Capítulo II

Funções reais de variável real

2.1 Conceitos Básicos sobre Funções

Sejam D e B dois conjuntos.

Uma ***função*** definida em D e tomando valores em B é uma "regra" que a cada elemento de D faz corresponder **<u>um único</u>** elemento de B.

Escreve-se:

$$\begin{array}{cccc} f: & D & \to & B \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Ao conjunto D chama-se o ***domínio*** de f, a B ***conjunto de chegada*** e a $f(x)$ ***imagem*** do elemento $x \in A$.

<u>Nota:</u>

$f \neq f(x)$ uma vez que f representa uma função e $f(x)$ representa a imagem do elemento x pela função f.

Seja $f: \quad D \quad \to \quad B$ uma função.

<u>Definições:</u>

- *Chama-se **imagem** (ou **contradomínio**) de f ao subconjunto de B formado por todos os elementos que são imagem de algum elemento de D.*

  Escreve-se

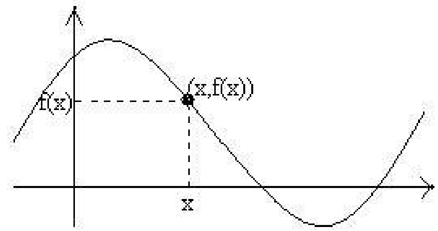
  $$\mathrm{Im}(f) = (CD_f) = \{y \in B : y = f(x) \text{ para algum } x \in D\}$$

  <u>Exemplo:</u>

  $$\begin{array}{cccc} f: & IR & \to & IR \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

  $\mathrm{Im}(f) = IR_0^+$ (note-se que o quadrado de um número é sempre não negativo)

- f *diz-se uma* ***função real de variável real*** *se* $D,\ B \subseteq \mathbb{R}$.
- *O* ***gráfico*** *de* f *é o conjunto de pontos* $P = (x, f(x))$ *e representa-se por:*
  $Gr(f) = \{(x, y) \in IR^2 : x \in D_f \quad \wedge \quad y = f(x)\}$

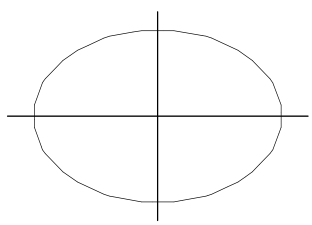


Pergunta:

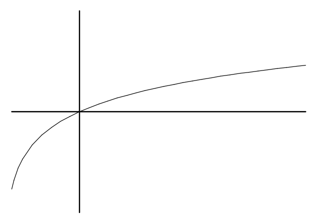
Dado um gráfico, como poderemos saber se representa o gráfico de uma função?

Resposta:

Note-se que na definição de uma função foi exigido que a cada elemento do domínio correspondesse um único elemento do conjunto de chegada, ou seja, cada recta vertical do plano pode intersectar o gráfico no **máximo** uma vez.



não representa uma função

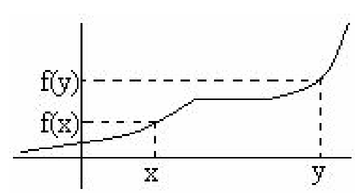


representa uma função

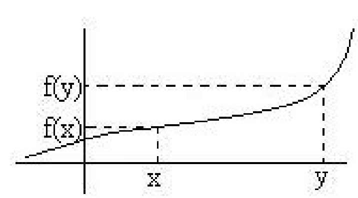
Definições:

Uma função $f: \quad D_f \subset IR \quad \rightarrow \quad B \subseteq IR$ *diz-se*

- ***Crescente*** *se*
  $x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y) \qquad \forall \ x, y \in D_f$



- ***Estritamente crescente*** *se*
  $x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(y) \qquad \forall \ x, y \in D_f$



- ***Decrescente*** *se* $x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(y) \qquad \forall \ x, y \in D_f$
- ***Estritamente decrescente*** *se* $x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(y) \qquad \forall \ x, y \in D_f$
- ***Monótona*** *se é (sempre) crescente ou (sempre) decrescente.*
- ***Estritamente monótona*** *se é (sempre) estritamente crescente ou (sempre) estritamente decrescente.*

<u>Definições:</u>

Seja $f: \ D_f \subset IR \ \rightarrow \ B \subseteq IR$.

- f *diz-se* ***sobrejectiva*** *se* $\mathrm{Im}(f) = B$, *isto é, se o conjunto de chegada coincide com a imagem de* f *:*

$$\forall \ y \in B \quad \exists \ x \in D_f \ : \ f(x) = y$$

<u>Exemplos:</u>

Função	Imagem	Sobrejectividade
1) $\begin{array}{rccc} f: & IR & \rightarrow & IR \\ & x & \mapsto & x \end{array}$	$\mathrm{Im}(f) = IR$	$\therefore f$ é sobrejectiva pois a imagem coincide com o conjunto de chegada.
2) $\begin{array}{rccc} f: & IR & \rightarrow & IR \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$	$\mathrm{Im}(f) = IR_0^+$	$\therefore f$ não é sobrejectiva pois a imagem (IR_0^+) é diferente do conjunto de chegada: IR .
3) $\begin{array}{rccc} f: & IR_0^+ & \rightarrow & IR \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$	$\mathrm{Im}(f) = IR_0^+$	$\therefore f$ não é sobrejectiva.
4) $\begin{array}{rccc} f: & IR & \rightarrow & IR_0^+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$	$\mathrm{Im}(f) = IR_0^+$	$\therefore f$ é sobrejectiva.

- f *diz-se* ***injectiva*** *se a pontos diferentes do domínio corresponderem imagens distintas i.e.,*

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(y) \qquad \forall\ x, y \in D_f$$

$$\left(\Leftrightarrow \quad f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad x = y \qquad \forall\ x, y \in D_f\right)$$

Exemplos:

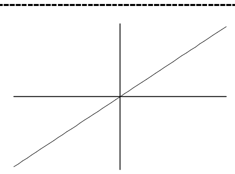
Função	$x \neq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(y)$	Injectividade
1) $f: \ IR \to IR$ $x \mapsto x$	$x \neq y \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x}_{f(x)} \neq \underbrace{y}_{f(y)}$	$\therefore\ f$ é injectiva
2) $f: \ IR \to IR$ $x \mapsto x^2$	$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x^2 = y^2$ $\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0$ $\Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0$ $\Leftrightarrow x = y \ \vee \ x = -y$	$\therefore\ f$ não é injectiva
3) $f: \ IR_0^+ \to IR$ $x \mapsto x^2$	$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x^2 = y^2$ $\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0$ $\Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0$ $\Leftrightarrow x = y \ \vee \ x = -y$	$\therefore\ f$ é injectiva (note-se que o caso $x = -y$ não pode ocorrer)
4) $f: \ IR \to IR$ $x \mapsto x^3$	$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x^3 = y^3$ $\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y^3}$ $\Leftrightarrow x = y$	$\therefore\ f$ é injectiva

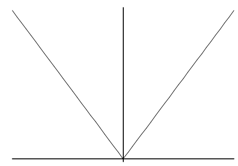
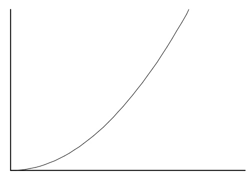
Nota:

*Graficamente, verifica-se que uma função é injectiva se qualquer recta horizontal intersecta o gráfico, **no máximo**, uma vez.*

- *f diz-se **bijectiva** se é injectiva e sobrejectiva.*

Exemplos:

Função		Bijectividade
1) $f: \ IR \to IR$ $x \mapsto x$		$\therefore\ f$ é bijectiva.

2) $\begin{array}{llll} f: & IR & \rightarrow & IR \\ & x & \mapsto & \lvert x \rvert \end{array}$		$\therefore f$ não é bijectiva porque não é sobrejectiva nem injectiva.
3) $\begin{array}{llll} f: & IR_0^+ & \rightarrow & IR_0^+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$		$\therefore f$ é bijectiva pois é sobrejectiva e injectiva.

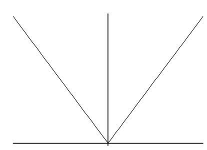
<u>Definições:</u>

Uma função $f: \; D_f \subset IR \;\; \rightarrow \;\; IR$ *diz-se*

- ***par*** *se* $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$

  <u>Exemplo:</u>

  $$\begin{array}{llll} f: & IR & \rightarrow & IR \\ & x & \mapsto & \lvert x \rvert \end{array}$$

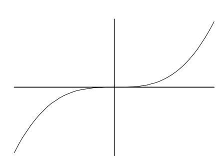
  <u>Nota:</u>

  Qualquer função par é simétrica em relação ao eixo dos yy's

- ***impar*** *se* $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$

  <u>Exemplo:</u>

  $$\begin{array}{llll} f: & IR & \rightarrow & IR \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

  <u>Nota:</u>

  Qualquer função ímpar é simétrica em relação à origem.

- ***periódica*** *se existir* $T > 0$ *tal que* $f(x+T) = f(x) \quad \forall \, x \in D_f$. *(*$T$ *diz-se o* ***período*** *de* f *)*

Exemplos:

1) $f(x) = sen(x)$ é uma função periódica de período 2π.

$$sen(x + 2\pi) = sen(x)$$

2) $g(x) = tg(x)$ é uma função periódica de período π.

$$tg(x + \pi) = tg(x)$$

3) $h(x) = tg(x)$ também é uma função periódica de período 2π.

$$tg(x + 2\pi) = tg(x)$$

Nota:

Se uma função é periódica de período T, o gráfico de f repete-se de T em T unidades.

- ***limitada*** *se a imagem de f for um conjunto limitado, i.e.,*

$$\exists\, L > 0 : |f(x)| \leq L \quad \forall\, x \in D_f$$

Exemplo:

	Função	Imagem	Limitada
1)	$f: IR \to IR$ $x \mapsto x^2$	$\mathrm{Im}(f) = IR_0^+ = [0,+\infty[$ conjunto não limitado	$\therefore f$ é ilimitada
2)	$f: IR \to IR$ $x \mapsto sen(x)$	$\mathrm{Im}(f) = [-1,1]$ conjunto limitado	$\therefore f$ é limitada

Nota:

Se uma função é limitada, o todo gráfico de f está entre duas rectas horizontais, por exemplo, entre $y = -L$ e $y = L$.

Definições:

Dada uma função $f: D_f \subset IR \to IR$ diz-se que

- *$f(c)$ é um **máximo** de f se $f(x) \leq f(c)$ $\forall\, x \in D_f$.*
- *$f(c)$ é um **mínimo** de f se $f(c) \leq f(x)$ $\forall\, x \in D_f$.*
- *f tem um **extremo** se possui algum máximo ou mínimo.*