Resolução de equações trigonométricas:

Resolução de equações com *senos*

$$\boxed{sen(x) = sen(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + 2k\pi \quad \vee \quad x = (\pi - \alpha) + 2k\pi, \quad k \in \mathrm{Z}}$$

Exercício 1:

Resolva as seguintes equações trigonométricas:

a) $sen(x) = \dfrac{1}{2}$

b) $sen(3x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $sen(3x) = -sen(x)$

<u>Resolução:</u>

a)

$$sen(x) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad sen(x) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, \quad k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in Z$$

b)

$$sen(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad sen(3x) = -sen\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad sen(3x) = sen\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

(porque a função *sen* é ímpar)

$$\Leftrightarrow \quad 3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad 3x = \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi, \quad k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi \quad \vee \quad x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi \quad \vee \quad x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k \in Z$$

c)

$$sen(3x) = -sen(x) \quad \Leftrightarrow \quad sen(3x) = sen(-x)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x = -x + 2k\pi \quad \vee \quad 3x = (\pi + x) + 2k\pi, \quad k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \quad x = k\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \quad x = k\frac{\pi}{2}, \quad k \in Z$$

Resolução de equações com *co-senos*

$$\boxed{\cos(x)=\cos(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm\alpha+2k\pi, \quad k\in \mathbb{Z}}$$

Exercício 2:

Resolva as seguintes equações:

a) $\cos(3x)=\dfrac{1}{2}$

b) $\cos(2x)=-\cos(x)$

c) $\cos(x)=sen(x)$

<u>Resolução</u>:

a)

$$\begin{aligned}
\cos(3x)=\frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(3x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad 3x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi, \qquad k\in \mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow \quad x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}, \qquad k\in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\cos(2x)=-\cos(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(2x)=\cos(\pi+x)\\
&\Leftrightarrow \quad 2x=\pm(\pi+x)+2k\pi, \quad k\in \mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow \quad 2x=\pi+x+2k\pi \quad \vee \quad 2x=-\pi-x+2k\pi, \quad k\in \mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow \quad x=\pi+2k\pi \quad \vee \quad 3x=(2k-1)\pi, \quad k\in \mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow \quad x=\pi+2k\pi \quad \vee \quad x=\frac{2k-1}{3}\pi, \quad k\in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

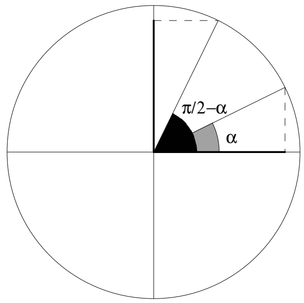
c)

$$\cos(x)=sen(x)$$

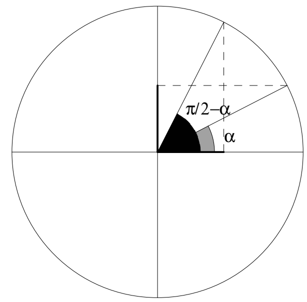
Para resolver esta equação é necessário começar por escrever $sen(x)=\cos(\ldots)$ e seguidamente aplicar a fórmula.

Relações entre *seno* e *co-seno*

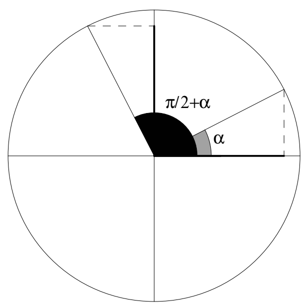
Recorrendo ao círculo trigonométrico, é fácil verificar as seguintes igualdades para um determinado ângulo α:



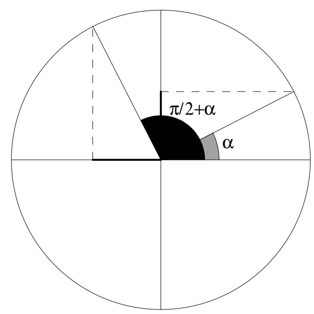
$$\cos(\alpha) = sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$



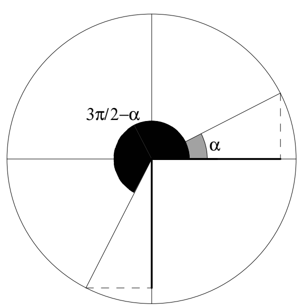
$$sen(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$



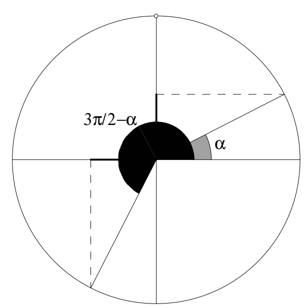
$$\cos(\alpha) = sen\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$



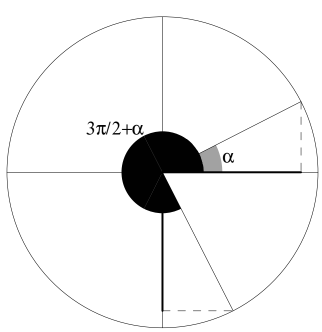
$$sen(\alpha) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$



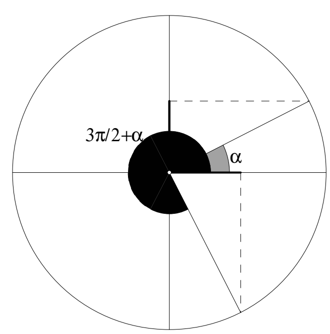
$$\cos(\alpha) = -sen\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$$



$$sen(\alpha) = -\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$$



$$\cos(\alpha) = -sen\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$$



$$sen(\alpha) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$$

Continuação da resolução do exercício 2 *c)*:

$$\cos(x) = sen(x) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \ldots$$

Resolução de equações com *tangentes*

$$\boxed{tg(x) = tg(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathrm{Z}}$$

Exercício 3:

Resolva as seguintes equações:

a) $tg(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $tg(3x) = -tgx$

Resolução:

a)

$$tg(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad tg(x) = tg\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in Z$$

b)

$$tg(3x) = -tgx \quad \Leftrightarrow \quad tg(3x) = tg(-x)$$

(porque a função tg é ímpar)

$$\Leftrightarrow \quad 3x = -x + k\pi, \quad k \in Z$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{k\pi}{4}, \quad k \in Z$$

Resolução de equações com *co-tangentes*

$$\boxed{cotg(x) = cotg(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathrm{Z}}$$

Exercício 4:

Resolva as seguintes equação:

a) $cotg(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $cotg(3x) = -cotg(x)$

c) $cotg(x) = tg(x)$

Resolução

a)

$$cotg(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad cotg(x) = cotg\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in Z$$

b)

$$cotg(3x) = -cotg(x) \quad \Leftrightarrow \quad cotg(3x) = cotg(-x)$$

(porque a função $cotg$ é ímpar)

$$\Leftrightarrow \quad 3x = -x + k\pi, \quad k \in Z$$

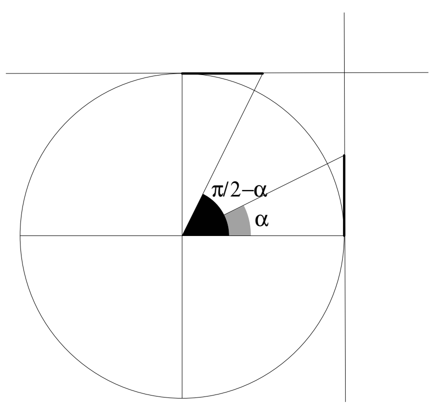
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{k\pi}{4}, \quad k \in Z$$

c) $cotg(x) = tg(x)$

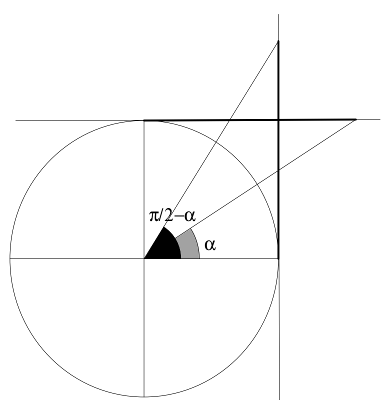
Para resolver esta equação é necessário começar por escrever $tg(x) = cotg(\ldots)$ e seguidamente aplicar a fórmula.

Relação entre *tangente* e *co-tangente*

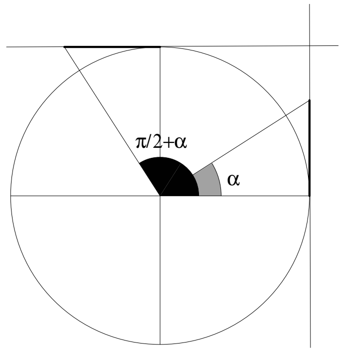
Recorrendo ao círculo trigonométrico é fácil verificar as seguintes igualdades para um determinado ângulo α.



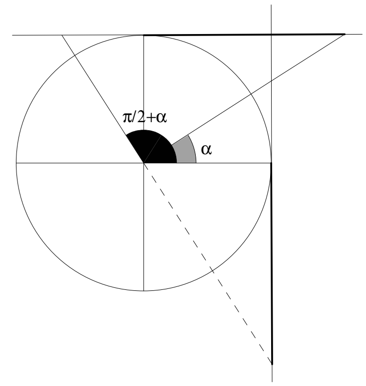
$$\boxed{tg(\alpha) = cotg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$



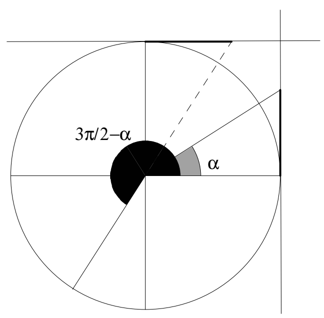
$$\boxed{cotg(\alpha) = tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$



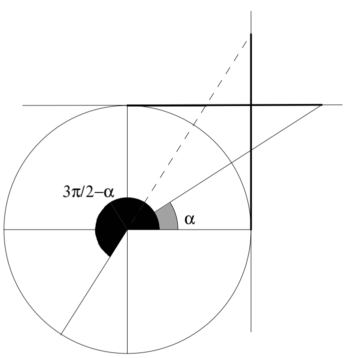
$$tg(\alpha) = -cotg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$



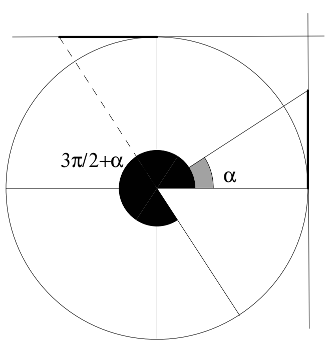
$$cotg(\alpha) = -tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$



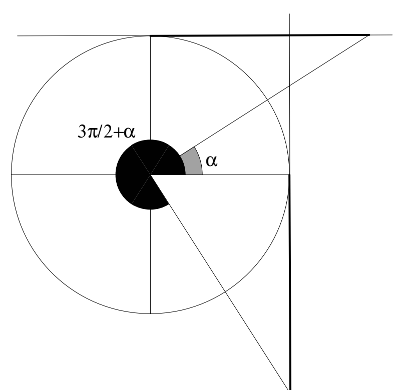
$$tg(\alpha) = cotg\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$$



$$cotg(\alpha) = tg\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$$



$$tg(\alpha) = -cotg\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$$



$$cotg(\alpha) = -tg\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$$

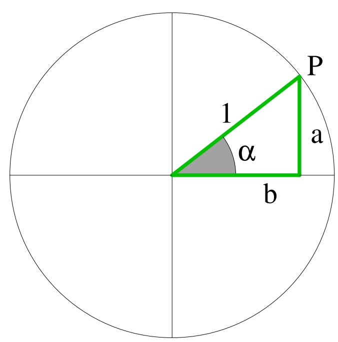
<u>Continuação da resolução do exercício 4 *c)*:</u>

$$cotg(x) = tg(x) \quad \Leftrightarrow \quad cotg(x) = cotg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ldots$$

Identidades trigonométricas:

- $tg(\alpha) = \dfrac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$
- $ctg(\alpha) = \dfrac{cos(\alpha)}{sen(\alpha)} = \dfrac{1}{tg(\alpha)}$
- $sec(\alpha) = \dfrac{1}{cos(\alpha)}$
- $cosec(\alpha) = \dfrac{1}{sen(\alpha)}$
- $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$
- $cos(-\alpha) = cos(\alpha)$
- $tg(-\alpha) = -tg(\alpha)$
- $ctg(-\alpha) = -ctg(\alpha)$

Vamos ver mais algumas identidades trigonométricas, mas em primeiro lugar vamos deduzir a ***fórmula fundamental da trigonometria***. De acordo com a definição de seno e co-seno de um ângulo α, dado um ponto P da circunferência unitária (com raio igual a 1 – ver figura)



temos que $sen(\alpha) = \dfrac{a}{1}$ e $cos(\alpha) = \dfrac{b}{1}$ pelo que as coordenadas do ponto P são $P = (sen(\alpha), cos(\alpha))$. Como P é um ponto da circunferência temos que a distância do ponto P à origem é $d(0,P) = \sqrt{sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha)} = 1$, ou seja, $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$.

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$

Fórmula fundamental da trigonometria

Outras identidades trigonométricas:

- $1 + tg^2(\alpha) = sec^2(\alpha)$
- $1 + ctg^2(\alpha) = cosec^2(\alpha)$

- $sen(a \pm b) = sen(a)cos(b) \pm cos(a)sen(b)$
- $cos(a \pm b) = cos(a)cos(b) \mp sen(a)sen(b)$
- $tg(a \pm b) = \dfrac{tg(a) \pm tg(b)}{1 \mp tg(a)tg(b)}$

- $sen(2a) = 2sen(a)cos(a)$
- $cos(2a) = cos^2(a) - sen^2(a)$
  - $cos(2a) = 1 - 2sen^2(a)$
  - $cos(2a) = 2cos^2(a) - 1$
- $tg(2a) = \dfrac{2tg(a)}{1 - tg^2(a)}$

- $sen^2(a) = \dfrac{1 - cos(2a)}{2}$
- $cos^2(a) = \dfrac{1 + cos(2a)}{2}$

- $sen(a)sen(b) = \dfrac{1}{2}(cos(a-b) - sen(a+b))$
- $sen(a)cos(b) = \dfrac{1}{2}(sen(a+b) + sen(a-b))$
- $cos(a)cos(b) = \dfrac{1}{2}(cos(a+b) + cos(a-b))$