

2.3 Operações com funções. Composição de funções.

Operações com funções

Sejam f e g duas funções com domínios D_f e D_g , respectivamente.

Soma de funções

Exemplo:

Considere $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = e^x$.

Temos, $f(1) + g(1) = \ln(1) + e = e$

$f(-1) + g(-1) = ?$

Pergunta:

Para que valores de x faz sentido falar na soma $f(x) + g(x)$?

Resposta:

Para valores que pertencem simultaneamente aos domínios das duas funções consideradas.

Logo, $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \ln(x) + e^x$, se $x > 0$

Portanto, podemos definir a soma de duas funções do seguinte modo:

$$\begin{array}{ccc} f + g : & D_f \cap D_g & \rightarrow \quad \mathbb{R} \\ & x & \mapsto f(x) + g(x) \end{array}$$

Diferença de funções

Exemplo:

Considere $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$.

Temos, $f(1) - g(1) = \ln(1) - \sqrt{1} = 0 - 1 = -1$

$f(-1) - g(-1) = ?$ $f(3) - g(3) = ?$

Pergunta:

Para que valores de x faz sentido falar na diferença $f(x) - g(x)$?

Resposta:

Para valores que pertencem simultaneamente aos domínios das duas funções consideradas.

Logo, $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \ln(x) - \sqrt{2-x}$, se $x \in]0, 2]$

Portanto, podemos definir a diferença de duas funções do seguinte modo:

$$\begin{array}{ccc} f - g : D_f \cap D_g & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - g(x) \end{array}$$

Produto de funções

Exemplo:

Considere $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

Temos, $f(4) \cdot g(4) = \ln(4^2 - 4) \cdot \sqrt{4} = 2 \ln(12)$

$$f(2) \cdot g(2) = ? \qquad f(-3) \cdot g(-3) = ?$$

Pergunta:

Para que valores de x faz sentido falar no produto $f(x) \cdot g(x)$?

Resposta:

Para valores que pertencem simultaneamente aos domínios das duas funções consideradas.

$$\text{Logo, } (fg)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x} \ln(x^2 - 4), \quad \text{se } x > 2$$

Portanto, podemos definir o produto de duas funções do seguinte modo:

$$\begin{array}{ccc} f \cdot g : D_f \cap D_g & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \cdot g(x) \end{array}$$

Quociente de funções

Exemplo:

Considere $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$ e $g(x) = \cos(x)$.

$$\text{Temos, } \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{e}{\cos(0)} = \frac{2e}{1} = 2e$$

$$\frac{f(-1)}{g(-1)} = ? \qquad \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{g\left(\frac{\pi}{2}\right)} = ?$$

Pergunta:

Para que valores de x faz sentido falar no quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$?

Resposta:

Para valores que pertencem simultaneamente aos domínios das duas funções consideradas e que não anulem a função do denominador.

$$\text{Logo } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{\cos(x)} \quad \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \left(\{-1\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \right)$$

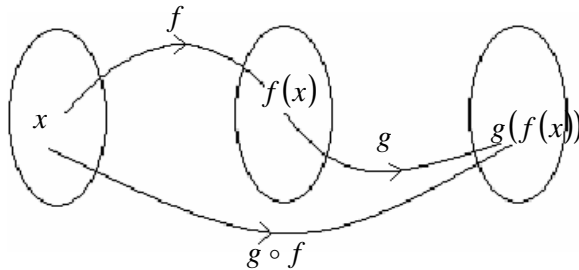
Portanto, podemos definir o quociente de duas funções do seguinte modo:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \frac{f}{g}: & D_f \cap D_g \cap \{x: g(x) \neq 0\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{array}}$$

Composição de funções

Sejam f e g duas funções com domínios D_f e D_g , respectivamente tais que

$$\text{Im}(f) = CD_f \subseteq D_g$$



Denota-se por $g \circ f$, a **função composta** de g com f definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

$g \circ f$ lê-se “ g após f ”.

Como calcular a imagem de um elemento $x \in D_{g \circ f}$?

1. calcular $f(x)$;
2. calcular a imagem de $f(x)$ pela função g , i.e., $g(f(x))$.

Obs.:

Note que só é possível calcular 1. se x pertencer ao D_f ; e só é possível calcular 2. se este, $f(x)$, pertencer ao D_g .

Consequentemente $D_{g \circ f}$ é

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$$

Obs.:

A maior parte das funções com que trabalhamos são funções compostas. Por exemplo, a função $\text{sen}(x^2)$ pode ser encarada como a composta da função $g(x) = \text{sen}(x)$ com $f(x) = x^2$. De facto, $\text{sen}(x^2) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \text{sen}(x^2)$.

Usando as mesmas funções podemos verificar que a função $\text{sen}^2(x)$ também pode ser encarada como composta de duas funções. (Faça as contas!!!)

Não confundir!!!

$$f^2 = f \circ f \neq f \cdot f = (f)^2$$

Exemplos:

- 1) Seja $f(x) = e^{\frac{1}{x-3}}$ e $g(x) = \log_2 x$. Determine o domínio e a expressão analítica das funções $f \circ g$ e $g \circ f$.

Resolução:

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} \setminus \{3\} & D_g &= \mathbb{R}^+ \\ D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}^+ \wedge \log_2 x \neq 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}^+ \wedge x \neq 2^3\} \\ &= \mathbb{R}^+ \setminus \{8\} \end{aligned}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log_2 x) = e^{\frac{1}{\log_2 x - 3}}$$

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 3 \wedge e^{\frac{1}{x-3}} > 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 3\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{3\} \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(e^{\frac{1}{x-3}}\right) = \log_2 e^{\frac{1}{x-3}} = \frac{\log_2 e}{x-3} = \frac{1}{(x-3)\ln 2}$$

2) Seja $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = x$. Verifique que $(g \circ f)(x) = x$.

Resolução:

$$\begin{aligned} D_f &= IR_0^+ & D_g &= IR \\ D_{g \circ f} &= \{x \in IR : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in IR : x \in IR_0^+ \wedge \sqrt{x} \in IR\} \\ &= \{x \in IR : x \geq 0\} \\ &= IR_0^+ \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

Atenção!!!

Embora $h(x) = x = (g \circ f)(x)$, temos que $D_{g \circ f} = IR_0^+$ e $D_h = IR$, e portanto $h \neq g \circ f$. Convém lembrar que duas funções são iguais se, em particular, os seus domínios forem iguais.

Nota:

- Em geral, a composição de funções **não comuta**, isto é, $g \circ f \neq f \circ g$ (ver o exemplo 1).
- Não podemos recorrer à expressão analítica da função composta para calcular o seu domínio (ver exemplo 2).

Exercício:

Caracterize as funções $f \circ g$ e $g \circ f$.

- considerando $f(x) = \sqrt{1-x}$ e $g(x) = x^2$;
- considerando $f(x) = \sqrt{x+2}$ e $g(x) = \ln(x+1)$.