x)=10$$

e

$f(3)$ não existe



3.2 Propriedades dos Limites

Muitas funções do cálculo podem ser obtidas como somas, diferenças, produtos, quocientes e potências de funções simples. Vamos enunciar algumas propriedades, que resultam da própria definição de limite, e podem ser usadas para simplificar o cálculo do limite de funções menos simples.

Teorema (Unicidade de Limite)

Seja f uma função definida numa vizinhança de a.

O limite de f em a, quando existe, é único.

Teorema (Propriedades algébricas dos limites)

Sejam f e g duas funções definidas numa vizinhança de $a\in IR$ tais que $\lim_{x\to a} f(x)=l\in IR$ e $\lim_{x\to a} g(x)=m\in IR$, e seja c uma constante. Então

a) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=l+m$

b) $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=lm$

c) $\lim\limits_{x\to a}(cf)(x)=\lim\limits_{x\to a} c\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)=cl$

d) $\lim\limits_{x\to a}(f)^n(x)=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n=l^n$, $n\in IN$

e) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{l}{m}$, se $m\neq 0$

f) $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)=l\geq 0 \quad se \quad n\ par\right)$

Teorema

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ *e* g *é uma função limitada numa vizinhança de* a *(* $x\neq a$ *), então* $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=0$.

No teorema anterior a condição "g é uma função limitada numa vizinhança de x ($x\neq a$)" quer dizer que existe uma constante C tal que $|g(x)|\leq C$ em todo o ponto x que está numa vizinhança de a e $x\neq a$.

Exemplos:

- $\lim\limits_{x\to 0} x^2 sen\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ porque a função seno é limitada e $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$;
- $\lim\limits_{x\to 0}(-1)^n x^n=0$ porque a função $f(x)=(-1)^n$ é limitada $\left(CD_f=\{-1,1\}\right)$ e $\lim\limits_{x\to 0} x^n=0$.

Teorema (Encaixe de limites)

Sejam f *,* g *e* h *funções tais que* $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ *para todo x numa vizinhança de* a *(* $x\neq a$ *), se* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L=\lim\limits_{x\to a} h(x)$ *então* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$.

Exemplo:

$$\lim_{x \to 0} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) = ?$$

$$-1 \leq sen\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

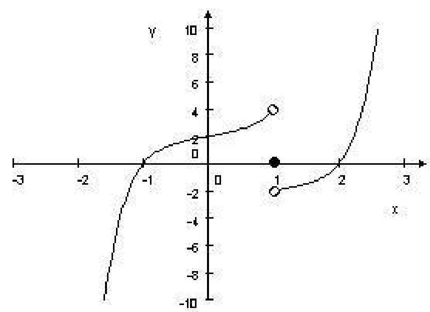
$$-x^2 \leq x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2 \quad \left(\text{como } x^2 \geq 0 \text{ então as desigualdades são preservadas}\right)$$

$$\lim_{x \to 0} \left(-x^2\right) \leq \lim_{x \to 0} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x \to 0} x^2$$

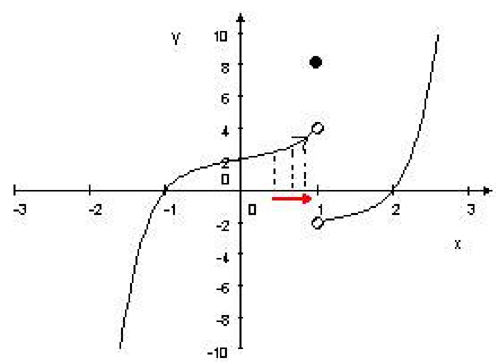
Como $\lim_{x \to 0}\left(-x^2\right) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$, o teorema afirma que $\lim_{x \to 0} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

3.3 Limites Laterais

Seja f a função abaixo representada



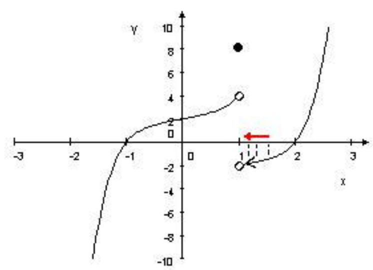
Diz-se que 4 é o **limite à esquerda** de f no ponto 1 e denota-se por $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 4$. Isto significa, que quando x se aproxima de 1 por valores inferiores, a respectiva imagem, $f(x)$, aproxima-se de 4. (ver figura)



Formalmente, diz-se que o $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ se

- **para qualquer** intervalo centrado em L do tipo $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$ (relativamente às ordenadas),
- existe pelo menos um intervalo da forma $]a-\delta, a[$, onde a imagem de qualquer ponto pertence ao intervalo $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$.

Analogamente, diz-se que -2 é o ***limite à direita*** de f no ponto 1 e denota-se por $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -2$. Isto significa, que quando x se aproxima de 1 por valores superiores, a respectiva imagem, $f(x)$, aproxima-se de -2. (ver figura)



Formalmente, diz-se que o $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ se

- **para qualquer** intervalo centrado em L do tipo $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$ (relativamente às ordenadas),
- existe pelo menos um intervalo da forma $]a, a+\delta[$, onde a imagem de qualquer ponto pertence ao intervalo $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$.

Utilizando os conceitos de limite à direita e limite à esquerda, podemos dar uma **nova definição de limite**:

Definição:

Seja f uma função definida numa vizinhança de $x = a$, à direita e à esquerda.

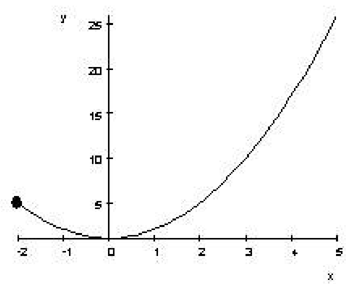
Dado um número real L, diz-se que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ se é só se existem e são iguais os limites laterais, isto é,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \ \textit{quando e só quando} \ \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Observação:

- Se os limites laterais num ponto são diferentes, então não existe limite nesse ponto. Por exemplo, a função anterior não tem limite no ponto 1, pois $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 4 \neq -2 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$.
- No caso em que f é uma função definida num intervalo, por exemplo do tipo $[a,b]$, diz-se que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se, e somente se, $L = \lim_{x\to a^+} f(x)$

  Por exemplo:



$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = 5$$

(notar que neste caso, expressão $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ não faz sentido porque a função não está definida para valores inferiores a -2)

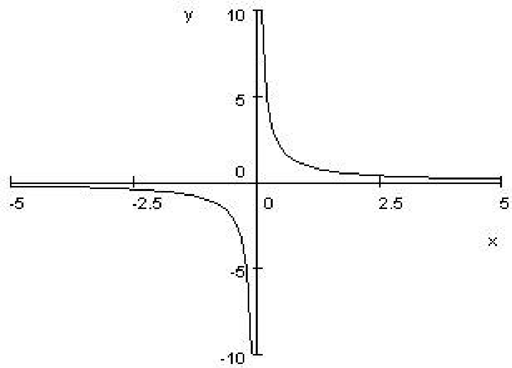
3.4 Limites Infinitos. Limites no infinito. Expressões Indeterminadas

Por vezes quando calculámos o limite de uma função f num ponto a acontece que à medida que nos aproximámos de a as imagens tomam valores muito grandes (em valor absoluto), tão grandes que é impossível quantificá-los com um número $L \in IR$. Para exprimir essa situação utilizámos o símbolo ∞ que se designa por ***infinito***.

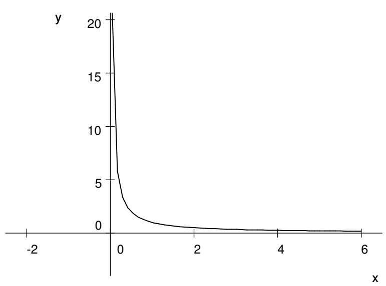
Exemplo:

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{1}{x} \right| = ?$$

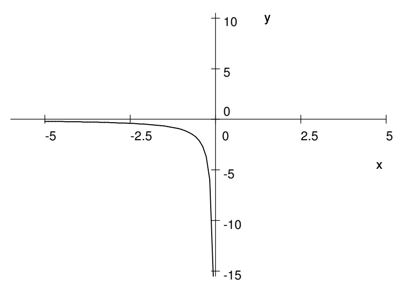
Consideremos o gráfico da função definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$



Verifica-se que:



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$



$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Podemos, então, escrever $\lim\limits_{x \to 0} \left| \dfrac{1}{x} \right| = \infty$

Formalmente, temos que

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ quando e só quando

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad tal\ \ que \quad \forall x \in \left]a - \delta, a + \delta\right[\setminus \{a\} \quad \Rightarrow \quad |f(x)| > M$$

De forma análoga define-se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Observação:

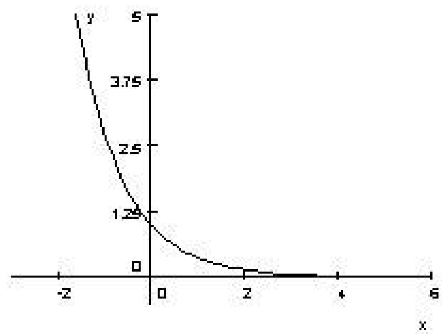
- *Se* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ *então* f *não é limitada.*
- *Se* $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq \infty$ *então numa vizinhança de* $x = a$ *a função é limitada, no entanto, globalmente nada se pode concluir.*

Limites no infinito

Por vezes, quando o domínio de uma função é ilimitado, importa saber o que acontece às imagens quando nos aproximámos dos extremos do domínio.

Exemplo:

Seja $f(x) = e^{-x}$ *cuja representação gráfica é:*



Quando x *toma valores muito grandes,* f *toma valores cada vez mais próximos de* 0.
Simbolicamente esta situação traduz-se por $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Formalmente, dado $L \in IR$, temos que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \text{ quando e só quando}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad tal\ que \quad para\ todo\ x > M \quad \Rightarrow \quad f(x) \in \left]L - \varepsilon, L + \varepsilon\right[$$

De modo análogo, define-se $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

Por outro lado, quando x toma valores "muito grandes negativos", f toma valores cada vez maiores. Exprime-se esta situação por $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

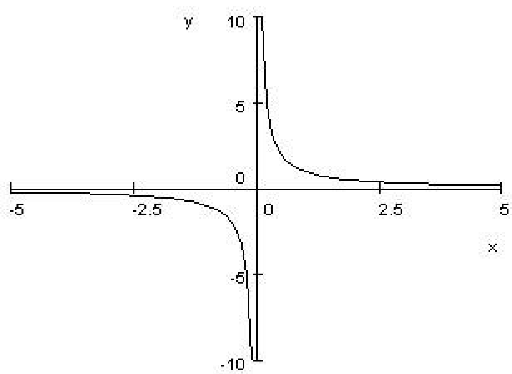
Formalmente temos que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ quando e só quando

$$\forall M > 0 \quad \exists N > 0 \quad tal\ que \quad para\ todo \quad x < -N \quad \Rightarrow \quad f(x) > M \ .$$

De modo semelhante define-se $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exemplo:

Seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *cuja representação gráfica é:*



Quando x *toma valores muito grandes ou "muito grandes negativos",* f *toma valores cada vez mais próximos de* 0.

Simbolicamente esta situação traduz-se por $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Observação geral:

Todas as propriedades estudadas para o cálculo de limites no sub-capítulo 3.2, são válidas para limites laterais $\left(a^- \ \mathbf{e} \ a^+\right)$, *limites no infinito* $(a = \infty)$ *e ainda para limites infinitos.*

Expressões indeterminadas

Resulta das propriedades da aritmética dos limites que o limite de um polinómio ou de uma função racional, quando x tende para a, pode ser calculado substituindo x por a.

Exemplos:

- $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+3\right)=\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)^2+\lim\limits_{x\to 2} 3=2^2+3=7$
- $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3}{2x^3+x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2+3\right)}{\lim\limits_{x\to -1}\left(2x^3+x\right)}=\ldots=\dfrac{(-1)^2+3}{2(-1)^3+(-1)}=\dfrac{4}{-3}=-\dfrac{4}{3}$

Contudo, aplicando directamente as propriedades da aritmética dos limites podemos ser conduzidos aos símbolos $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0\times\infty$, que se chamam ***símbolos de indeterminação***, e quando tal acontece nada se pode concluir sem um estudo mais aprofundado do limite em causa.

Exemplos:

1. **Indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x}{2x^5+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2x^5\left(1+\frac{1}{2x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2x^5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0$$

Mais geralmente:

Sejam $p(x)$ e $q(x)$ dois polinómios. Se $a_n x^n$ é o monómio de maior grau de $p(x)$ e $b_m x^m$ é o monómio de maior grau de $q(x)$ temos que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}=\begin{cases}+\infty & se \quad n>m\\ \dfrac{a_n}{b_m} & se \quad n=m\\ 0 & se \quad n<m\end{cases}$$

Observação:

Note que o que caracteriza uma indeterminação é precisamente o facto de perante o mesmo símbolo (neste caso $\frac{\infty}{\infty}$) sermos conduzidos a resultados distintos como se vê em cima.

2. **Indeterminação** $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-(x+1)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}=0$$

3. **Indeterminação** $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x^2+4x-2}{x^2-3x+2}=?$$

Aplicando directamente as regra para o quociente de limites somos conduzidos a $\frac{0}{0}$ o que mostra que 1 anula o numerador e o denominador. Então o numerador e o denominador são divisíveis por $x-1$. Aplicando a regra de Ruffini, temos que:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x^2+4x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^2-2x+2\right)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+2}{x-2}=\frac{1}{-1}=-1$$

4. **Indeterminação** $0\times\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\left(x^3+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot x=\lim\limits_{x\to-\infty}1=1$

Segue-se uma tabela com a álgebra dos limites.

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\lim\left(f(x)+g(x)\right) = \pm\infty \pm\infty = \pm\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$\lim\left(f(x)+g(x)\right) = +\infty - (+\infty) = \mathbf{?}$ **indeterminação**
$+\infty$	k	$\lim\left(f(x)+g(x)\right) = +\infty + k = +\infty$
$-\infty$	k	$\lim\left(f(x)+g(x)\right) = -\infty + k = -\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$\lim\left(f(x).g(x)\right) = (+\infty)\,.\,(+\infty) = +\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$\lim\left(f(x).g(x)\right) = (+\infty)\,.\,(-\infty) = -\infty$
$+\infty$	$k>0$	$\lim\left(f(x).g(x)\right) = +\infty\ .\ k = +\infty$
$+\infty$	$k<0$	$\lim\left(f(x).g(x)\right) = -\infty\ .\ k = -\infty$
$\pm\infty$	0	$\lim\left(f(x).g(x)\right) = \pm\infty\ .\ 0 = \mathbf{?}$ **indeterminação**
k	$\pm\infty$	$\lim\left(f(x)/g(x)\right) = k / \pm\infty = 0$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\lim\left(f(x)/g(x)\right) = \pm\infty / \pm\infty = \mathbf{?}$ **indeterminação**
$k>0$	0^+	$\lim\left(f(x)/g(x)\right) = k / 0^+ = +\infty$
$+\infty$	0^+	$\lim\left(f(x)/g(x)\right) = +\infty / 0^+ = +\infty$
$k>0$	0^-	$\lim\left(f(x)/g(x)\right) = k / 0^- = -\infty$
$+\infty$	0^-	$\lim\left(f(x)/g(x)\right) = +\infty / 0^- = -\infty$
0	0	$\lim\left(f(x)/g(x)\right) = 0/0 = \mathbf{?}$ **indeterminação**