

2.3.2. Função Inversa

Seja f uma função injectiva. Sejam D_f e $\text{Im}(f)$ respectivamente o domínio e a imagem (ou contradomínio) da função f . À única função $g : \text{Im}(f) \rightarrow D_f$ que satisfaz:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= x & \forall x \in \text{Im}(f) \\ (g \circ f)(x) &= x & \forall x \in D_f \end{aligned}$$

chama-se **função inversa** de f e escreve-se $g = f^{-1}$.

Obs.:

- Só podemos definir f^{-1} se f for injectiva (num determinado domínio);
- Se f^{-1} é a inversa de f então f é a inversa de f^{-1} ;
- $D_{f^{-1}} = \text{Im}(f)$;
- $\text{Im}(f^{-1}) = D_f$.

Caracteriza-se a inversa de uma função da seguinte forma:

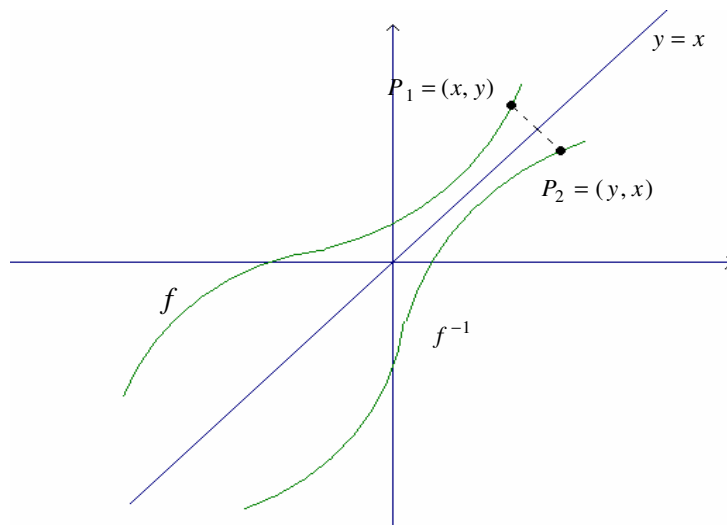
$$\begin{array}{ccc} f^{-1} : & \text{Im}(f) & \rightarrow \text{IR} \\ & y & \mapsto x \end{array}$$

ou seja, sabendo que $f(x) = y$, então a função inversa define-se por $f^{-1}(y) = x$.

Repare que, por definição de inversa de uma função temos $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$.

Graficamente, tem-se que

$$(x, y) \in \text{Gr}(f) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow (y, x) \in \text{Gr}(f^{-1})$$



Seja $P_1 = (x, y) \in Gr(f)$ e $P_2 = (y, x) \in Gr(f^{-1})$, o ponto médio do segmento que une estes pontos é o ponto $M = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y+x}{2} \right)$ que é um ponto que pertence à recta $y = x$. Podemos concluir, então que os gráficos de f e f^{-1} são **simétricos** relativamente à recta $y = x$.

Pergunta:

Porque é que só podemos definir função inversa para funções injectivas?

Resposta:

Repare que se f não for injectiva acontece, pelo menos uma vez, a seguinte situação:

$$x_1, x_2 \in D_f, \quad x_1 \neq x_2 \quad e \quad f(x_1) = y = f(x_2)$$

e então a função inversa, f^{-1} , terá de enviar y em x_1 e x_2 , ao mesmo, isto é,

$$\begin{cases} (x_1, y) \\ (x_2, y) \end{cases} \in Gr(f) \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x_1) \\ y = f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = f^{-1}(y) \\ x_2 = f^{-1}(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y, x_1) \\ (y, x_2) \end{cases} \in Gr(f^{-1})$$

e portanto f^{-1} tem duas para o seu objecto y . Mas isto contraria a definição de função, consequentemente isto não poderá acontecer, ou seja, f tem de ser injectiva para que exista a função f^{-1} .

Não confundir!!!

$$f^{-1}(x) \text{ com } \frac{1}{f(x)}$$

$$f^{-1} \text{ designa a inversa } f \text{ enquanto } \frac{1}{f} \text{ representa } (f)^{-1}$$

Exemplo:

1. A inversa da função $f(x) = \ln x$ em $]0, +\infty[$ é a função $f^{-1}(x) = e^x$

Temos:

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})(x) &= x & \forall x \in \mathbb{R} \\ (f^{-1} \circ f)(x) &= x & \forall x \in]0, \infty[\end{aligned} \quad (\text{verifique!!!})$$

2. Caracterizar a função inversa de $f(x) = \sqrt{x-4}$

$$D_f = [4, \infty[; \quad \text{Im}(f) = \mathbb{R}_0^+$$

Para determinar a expressão analítica da inversa:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-4} &= y && \text{igualar-se a } y \text{ a expressão de } f \\ \Rightarrow x-4 &= y^2 && \text{resolve-se a equação em ordem a } x \\ \Rightarrow x &= y^2 + 4 \end{aligned}$$

Caracterização inversa:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}: \text{Im}(f) = \mathbb{R}_0^+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 4 \end{array} \quad \text{note que } \text{Im}(f^{-1}) = D_f = [4, \infty[$$

Observação:

Por definição de função inversa temos $D_{f^{-1}} = \text{Im}(f)$.

Esta igualdade ajuda-nos a determinar, em casos mais complicados, a $\text{Im}(f)$, pois basta determinar a expressão analítica da função inversa e calcular o seu domínio.

Contudo só podemos fazer isto quando a expressão analítica de f^{-1} define por si só uma função injectiva. (Nota, uma função inversa é sempre injectiva, o que pode não ser injectiva é uma função que tenha a mesma expressão analítica de f^{-1}). Por exemplo, no anterior exemplo 2, $f^{-1}(x) = x^2 + 4$ definida em $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+ = \text{Im}(f)$ é injectiva, mas tem-se que $D_{(x^2+4)} = \mathbb{R}$, ou seja, a expressão analítica da função inversa, por si só, não verifica $\mathbb{R} = D_{(x^2+4)} = \text{Im}(f) = \mathbb{R}_0^+$, mas isto acontece porque, por si só, a expressão analítica de f^{-1} , $(x^2 + 4)$, não é injectiva.

Exercício:

Verifique que a função $f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$ coincide com a sua inversa.

(Sugestão: calcular $f \circ f$).