## 2.4. Função exponencial e logaritmo. Funções trigonométricas directas e inversas.

### Função exponencial:

*A uma função $f : IR \to IR$ definida por $f(x) = a^x$, onde $a \in \mathrm{IR}$, $a > 0$ e $a \neq 1$, dá-se o nome de **função exponencial de base a**.*

***Exemplos:***

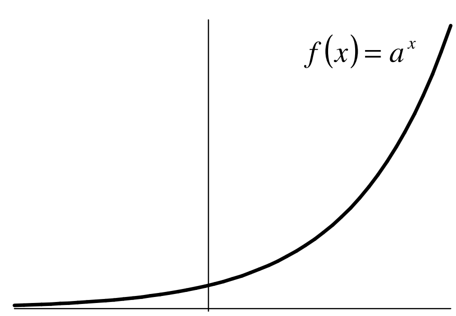
- $f(x) = 2^x$; $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $h(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$; $i(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- $f(x) = e^x$ – esta função é particularmente importante pelas suas aplicações em diversas áreas do conhecimento, nomeadamente na área da Economia.

***Obs.:***

- *O número "$e$" é irracional ($e = 2{,}71828182845\ldots$), e é conhecido por **constante de Euler***
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

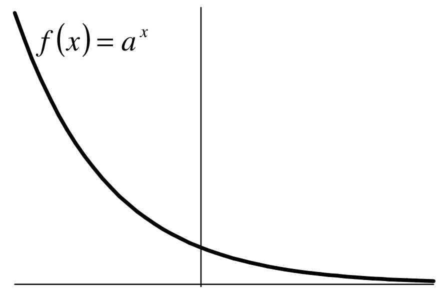
**Características destas funções:**

Se $a > 1$




- Domínio: $D_f = IR$
- Contradomínio: $\mathrm{Im}(f) = IR^+$
- Zeros: *não tem zeros.*
- $f(0) = 1 \quad (\Leftrightarrow \quad a^0 = 1)$
- *O gráfico de $f$ passa no ponto* $(0,1)$
- *Injectiva*
- *Estritamente crescente, em particular se $x > 0 \Rightarrow a^x > 1$*

Se $0 < a < 1$




- Domínio: $D_f = IR$
- Contradomínio: $\mathrm{Im}(f) = IR^+$
- Zeros: *não tem zeros.*
- $f(0) = 1$
- *O gráfico de $f$ passa no ponto* $(0,1)$
- *Injectiva*
- *Estritamente decrescente. (Note-se que agora* $a^x > 1$ quando $x < 0$)

**<u>Função logaritmo:</u>**

*A função inversa da função exponencial é a função*

$$f : IR^+ \rightarrow IR \text{ que se define por } f(x) = \log_a(x)$$

*onde* $a \in \mathrm{IR}$, $a > 0$ *e* $a \neq 1$, *à qual se dá o nome de* ***função logaritmo de base a****.*

**<u>Obs.:</u>**

- $\log_a(x)$ representa o número $y$ pelo qual se eleva $a$ de modo a obter $x$, isto é,

$$\log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

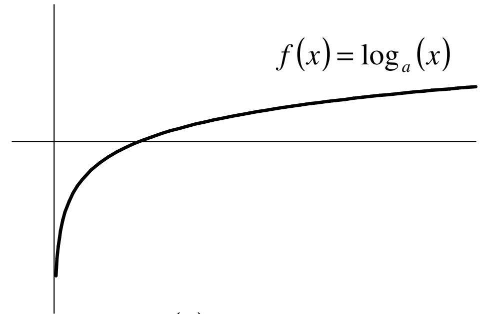
  *Desta equivalência resulta também que*

$$x = a^{\log_a(x)} \qquad e \qquad \log_a(a^y) = y$$

- $\log_a(x)$ é a função inversa da função $a^x$.
- Notação:
  - ⇨ $\log_a(x)$ *logaritmo de base* $a$
  - ⇨ $\log(x)$ *logaritmo de base* 10
  - ⇨ $\ln(x)$ *logaritmo de base* $e$, *estes logaritmos chamam-se neperianos, em homenagem ao matemático inglês Neper.*

**Características destas funções:**

Se $a > 1$

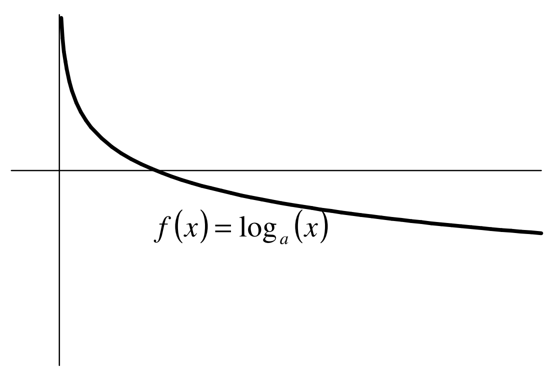



- Domínio: $D_f = \{x \in \mathrm{R} : x > 0\} = \mathrm{R}^+$
- Contradomínio: $\mathrm{Im}(f) = IR$
- Zeros: $x = 1 \quad (\Leftrightarrow \quad \log_a(1) = 0)$
- *O gráfico passa no ponto* (1,0)
- *Injectiva e sobrejectiva (bijectiva)*
- *Estritamente crescente, em particular, se* $x < 1 \quad \Rightarrow \quad \log_a(x) < 0$

***Exemplos*:**

- $f(x) = \log_2(x)$
- $g(x) = \log_{10}(x)$
- $h(x) = \ln(x)$

Se $0 < a < 1$




- Domínio: $D_f = \{x \in \mathrm{R} : x > 0\} = \mathrm{R}^+$
- Contradomínio: $\mathrm{Im}(f) = IR$
- Zeros: $x = 1 \quad (\Leftrightarrow \quad \log_a(1) = 0)$
- *O gráfico passa no ponto* (1,0)
- *Injectiva e sobrejectiva (bijectiva)*
- *Estritamente crescente, em particular, se* $x < 1 \quad \Rightarrow \quad \log_a(x) < 0$

***Exemplos*:**

- $f(x) = \log_{0,5}(x)$
- $g(x) = \log_{1/e}(x)$

## Propriedades dos logaritmos:

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(x^p) = p\log_a(x)$
- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ (fórmula de **mudança de base**)

Em particular, $\log_{1/e}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln\left(\frac{1}{e}\right)} = \frac{\ln(x)}{\ln(1) - \ln(e)} = -\ln(x)$

## Exercícios:

**1.** O capital acumulado a prazo ao fim de **n** anos, quando capitalizado de forma contínua, pode ser calculado através da função $\mathbf{C(n) = C_0\, e^{tn}}$, em que $\mathbf{C_0}$ representa a quantidade depositada e **t** a taxa de juro anual (na forma decimal).

Supondo $\mathbf{C_0 = 10000}$ **euros** e $\mathbf{t = 5\%}$, determine:

**a.** A quantidade acumulada ao fim de um, de dois e de quatro anos e meio.

**b.** Aproximadamente ao fim de quanto tempo duplica o capital?

**2.** O lucro **L** (em euros) obtido na venda de uma peça depende do número $x$ de unidades produzidas mensalmente. Esta relação é dada por

$$L(x) = \log\left(10 + \frac{x}{4}\right).$$

**a.** Se a fábrica tiver a capacidade de produzir entre 500 e 800 unidades por mês, entre que valores variará o lucro obtido em cada peça?

**b.** Qual deverá ser o número de unidades produzidas num mês para que o lucro unitário seja 3 €?

**3.** Seja $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

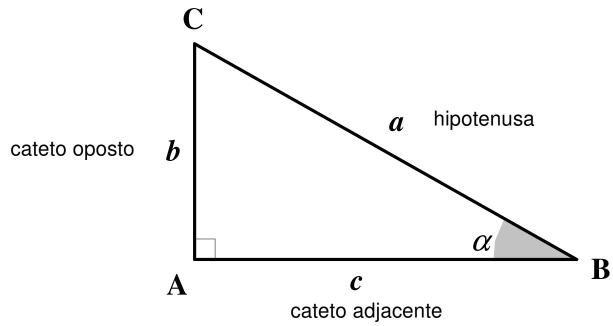
**a.** Indique o domínio e contradomínio.

**b.** Classifique-a quanto à injectividade, monotonia e paridade.

**c.** Considere a função $f$ definida em [0, 2 [. Caracterize a sua inversa (isto é, indique o domínio e expressão analítica que define $f^{-1}$)

**Funções Trigonométricas** (directas)

Considere-se um triângulo $[ABC]$ rectângulo em $A$.




Seja $\alpha = A\hat{B}C$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$

Define-se:

$$sen\alpha = \frac{b}{a} = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

$$\cos\alpha = \frac{c}{a} = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

$$tg\alpha = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{b}{c}$$

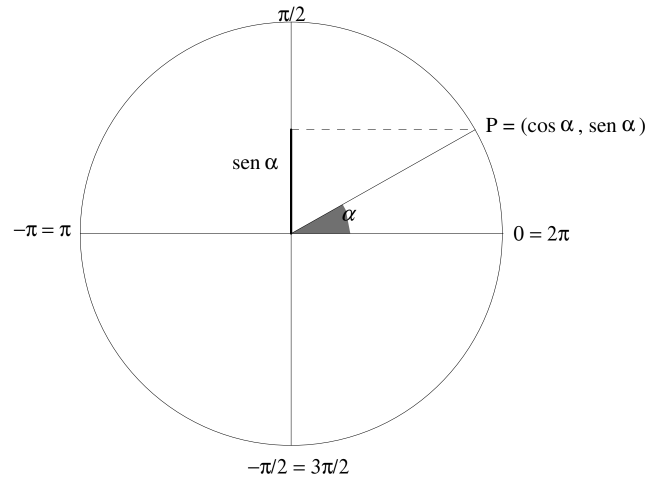
$$cotg\,\alpha = \frac{1}{tg(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{sen(\alpha)} = \frac{c}{b}$$

**Obs.:**

Alguns valores de referências destas funções:

| $\theta$ radianos | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $sen\theta$ | 0 | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 | 0 |
| $\cos\theta$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 | -1 |
| $tg\theta$ | 0 | $\sqrt{3}/3$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - | 0 |
| $cotg\,\theta$ | - | $\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}/3$ | 0 | - |

## Função sen:




Seja $\alpha$ um ângulo representado no **círculo trigonométrico** *(círculo de raio 1).*

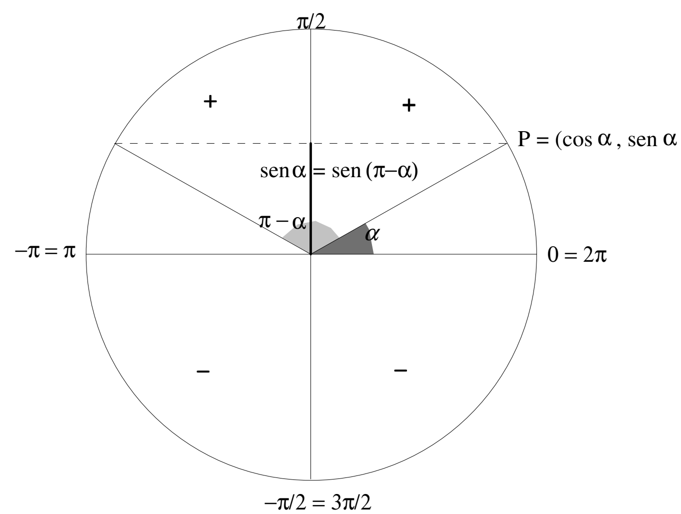
$Sen(\alpha)$ corresponde ao valor da ordenada do ponto que resulta da intersecção entre a circunferência e o segmento que determina o ângulo com o eixo dos xx's (medido no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio), de acordo com a figura ao lado.

Assim, dado um ângulo $\alpha$ temos as seguintes relações:

*(i)* $sen(\alpha) = sen(\pi - \alpha)$ e

*(ii)* $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$

Notar que a função seno toma valores positivos nos 1º e 2º quadrantes e valores negativos no 3º e 4º quadrantes.




As relações anteriores permitem-nos determinar o seno de qualquer ângulo $\alpha$ conhecendo apenas o valor do seno no 1º Quadrante.

***Exemplo:***

$\frac{5\pi}{4} \in$ 3º quadrante mas

$$sen\left(\frac{5\pi}{4}\right) \overset{(i)}{=} sen\left(\pi - \frac{5\pi}{4}\right) = sen\left(-\frac{\pi}{4}\right) \overset{(ii)}{=} -sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

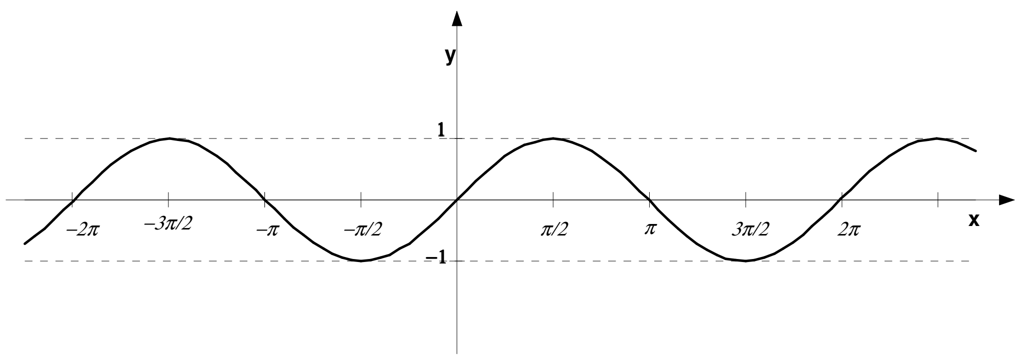
**Como função real de variável real**, temos

$$f: \begin{array}{ccc} IR & \rightarrow & IR \\ x & \mapsto & sen(x) \end{array}$$

*À função $f$ dá-se o nome de **função seno**.*

(**Obs**: $x$ é a medida de um ângulo em radianos)

O seu gráfico é




**Características desta função:**

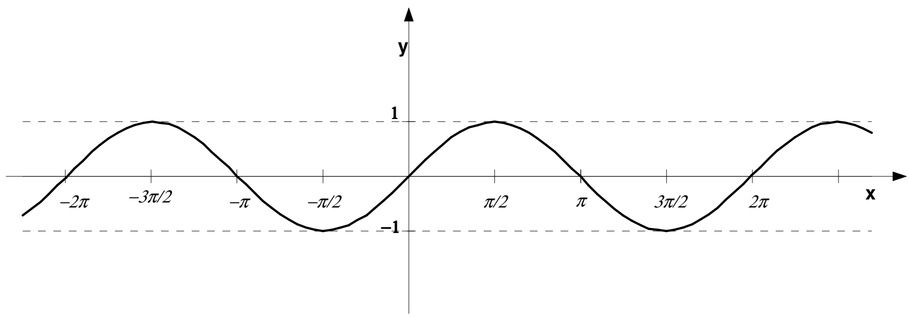
- Domínio: *IR;*
- Contradomínio: $\mathrm{Im}(f) = [-1,1]$;
- Injectividade: *não injectiva;*
- Zeros: $x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$;
- Paridade: $\forall x \quad sen(-x) = -sen(x)$ *(seno é uma função ímpar);*
- Periodicidade: $\forall x \quad sen(x + 2\pi) = sen(x)$ ($2\pi$ é o período positivo mínimo);
- Limitada: $\forall x \quad -1 \leq sen(x) \leq 1$;
- Máximos: em $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$;
- Mínimos: em $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$;

**Função arcsen:**

Consideremos a função

$$\begin{array}{llll} f: & IR & \rightarrow & [-1,1] \\ & x & \mapsto & sen(x) \end{array}$$

Esta função não é injectiva

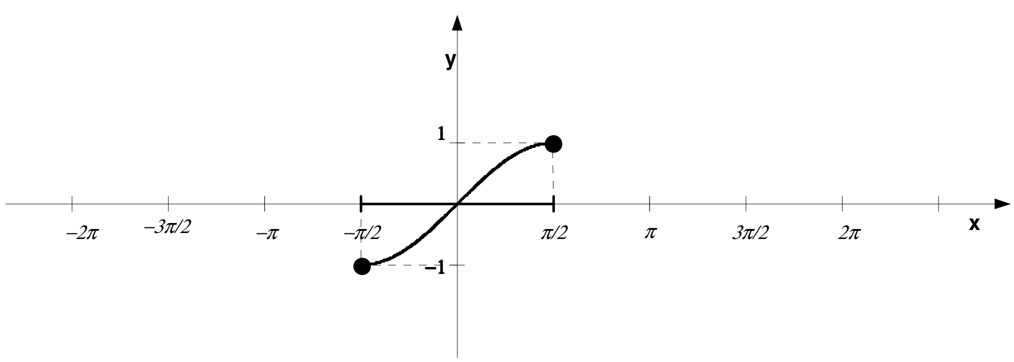



Por exemplo, há infinitos pontos do domínio que têm por imagem zero ( $sen(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=k\pi, \quad k\in Z$ ). Pelo que $f$ não admite inversa.

Contudo, podemos considerar uma restrição do domínio onde a função *seno* seja injectiva (chamada ***restrição principal***):

$$\begin{array}{llll} g: & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] & \rightarrow & [-1,1] \\ & x & \mapsto & sen(x) \end{array}$$

cujo gráfico é:

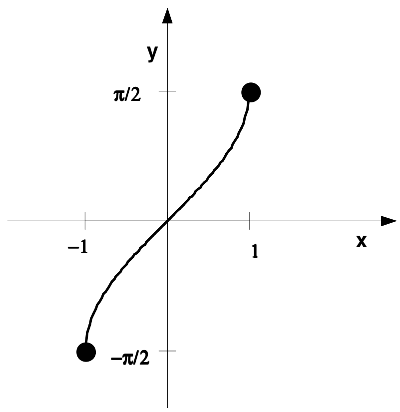



Assim definida, $g$ é uma função injectiva e portanto faz sentido falar na sua inversa, $g^{-1}$.

Então $g^{-1}$ tem por domínio $[-1,1]$, imagem $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e a cada $x\in[-1,1]$ faz corresponder o ângulo (ou arco) cujo seno é $x$, que se representa por $arcsen(x)$.

$$\begin{array}{rccl} g^{-1}: & [-1,1] & \to & \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right] \\ & x & \mapsto & arcsen(x) \end{array}$$

cujo gráfico é




**<u>Características desta função:</u>**

- Domínio: $[-1,1]$*;*
- Imagem: $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$;
- Injectividade: *injectiva;*
- Zeros: $x = 0$;
- Paridade: $\forall x \quad arcsen(-x) = -arcsen(x)$ *( arcsen é uma função ímpar);*
- Monotonia: *estritamente crescente;*
- Limitada: $\forall x \quad -\dfrac{\pi}{2} \le arcsen\,(x) \le \dfrac{\pi}{2}$*;*
- Máximo *em* $x = 1$;
- Mínimo *em* $x = -1$;

***<u>Obs.:</u>***

- *O* $arcsen(x)$ *é o valor real* $y$ *tal que* $sen(y) = x$, *onde* $x \in [-1,1]$, *ou seja:*

$$arcsen(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad sen(y) = x$$

- $sen(arcsen(x)) = x \quad onde \quad -1 \le x \le 1$*;*
- $arcsen(sen(x)) = x \quad onde \quad -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

***Exemplos:***

- $sen\left(arcsen\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}$
- $arcsen\left(sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2}$
- $arcsen\left(sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$ *pois* $\frac{2\pi}{3}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$*;*
- $sen(arcsen(3))=?$ *(note que* $3\notin\ldots$

**Exercício 1:**

Considere a função $f$ definida em $IR$ por:

$$f(x)=\cos\frac{\pi}{4}+2arcsen\left(\frac{x}{2}\right)$$

Determine o domínio e contradomínio de $f$. Caracterize a inversa.

Resolução*:*

$$D_f=\left\{x\in IR:-1\leq\frac{x}{2}\leq 1\right\}=\{x\in IR:-2\leq x\leq 2\}=[-2,2]$$

Determinemos o contradomínio de $f$:

$$\begin{aligned}
-2\leq x\leq 2 \quad &\Leftrightarrow \quad -1\leq\frac{x}{2}\leq 1\\
&\Leftrightarrow \quad arcsen(-1)\leq arcsen\left(\frac{x}{2}\right)\leq arcsen(1)\\
&\qquad \text{(notar que a função } arcsen \text{ é crescente)}\\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2}\leq arcsen\left(\frac{x}{2}\right)\leq\frac{\pi}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad -\pi\leq 2arcsen\left(\frac{x}{2}\right)\leq\pi\\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\pi\leq\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+2arcsen\left(\frac{x}{2}\right)\leq\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\pi\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}-\pi\leq\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+2arcsen\left(\frac{x}{2}\right)\leq\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi
\end{aligned}$$

Logo, $\operatorname{Im}(f)=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-\pi,\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi\right]$

$f$ é uma função injectiva porque é composta de transformações injectivas (***exercício***)

Comecemos por determinar a expressão analítica da inversa:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+2arcsen\left(\frac{x}{2}\right)=y \quad &\Leftrightarrow \quad 2arcsen\left(\frac{x}{2}\right)=y-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad arcsen\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{y}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\\
&\Leftrightarrow \quad sen\left(arcsen\left(\frac{x}{2}\right)\right)=sen\left(\frac{y}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x}{2}=sen\left(\frac{y}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad x=2sen\left(\frac{y}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{array}{llll}
f^{-1}: & \left[\frac{\sqrt{2}}{2}-\pi,\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi\right] & \to & [-2,2]\\
& x & \mapsto & 2sen\left(\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)
\end{array}$$

**<u>Exercício 2</u>:**

Dada a função: $f(x)=\frac{\pi}{3}+2arcsen|2x-1|$.

Calcule $D_f$ e $CD_f$. Verifique que $f$ não tem zeros.

<u>Resolução:</u>

$$\begin{aligned}
D_f &= \{x\in IR: |2x-1|\leq 1\}=\{x\in IR: -1\leq 2x-1\leq 1\}\\
&=\{x\in IR: 0\leq 2x\leq 2\}\\
&=\{x\in IR: 0\leq x\leq 1\}\\
&=[0,1]
\end{aligned}$$

Determinemos a imagem de $f$:

$$\begin{aligned}
0\leq x\leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 0\leq |2x-1|\leq 1\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3}+2arcsen(0)\leq \frac{\pi}{3}+2arcsen(|2x-1|)\leq \frac{\pi}{3}+2arcsen(1)
\end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{Im}(f)=\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$

Vejamos agora que $f$ não tem zeros:

$$
\begin{aligned}
f(x)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3}+2arcsen|2x-1|=0\\
&\Leftrightarrow \quad arcsen|2x-1|=-\frac{\pi}{6}\\
&\Leftrightarrow \quad sen\left(arcsen|2x-1|\right)=sen\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad |2x-1|=-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$f$ não tem zeros, pois a função módulo é sempre não negativa (isto é, $\geq 0$).

**<u>Exercício 3</u>:**

Considere a função real de variável real definida por:

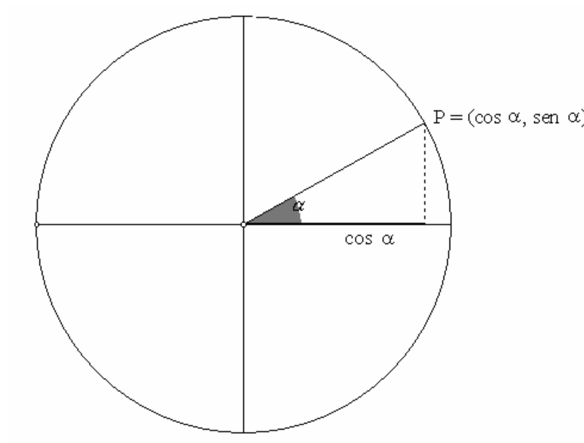
$$f(x)=arcsen\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

a) Verifique que $D_f = \left]-\infty,-2\right] \cup \left[0,+\infty\right[$.

b) Determine a imagem de $f$

c) Caracterize a função inversa de $f$, $f^{-1}$.

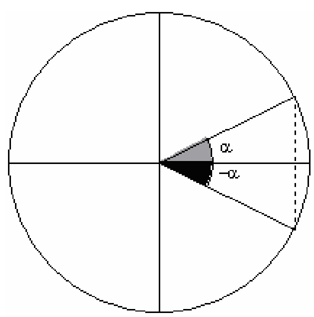
**Função cos:**



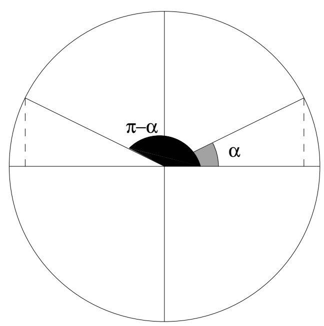

Seja $\alpha$ um ângulo representado **no círculo trigonométrico** (circulo de raio 1).

$\cos(\alpha)$ corresponde ao valor da abcissa do ponto que resulta da intersecção entre a circunferência e o segmento que determina o ângulo com o eixo dos $xx's$, conforme se pode ver na figura ao lado.

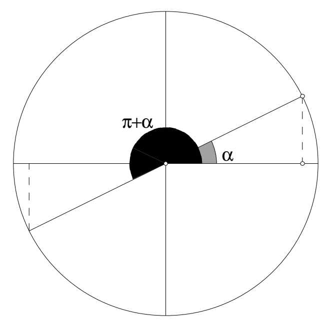
Recorrendo ao círculo trigonométrico, é fácil verificar as seguintes igualdade para um determinado ângulo $\alpha$:




$\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$




$\cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)$




$\cos(\pi+\alpha)=-\cos(\alpha)$

Assim, usando as igualdades anteriores, é sempre possível determinar o valor do co-seno de um ângulo $\alpha$ conhecendo apenas os valores da função co-seno no 1º quadrante.

***<u>Exemplo</u>:***

$\frac{4\pi}{3} \in$ 3º quadrante mas

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\cos\left(\pi-\frac{4\pi}{3}\right)=-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

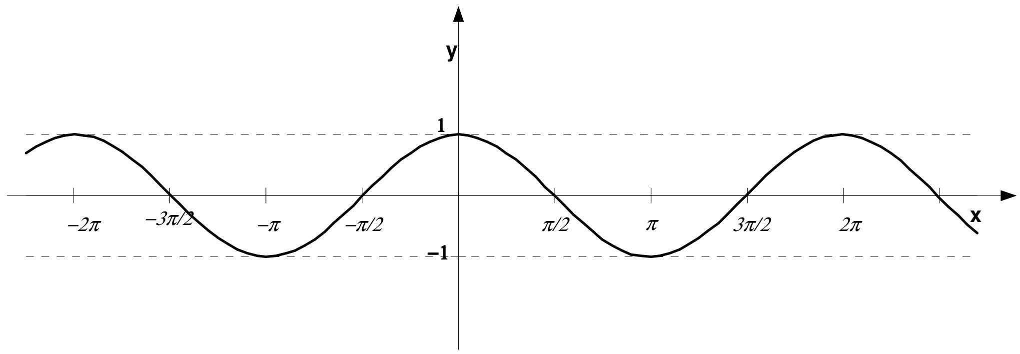
**Como função real de variável real**, temos

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathrm{IR} & \to & \mathrm{IR} \\ & x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$$

*À função $f$ dá-se o nome de* ***<u>função co-seno</u>***.

(**<u>obs</u>**: $x$ é a medida de um ângulo em <u>radianos</u>)

O seu gráfico é




**<u>Características desta função:</u>**

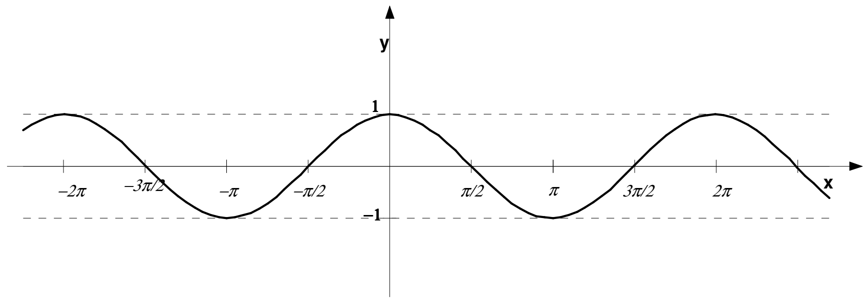
- Domínio: *IR;*
- Contradomínio: $\mathrm{Im}(f) = [-1,1]$;
- Injectividade: *não injectiva;*
- Zeros: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathrm{Z}$;
- Paridade: $\forall x \quad \cos(-x) = \cos(x)$ *(co-seno é uma função par);*
- Periodicidade: $\forall x \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ ($2\pi$ é o período positivo mínimo);
- Limitada: $\forall x \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1$*;*
- Máximos: *em* $x = 2k\pi, \quad k \in \mathrm{Z}$;
- Mínimos: *em* $x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathrm{Z}$.

## Função arccos

Consideremos a função

$$\begin{aligned} f:\ & IR && \to && [-1,1] \\ & x && \mapsto && \cos(x) \end{aligned}$$

Esta função não é injectiva

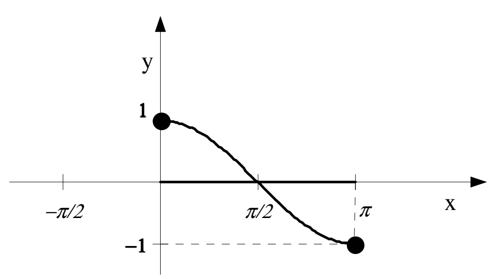



Por exemplo, há infinitos pontos do domínio que têm por imagem zero ( $\cos(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z$ ). Pelo que $f$ não admite inversa.

Contudo, podemos considerar uma restrição do domínio onde a função *co-seno* seja injectiva (chamada ***restrição principal***):

$$\begin{aligned} g:\ & [0,\pi] && \to && [-1,1] \\ & x && \mapsto && \cos(x) \end{aligned}$$

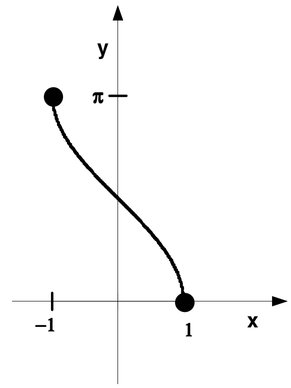
cujo gráfico é:




Assim definida, $g$ é uma função injectiva e portanto faz sentido falar na sua inversa, $g^{-1}$. Então $g^{-1}$ tem por domínio $[-1,1]$, imagem $[0,\pi]$ e a cada $x \in [-1,1]$ faz corresponder o ângulo (ou arco) cujo co-seno é $x$, que se representa por $\arccos(x)$.

$$g^{-1}: \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ x & \mapsto & \arccos(x) \end{array}$$

cujo gráfico é




**<u>Características desta função:</u>**

- Domínio: $[-1,1]$;
- Imagem: $[0,\pi]$;
- Injectividade: *injectiva;*
- Zeros: $x=1$;
- Paridade: *nem é par nem é ímpar*;
- Monotonia: *estritamente decrescente;*
- Limitada: $\forall x \in [-1,1] \quad 0 \le \arccos\,(x) \le \pi$;
- Máximo *em* $x=-1$;
- Mínimo *em* $x=0$;

***<u>Obs.:</u>***

- *O* $\arccos(x)$ *é o valor real* $y$ *tal que* $\cos(y)=x$, *onde* $x \in [-1,1]$, *ou seja:*

$$\arccos(x)=y \quad \Leftrightarrow \quad \cos(y)=x$$

- $\cos(\arccos(x))=x$ *onde* $-1 \le x \le 1$;
- $\arccos(\cos(x))=x$ *onde* $0 \le x \le \pi$.

***Exemplos:***

- $cos\left(arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{1}{3}$
- $arccos\left(cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\pi}{6}$
- $arccos\left(cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$ *pois* $\frac{7\pi}{6}\notin[0,\pi]$;
- $cos(arccos(-2))=?$ *(note que* $-2\notin \ldots$

**Exercício 1:**

*Considere a função* $f$ *definida por:*

$$f(x)=\frac{\pi}{3}\text{arccos}|2x-1|$$

*Determine o domínio e contradomínio de* $f$. *Caracterize a inversa, caso exista.*

Resolução:

$$\begin{aligned} D_f &= \{x\in IR : |2x-1|\leq 1\}=\{x\in IR : -1\leq 2x-1\leq 1\} \\ &= \{x\in IR : 0\leq 2x\leq 2\} \\ &= \{x\in IR : 0\leq x\leq 1\} \\ &= [0,1] \end{aligned}$$

Determinemos o contradomínio de $f$ :

$$\begin{aligned} 0\leq x\leq 1 &\Leftrightarrow 0\leq 2x\leq 2 \\ &\Leftrightarrow -1\leq 2x-1\leq 1 \\ &\Leftrightarrow 0\leq |2x-1|\leq 1 \\ &\Leftrightarrow \text{arccos}(0)\geq \text{arccos}|2x-1|\geq \text{arccos}(1) \\ &\qquad \text{(notar que a função arccos é decrescente)} \\ &\Leftrightarrow 0\leq \text{arccos}|2x-1|\leq \frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow 0\leq \frac{\pi}{3}\text{arccos}|2x-1|\leq \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Logo, $\text{Im}(f)=\left[0,\frac{\pi^2}{6}\right]$

A função $f$ não admite inversa, pois não é injectiva:

$$\frac{1}{4},\frac{3}{4}\in D_f \qquad \frac{1}{4}\neq\frac{3}{4} \qquad \text{mas} \qquad f\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{3}\right)^2=f\left(\frac{3}{4}\right)$$

**<u>Exercício 2</u>:**

Dada a função: $f(x)=1-\dfrac{\arccos(2x+1)}{2}$.

(a) Calcule $D_f$ e $CD_f$.

(b) Caracterize a inversa, caso exista.

(c) $\{x\in IR : f(x)=0\}$

*<u>Resolução:</u>*

(a)

$$\begin{aligned} D_f &= \{x\in IR : -1\le 2x+1\le 1\} = \{x\in IR : -2\le 2x\le 0\}\\ &= \{x\in IR : -1\le x\le 0\}\\ &= [-1,0] \end{aligned}$$

Determinemos a imagem de $f$:

$$\begin{aligned} -1\le x\le 0 &\Leftrightarrow -1\le 2x+1\le 1\\ &\Leftrightarrow \arccos(-1)\ge \arccos(2x+1)\ge \arccos(1)\\ &\Leftrightarrow 0\le \arccos(2x+1)\le \pi\\ &\Leftrightarrow 0\ge -\frac{\arccos(2x+1)}{2}\ge -\frac{\pi}{2}\\ &\Leftrightarrow 1-\frac{\pi}{2}\le 1-\frac{\arccos(2x+1)}{2}\le 1 \end{aligned}$$

Logo, $\operatorname{Im}(f)=\left[1-\dfrac{\pi}{2},1\right]$

(b) $f$ é uma função injectiva porque é composta de funções injectivas.

$$\begin{aligned} 1-\frac{\arccos(2x+1)}{2}=y &\Leftrightarrow \frac{\arccos(2x+1)}{2}=1-y\\ &\Leftrightarrow \arccos(2x+1)=2(1-y)\\ &\Leftrightarrow 2x+1=\cos(2-2y)\\ &\Leftrightarrow x=\frac{-1+\cos(2-2y)}{2} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} f^{-1}:\ \left[1-\frac{\pi}{2},1\right] &\to [-1,0]\\ x &\mapsto \frac{-1+\cos(2-2x)}{2} \end{aligned}$$

(c) Estudemos os zeros de $f$

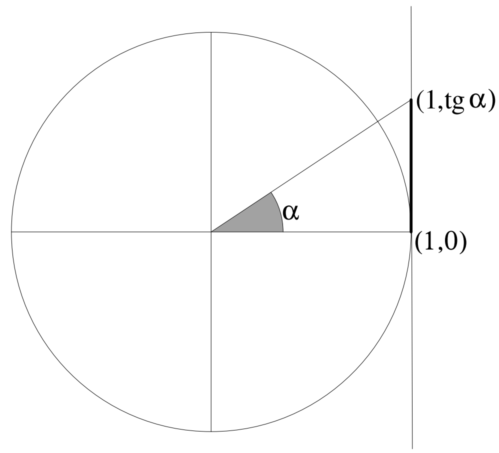
$$
\begin{aligned}
f(x)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1-\frac{\arccos(2x+1)}{2}=0\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\arccos(2x+1)}{2}=1\\
&\Leftrightarrow \quad \arccos(2x+1)=2\\
&\Leftrightarrow \quad 2x+1=\cos(2)\\
&\Leftrightarrow \quad x=\frac{-1+\cos(2)}{2}
\end{aligned}
$$

$f$ tem um zero em $x=\dfrac{-1+\cos(2)}{2}$.

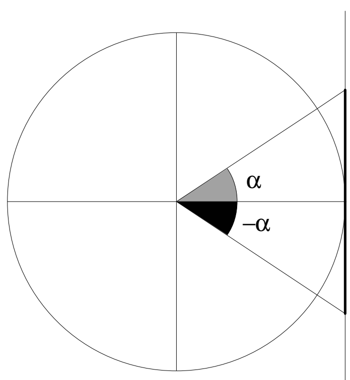
## Função tangente

Seja $\alpha$ um ângulo representado no **círculo trigonométrico**.

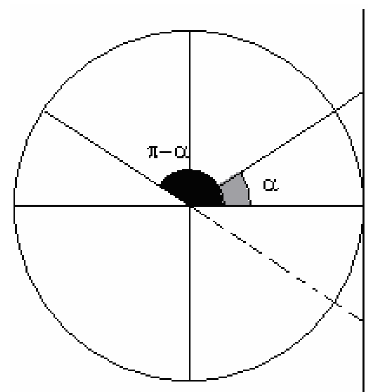
$tg(\alpha)$ corresponde ao valor da ordenada do ponto que resulta de projectar o lado extremidade do ângulo $\alpha$ no eixo paralelo ao eixo das ordenadas e que passa pelo ponto de coordenadas $(1,0)$. (ver figura ao lado)




Recorrendo ao círculo trigonométrico é fácil verificar as seguintes igualdades para um determinado ângulo $\alpha$:




$tg(-\alpha) = -tg(\alpha)$




$tg(\pi - \alpha) = tg(-\alpha)$

Estas igualdades permitem calcular a tangente de um ângulo $\alpha$ conhecendo apenas os seus valores no 1º quadrante.

Exemplo:

$\frac{2\pi}{3} \in$ 2º quadrante

$$tg\left(\frac{2\pi}{3}\right) = tg\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

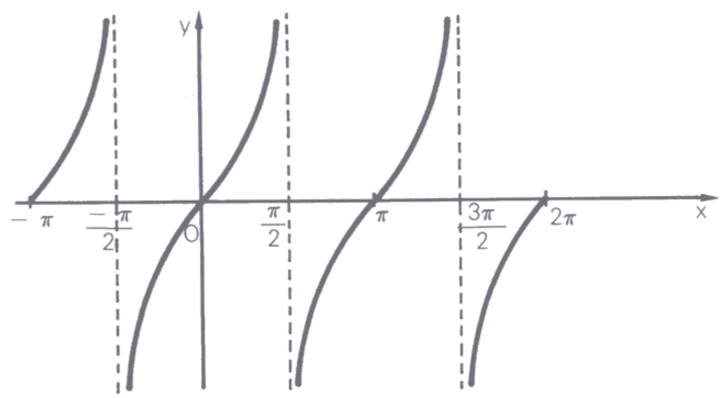
**Como função real de variável real**, temos

$$\begin{array}{llcl} f: & IR \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} & \rightarrow & IR \\ & x & \mapsto & tg(x) \end{array}$$

*À função $f$ dá-se o nome de* ***função tangente.***

(**obs**: $x$ é a medida de um ângulo em radianos)

O seu gráfico é




**Características desta função:**

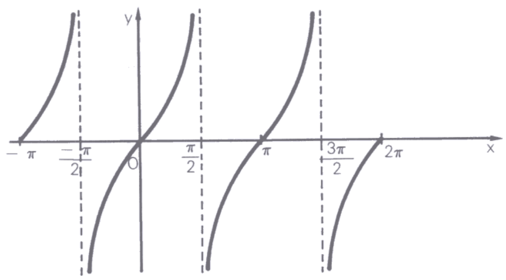
- Domínio: $IR \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$*;*
- Contradomínio: *IR*;
- Injectividade: *não injectiva;*
- Zeros: $x = k\pi, \quad k \in Z$ ;
- Paridade: $\forall x \quad tg(-x) = -tg(x)$ *(tangente é uma função ímpar);*
- Periodicidade: $\forall x \quad tg(x + \pi) = tg(x)$ ($\pi$ é o período positivo mínimo);
- Limitada: *não limitada;*
- Máximos: *não tem;*
- Mínimos: *não tem.*

## Função arcotangente

Consideremos a função

$$f: \quad IR \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \to \quad IR$$
$$x \quad \mapsto \quad tg(x)$$

Esta função não é injectiva.

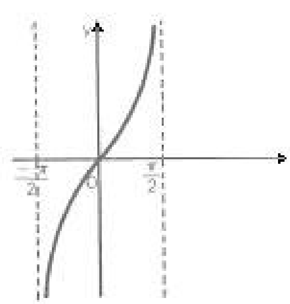



Por exemplo, há infinitos pontos do domínio que têm por imagem zero ($tg(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi, \quad k \in Z$). Pelo que $f$ não admite inversa.

Contudo, podemos considerar uma restrição do domínio onde a função *tangente* seja injectiva (chamada ***restrição principal***):

$$g: \quad \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \quad \to \quad IR$$
$$x \quad \mapsto \quad tg(x)$$

cujo gráfico é:

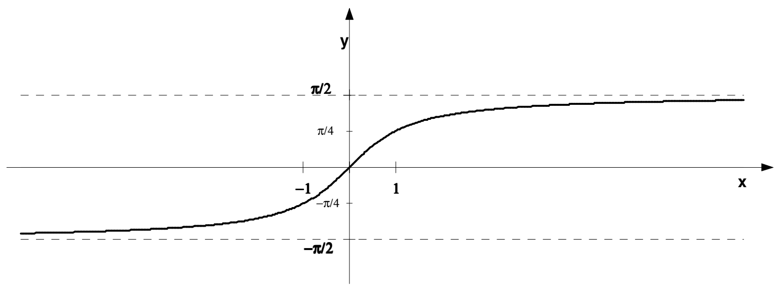



Assim definida, $g$ é uma função injectiva e portanto faz sentido falar na sua inversa, $g^{-1}$.

Então $g^{-1}$ tem por domínio $IR$, imagem $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ e a cada $x \in IR$ faz corresponder o ângulo (ou arco) cuja tangente é $x$, que se representa por $arctg(x)$.

$$g^{-1}: \quad IR \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
$$x \mapsto arctg(x)$$

cujo gráfico é




**<u>Características desta função:</u>**

- Domínio: $IR$ ;
- Contradomínio: $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ;
- Injectividade: *injectiva;*
- Zeros *em* $x = 0$ ;
- Paridade: $\forall x \quad arctg(-x) = -arctg(x)$ ($arctg$ é uma função ímpar)*;*
- Monotonia: *estritamente crescente;*
- Limitada: $\forall x \quad -\frac{\pi}{2} < arctg(x) < \frac{\pi}{2}$ ;
- Máximos: *não tem*;
- Mínimos: *não tem*;

***<u>Obs.:</u>***

- *O* $arctg(x)$ *é o valor real* $y$ *tal que* $tg(y) = x$, *onde* $x \in IR$, *ou seja:*

$$arctg(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad tg(y) = x$$

- $tg(arctg(x)) = x \quad onde \quad x \in IR$ ;
- $arctg(tg(x)) = x \quad onde \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

***Exemplos:***

- $tg\left(arctg\left(\frac{1}{7}\right)\right)=\frac{1}{7}$
- $arctg\left(tg\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\pi}{6}$
- $arctg\left(tg\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=arctg\left(tg\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)=arctg\left(tg\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\pi}{6}$ pois $\frac{7\pi}{6}\notin\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

**Exercício:**

*Considere a função definida por* $f(x)=arctg\left(\frac{1}{1-2x}\right)$.

*Determine o domínio e contradomínio de f. Caracterize a inversa, caso exista.*

*Resolução:*

$$D_f=\left\{x\in IR:\frac{1}{1-2x}\in IR\right\}=\{x\in IR:1-2x\neq 0\}=IR\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$\mathrm{Im}(f)=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{arctg(0)\}=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$ pois $\frac{1}{1-2x}$ nunca se anula!

Nota: $f$ é injectiva:

$$f(x)=f(y)\iff arctg\left(\frac{1}{1-2x}\right)=arctg\left(\frac{1}{1-2y}\right)$$

$$\iff \frac{1}{1-2x}=\frac{1}{1-2y}$$

porque $arctg$ é uma função injectiva (recordar!)

$$\iff \ldots \iff x=y$$

Determinemos a expressão analítica da inversa:

$$arctg\left(\frac{1}{1-2x}\right)=y \iff \frac{1}{1-2x}=tg(y)$$

$$\iff 1-2x=\cot g(y) \iff \ldots \iff x=\frac{1-\cot g(y)}{2}$$

Portanto

$$\begin{array}{llll} f^{-1}: & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\} & \to & IR\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\} \\ & x & \mapsto & \frac{1-\cot g(x)}{2} \end{array}$$