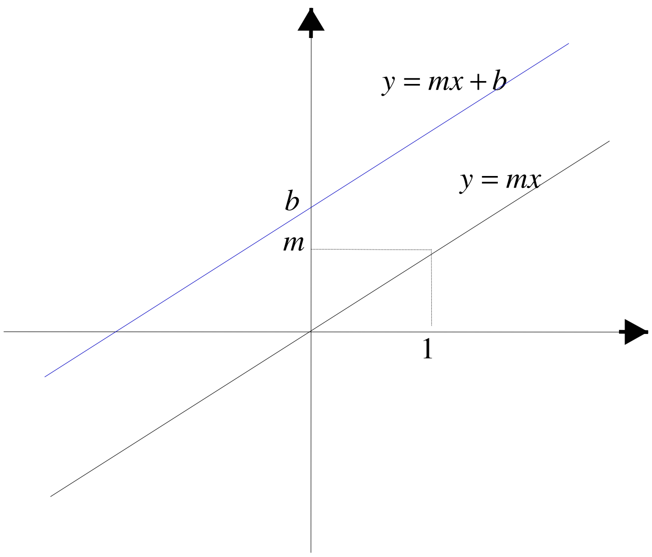
2.2 Alguns Exemplos de Funções Elementares

Função afim (linear)

São as funções mais simples que aparecem: os seus gráficos representam rectas.



$f(x) = \boxed{y = mx + b}$

$m \longrightarrow$ declive

$b \longrightarrow$ ordenada na origem $f(0) = b$

Dados dois quaisquer pontos distintos da recta $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, o declive da recta que os contém é dado por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$\longrightarrow$ diferença das ordenadas

$\longrightarrow$ diferença das abcissas

e a equação é:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Nota:

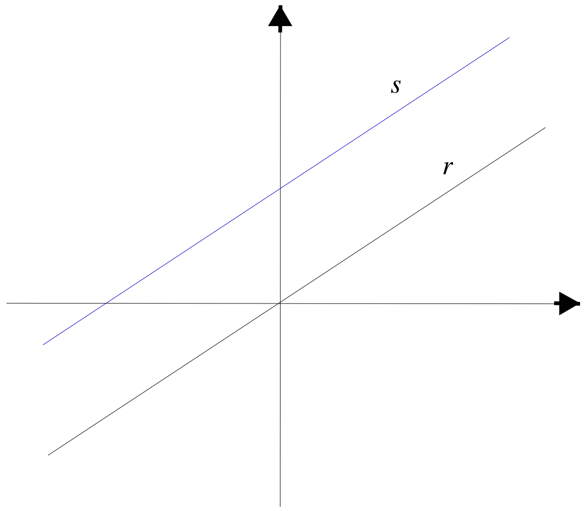
Suponhamos que θ é o ângulo que a recta faz com o semi-eixo positivo do xx's (no sentido directo – contrário aos ponteiros do relógio) então também podemos calcular o declive pela fórmula $m = tg(\theta)$.

O declive dá a maior ou menor inclinação da recta:

- $m > 0$ *inclinação para a direita*
- $m = 0$ *horizontal*
- $m < 0$ *inclinação para a esquerda*

Observação:

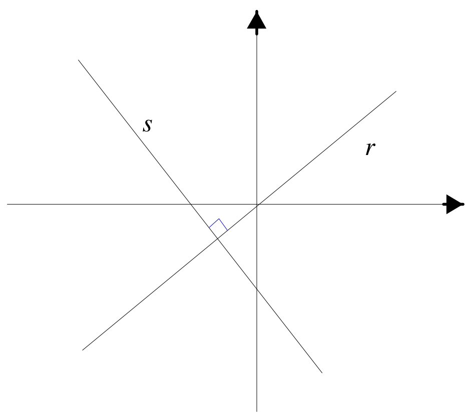
- Rectas paralelas têm o mesmo declive, m.



Se as rectas r e s são paralelas então

$$m_r = m_s$$

- Uma recta s perpendicular à recta r de equação $y = m_r x + b$ tem declive $m_s = -\frac{1}{m_r}$.



Se as rectas r e s são perpendiculares então

$$m_r = -\frac{1}{m_s}$$

Exercícios:

1) Determine o declive e o ponto de intersecção com o eixo dos yy's, das seguintes rectas:

a) $20x - 24y - 30 = 0$ **b)** $2x - 3 = 0$ **c)** $4y + 5 = 0$

2) Explique porque é que a recta do exercício **1.b)** não corresponde ao gráfico de uma função.

3) Determine a equação da recta:

a) paralela à recta de equação $3x - 5y + 8 = 0$ e que passa no ponto $(-3, 2)$.

b) perpendicular à recta de equação $3x - 5y + 8 = 0$ e que passa no ponto $(1, 4)$.

Função Quadrática

*Uma **função quadrática** é uma função definida por uma expressão do tipo:*

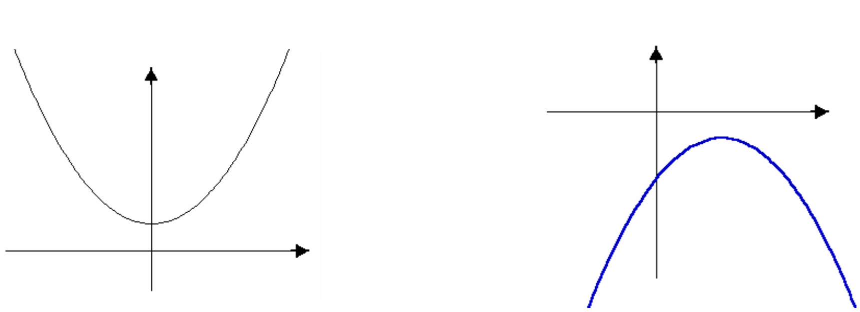
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

(Se $a = 0$ obtemos uma função afim – caso anterior)

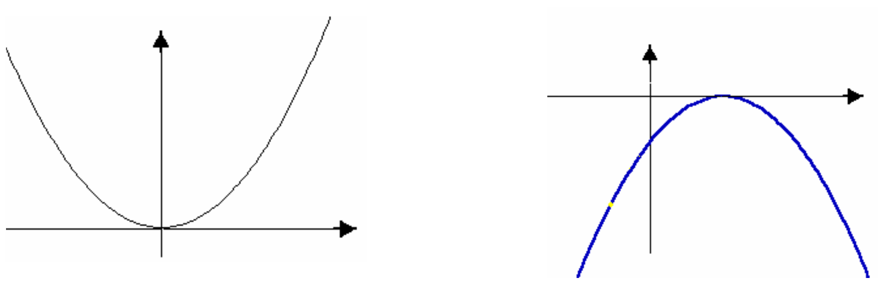
As funções quadráticas representam parábolas.

Se $a > 0$ a concavidade é voltada para cima

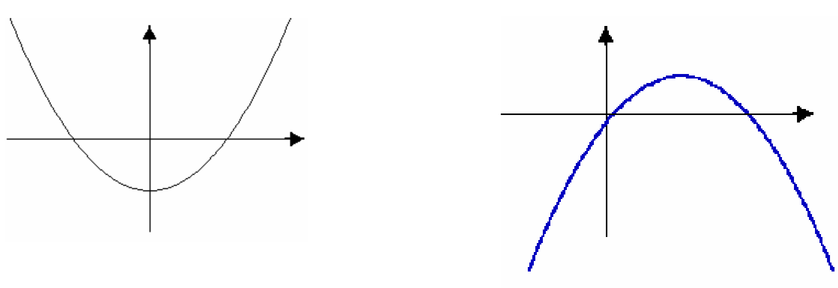
Se $a < 0$ a concavidade é voltada para baixo



A parábola não tem zeros



A parábola tem um zero (duplo)



A parábola tem dois zeros

Zeros de uma parábola

Para determinar os zeros da parábola é preciso resolver a equação

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ou seja,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Podemos concluir que a parábola tem:

- dois zeros distintos se $b^2 - 4ac > 0$
- um zero duplo se $b^2 - 4ac = 0$ e
- não tem zeros reais se $b^2 - 4ac < 0$.

Notas:

- *As funções quadráticas são funções não injectivas e não monótonas.*
- *O vértice de uma parábola é o ponto de coordenadas* $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.
- *A ordenada do vértice de uma parábola é um máximo (respectivamente mínimo) se* $a < 0$ *(respectivamente* $a > 0$ *).*

Exercício:

Determine os zeros da função $f(x) = x^2 + 2x - \frac{7}{2}$ e faça um esboço do seu gráfico.

Funções Polinomiais

A função afim (linear) e a função quadrática são casos particulares de funções polinomiais.

As ***funções polinomiais*** *de grau* n *são do tipo:*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

onde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ *são reais,* $a_n \neq 0$ *e* n *é* ***inteiro não negativo.***

Exemplos:

- $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ *(grau 3)*
- $g(x) = x^5 + 7x + 2$ *(grau 5)*
- $h(x) = 2$ *(grau 0)*
- $i(x) = \dfrac{1}{x}$ *não é polinomial porque ....*

Nota:

Para polinómios de grau ≥ 3 *não existe uma fórmula simples para determinar os zeros (para grau 3 e 4 existe mas é complicada). No entanto, às vezes é possível determinar os zeros.*

Exemplos:

- *Determinar os zeros do polinómio* $p(x) = x^3 - x^2 - 2x$

$$\begin{aligned} p(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^3 - x^2 - 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \cdot \left(x^2 - x - 2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x^2 - x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 2 \end{aligned}$$

- *Determine os zeros do polinómio* $q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

  (exercício…)

Funções racionais

Se $p(x)$, $q(x)$ *são funções polinomiais, a função* $f : D \subset IR \rightarrow IR$ *com domínio* $D = \{x \in IR: \quad q(x) \neq 0 \ \}$ *definida por*

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

chama-se ***função racional***.

Exemplos:

- $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *é racional*
- $g(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2}$ *é racional*
- $h(x)=\sqrt{x}$ *não é racional* *(porque …*

Zeros

Se $R(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ é uma função racional

então

$$R(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad p(x)=0 \quad \wedge \quad q(x)\neq 0$$

Funções irracionais:

Seja $p(x)$ *um polinómio.*

As ***funções irracionais*** *são funções do tipo:*

$$f(x)=\left[\sqrt[n]{p(x)}\right]^m$$

onde $n\in IN$ *e* $m\in \mathbb{Z}$*.*

Exemplos:

- $f(x)=\sqrt{x}$ *é irracional*
- $g(x)=\left(\sqrt[3]{x^2+3}\right)^{-7}$ *é irracional*

Nota:

Se n é par é necessário impor a condição $p(x)>0$. Se n é ímpar não há restrições a impor.

Revisão sobre potências:

Sejam $n \in IN$, $m \in Z$

a) $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n\ vezes}$

b) $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ $\quad (se \quad x \neq 0)$

c) $x^0 = 1$ $\quad (se \quad x \neq 0)$

d) $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ $\quad (x \geq 0 \quad n\ é\ par)$

e) $x^{m/n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$ $\quad (x \geq 0 \quad n\ é\ par)$

Regras para os expoentes:

a) $x^n . x^m = x^{n+m}$

b) $x^n . y^n = (xy)^n$

c) $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$ $\quad (se \quad x \neq 0)$

d) $\dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n$ $\quad (se \quad y \neq 0)$

e) $\left(x^n\right)^m = x^{nm}$

f) $x^{n/m} = \left(x^{1/m}\right)^n$ $\quad (x \geq 0 \quad se \quad n\ é\ par)$

Funções definidas por ramos

Exemplo:

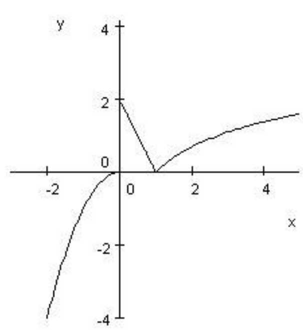
Considere a função: $h(x) = \begin{cases} -x^2 & se \quad x < 0 \\ 2 - 2x & se \quad 0 \leq x < 1 \\ \ln(x) & se \quad x \geq 1 \end{cases}$

Notar que o domínio da função é *IR*.

Uma função assim definida significa que:

- se $x \in \left]-\infty, 0\right[$, então $h(x) = -x^2$ (por exemplo $h(-1) = -(-1)^2 = -1$)
- se $x \in \left[0, 1\right[$, então $h(x) = 2 - 2x$ (por exemplo $h(0) = 2 - 2 \times (0)^2 = 2$)
- se $x \in \left[1, \infty\right[$, então $h(x) = \ln(x)$ (por exemplo $h(1) = \ln(1) = 0$)

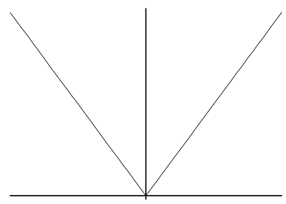
O gráfico desta função é:



<u>Exemplo:</u>

Outra função definida por ramos é a função módulo: $|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$

cujo gráfico é:



<u>Exercício:</u>

Seja $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} & \text{se} \quad x \geq 2 \\ \ln(-x-2) & \text{se} \quad x < -2 \end{cases}$. Determine o seu domínio.

<u>Resolução:</u>

$$
\begin{aligned}
D_f &= \left\{x \in IR : \left(x^2 - 4 \geq 0 \quad \wedge \quad x \geq 2\right) \quad \vee \quad \left(-x-2>0 \quad \wedge \quad x<-2\right)\right\} \\
&= \{(]-\infty,-2] \quad \cup \quad [2,\infty[) \quad \cap \quad [2,\infty[\} \quad \cup \quad \{]-\infty,-2[\quad \cap \quad]-\infty,-2[\} \\
&= [2,\infty[\quad \cup \quad]-\infty,-2[\\
&=]-\infty,-2[\quad \cup \quad [2,\infty[\\
&= IR \setminus [-2,2[
\end{aligned}
$$