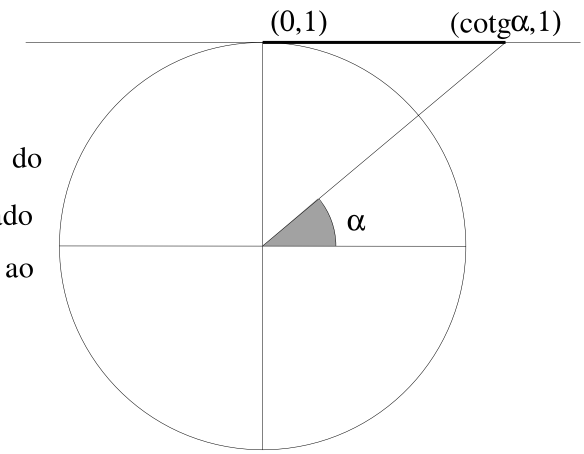
Função co-tangente

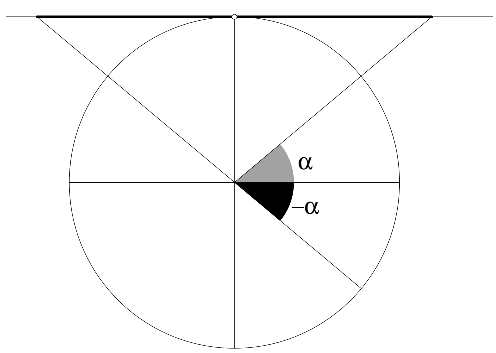
Seja α um ângulo representado no **círculo trigonométrico**.

$cotg(\alpha)$ corresponde ao valor da abcissa do ponto que resulta de projectar o lado extremidade do ângulo α no eixo paralelo ao eixo das abcissas que passa no ponto $(0,1)$.

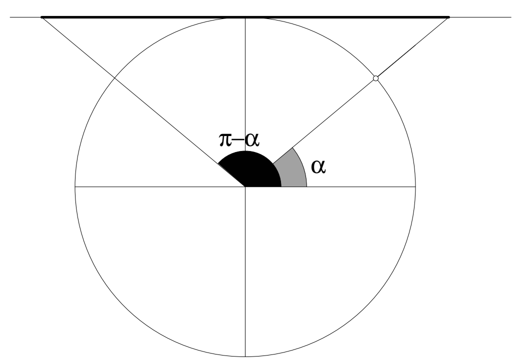
(ver figura ao lado)



Recorrendo ao círculo trigonométrico é fácil verificar as seguintes igualdades para um determinado ângulo α:



$cotg(-\alpha) = cotg(\pi - \alpha) = -cotg(\alpha)$



$cotg(\pi - \alpha) = -cotg(\alpha)$

Estas igualdades permitem calcular a co-tangente de um ângulo α conhecendo apenas os seus valores no 1º quadrante.

Exemplo:

$\frac{2\pi}{3} \in$ 2º quadrante

$$cotg\left(\frac{2\pi}{3}\right) = cotg\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -cotg\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

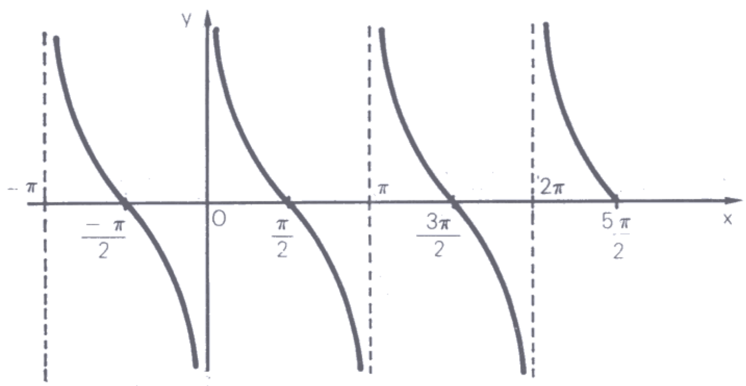
Como função real de variável real, temos

$$\begin{array}{rccc} f: & IR \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} & \rightarrow & IR \\ & x & \mapsto & cotg(x) \end{array}$$

*À função f dá-se o nome de **função co-tangente**.*

(**obs**: x é a medida de um ângulo em radianos)

O seu gráfico é



Características desta função:

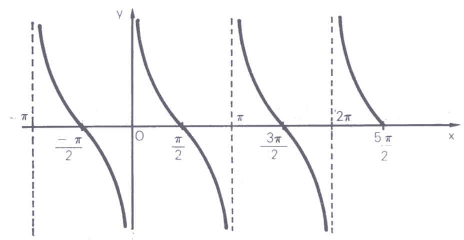
- Domínio: $IR \setminus \{k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$*;*
- Contradomínio: *IR*;
- Injectividade: *não injectiva;*
- Zeros: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z$;
- Paridade: $\forall x \quad cotg(-x) = -cotg(x)$ *(co-tangente é uma função ímpar);*
- Periodicidade: $\forall x \quad cotg(x+\pi) = cotg(x)$ (π é o período positivo mínimo);
- Limitada: *não limitada;*
- Máximos: *não tem;*
- Mínimos: *não tem.*

Função arco co-tangente

Consideremos a função

$$\begin{array}{llcl} f: & IR \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} & \to & IR \\ & x & \mapsto & cotg(x) \end{array}$$

Esta função não é injectiva.

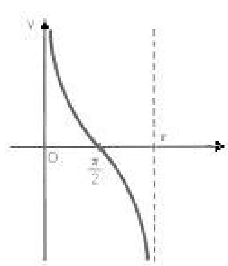


Por exemplo, há infinitos pontos do domínio que têm por imagem zero ($cotg(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$). Pelo que f não admite inversa.

Contudo, podemos considerar uma restrição do domínio onde a função *co-tangente* seja injectiva (chamada ***restrição principal***):

$$\begin{array}{llcl} g: &]0,\pi[& \to & IR \\ & x & \mapsto & cotg(x) \end{array}$$

cujo gráfico é:

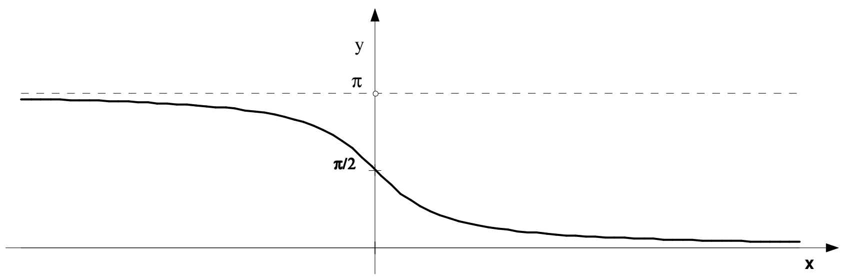


Assim definida, g é uma função injectiva e portanto faz sentido falar na sua inversa, g^{-1}.

Então g^{-1} tem por domínio IR, imagem $]0,\pi[$ e a cada $x \in IR$ faz corresponder o ângulo (ou arco) cuja co-tangente é x, que se representa por $arccotg(x)$.

$$\begin{array}{llll} g^{-1}: & IR & \to &]0,\pi[\\ & x & \mapsto & arccotg(x) \end{array}$$

cujo gráfico é



<u>Características desta função:</u>

- Domínio: *IR ;*
- Contradomínio: $]0,\pi[$;
- Injectividade: *injectiva;*
- Zeros *não tem*;
- Paridade: *não é par nem é ímpar;*
- Monotonia: *estritamente decrescente;*
- Limitada: $\forall x \quad 0 < arccotg(x) < \pi$;
- Máximos: *não tem*;
- Mínimos: *não tem*;

<u>Obs.:</u>

- *O* $arccotg(x)$ *é o valor real* y *tal que* $cotg(y) = x$, *onde* $x \in IR$, *ou seja:*

$$arccotg(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad cotg(y) = x$$

- $cotg(arccotg(x)) = x \quad onde \quad x \in IR$ *;*
- $arccotg(cotg(x)) = x \quad onde \quad 0 < x < \pi$.

Exemplos:

- $cotg\left(arcccotg\left(\frac{1}{7}\right)\right)=\frac{1}{7}$
- $arcccotg\left(cotg\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\pi}{6}$
- $arcccotg\left(cotg\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=arccotg\left(cotg\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)=arccotg\left(cotg\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\pi}{6}$ pois $\frac{7\pi}{6}\notin\left]0,\pi\right[$.

Exercício:

Considere a função definida por $f(x)=\frac{1}{2}arccotg(x+3)-\frac{\pi}{4}$.

Determine o domínio e contradomínio de f. Caracterize a inversa, caso exista.

Resolução:

$D_f=IR$. Determinemos o contradomínio de f:

$$0<arccotg(x+3)<\pi \quad\Leftrightarrow\quad 0<\frac{1}{2}arccotg(x+3)<\frac{\pi}{2} \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{\pi}{4}<f(x)<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

Logo $\mathrm{Im}(f)=\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$.

f é uma função injectiva porque é composta de funções injectivas.

Determinemos a expressão analítica da inversa:

$$\begin{aligned} f(x)=y &\Leftrightarrow \frac{1}{2}arccotg(x+3)-\frac{\pi}{4}=y \\ &\Leftrightarrow arccotg(x+3)=2y+\frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow x+3=cotg\left(2y+\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x=cotg\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)-3 \end{aligned}$$

Portanto

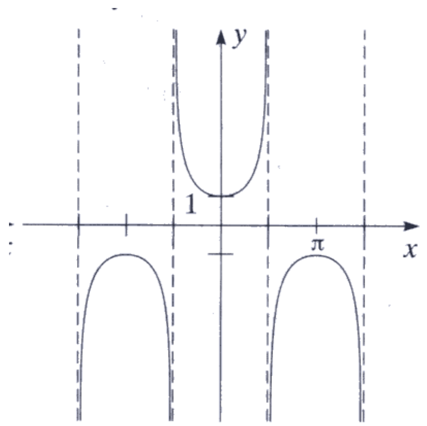
$$\begin{aligned} f^{-1}:\ \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[&\rightarrow IR \\ x &\mapsto cotg\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-3 \end{aligned}$$

Função secante

*A **função secante** define-se como*

$$f: \; IR \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow IR$$
$$x \mapsto \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

O seu gráfico é:



Características desta função:

- Domínio: $\{x \in IR : \cos(x) \neq 0\} = IR \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$;
- Contradomínio: $IR \setminus [-1,1]$;

  Se $x \in D_{\sec}$, temos $-1 \leq \cos(x) < 0 \quad \vee \quad 0 < \cos(x) \leq 1$

  logo,

$$\frac{1}{-1} \geq \frac{1}{\cos(x)} \quad \vee \quad \frac{1}{\cos(x)} \geq \frac{1}{1}$$

  ou seja,

$$\sec(x) \leq -1 \quad \vee \quad \sec(x) \geq 1$$

  $\therefore \quad \sec(x) \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, \infty\right[$

- Injectividade: *não injectiva;*
- Zeros: *não tem*;
- Paridade: $\forall x \quad \sec(-x) = \dfrac{1}{\cos(-x)} = \dfrac{1}{\cos(x)} = \sec(x)$ *(*secante *é uma função par);*
- Periodicidade $\forall x \quad \sec(x+2\pi) = \dfrac{1}{\cos(x+2\pi)} = \dfrac{1}{\cos(x)} = \sec(x)$

  (π é o período mínimo positivo)
- Limitada: *não limitada;*
- Máximo: em $x = \pi + 2k\pi, \quad k \in Z$;
- Mínimo: em $x = 2k\pi, \quad k \in Z$;

<u>Obs.:</u>

Os máximos e mínimos referidos nas características da função secante são relativos. No entanto, a função secante não tem extremos absolutos.

<u>Exercício</u>:

Considere a função definida por $f(x) = \dfrac{1}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)} + 2$.

Determine o domínio e o contradomínio. (Sugestão: esboce o gráfico de f usando as transformações descritas nas páginas 26-30)

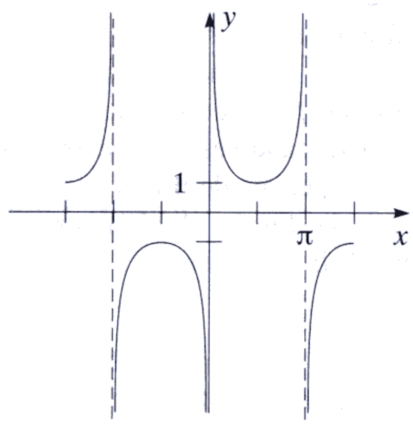
Caracterize a inversa da função f na restrição $x \in \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right] \backslash \left\{\dfrac{2\pi}{3}\right\}$.

Função co-secante

*A **função co-secante** define-se como*

$$f: \quad IR \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow IR$$
$$x \mapsto \operatorname{cos}ec(x) = \frac{1}{sen(x)}$$

O seu gráfico é:



Características desta função:

- Domínio: $\{x \in IR : sen(x) \neq 0\} = IR \setminus \{k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$*;*
- Contradomínio: $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$
- Injectividade: *não injectiva;*
- Zeros: *não tem*;
- Paridade: $\forall x \quad co\sec(-x) = \frac{1}{sen(-x)} = \frac{1}{-sen(x)} = -co\sec(x)$

  *(*co-secante *é uma função ímpar);*
- Periodicidade: $\forall x \quad co\sec(x+2\pi) = \frac{1}{sen(x+2\pi)} = \frac{1}{sen(x)} = co\sec(x)$

  (π é o período mínimo positivo)
- Limitada: *não limitada;*
- Máximos: em $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in Z$;

- Mínimos: em $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in Z$;

Obs.:

Os máximos e mínimos referidos nas características da função co-secante são relativos. No entanto, a função secante não tem extremos absolutos.

Exercício:

Considere a função definida por $f(x) = \cos ec\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Determine o domínio e o contradomínio.

Caracterize a inversa da função f na restrição $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \backslash \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$.