

Capítulo I

Noções Elementares de Matemática

Tipos de números

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ – conjunto dos números naturais.

$$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ – conjunto dos números inteiros.

$$\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{N}_0$$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$ – conjunto dos números racionais ou fraccionários, i.e., conjunto

dos números que podem ser representados como quociente de números inteiros.

Exemplos:

$$-\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}; \quad \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \in \mathbb{Q}; \quad 1,5 \in \mathbb{Q}; \quad 1,333(3) \in \mathbb{Q}$$

Obs.:

Qualquer racional tem dízima finita ou infinita periódica.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{ \text{números irracionais} \}$ – conjunto dos números reais

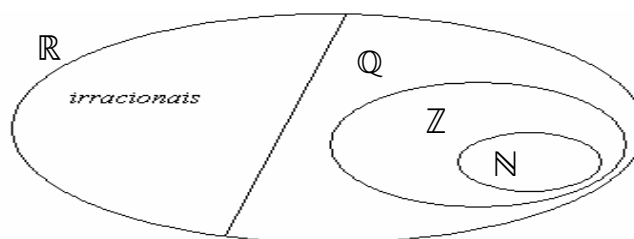
Exemplos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}; \quad \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \in \mathbb{R}; \quad 1,5 \in \mathbb{R}; \quad 1,333(3) \in \mathbb{R}; \quad 1,750238619\dots \in \mathbb{R}; \\ \sqrt{5} \in \mathbb{R}; \quad -\sqrt{\frac{8}{3}} \in \mathbb{R}; \quad \pi^2 \in \mathbb{R}; \quad \sqrt[5]{e} \in \mathbb{R}; \quad \log_3 0,12 \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

Obs.:

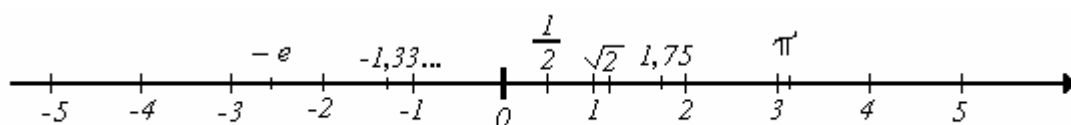
Qualquer destes números pode ser representado por uma dízima infinita (periódica se também for um racional, não periódica se for irracional – real não racional).

Em resumo tem-se:



Assim: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Podemos identificar os números reais com os pontos na recta real



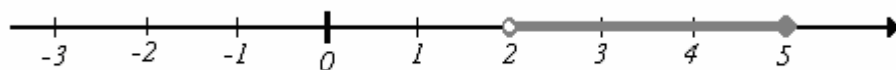
Desigualdades.

- $a < b$: “ a menor que b ” – significa que a está à esquerda de b na recta real;
- $a > b$: “ a maior que b ” – significa que a está à direita de b na recta real;
- $a \leq b$: “ a menor ou igual a b ”;
- $a \geq b$: “ a maior ou igual a b ”.

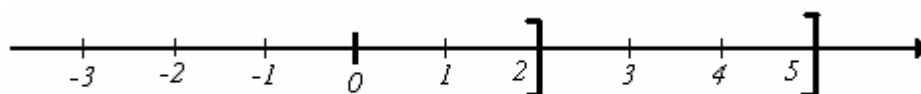
Intervalos

O conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 5\}$, ou equivalentemente, $S = \{x \in \mathbb{R} : x > 2 \wedge x \leq 5\}$ é o conjunto dos números reais $x \in \mathbb{R}$, que verificam simultaneamente as duas condições $x > 2$ e $x \leq 5$, ou de outra forma, os números reais compreendidos entre 2 (exclusive) e 5 (inclusive).

Graficamente temos:



ou



Em termos de notação, representamos o conjunto S por: $S =]2, 5]$.

Intervalos limitados, se $a < b$:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ que é um intervalo fechado
 - $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ ou $]a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
 - $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ ou $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
 - $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ ou $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ que é um intervalo aberto;
- (Obs.: $[a, a] = \{a\}$ é um fechado.)

Intervalos não limitados:

- $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ ou $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ que é um intervalo fechado;
- $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ ou $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ que é um intervalo aberto;
- $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ ou $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ que é um intervalo aberto;
- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ ou $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ que é um intervalo fechado.

Propriedades das Desigualdades

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$

1. Se $a < b$ então $a + c < b + c$;
(Isto é, se somar o mesmo número real a uma desigualdade, a desigualdade mantém-se.)
2. Se $a < b$ e $c > 0$ então $a.c < b.c$;
(Isto é, se multiplicar ambos os membros de uma desigualdade por um mesmo número real **positivo** a desigualdade mantém-se.)
3. Se $a < b$ e $c < 0$ então $a.c > b.c$;
(Isto é, se multiplicar ambos os membros de uma desigualdade por um mesmo número real **negativo** a desigualdade **altera-se**.)
4. Se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.

Obs.:

Estas propriedades também são válidas para a relação de $\leq$ e são muito importantes na resolução de inequações.

Resolução de equações

Resolver a equação $2x + 3 = 5$, é determinar os números reais, $x \in \mathbb{R}$, que verificam a igualdade.

É fácil ver que $x = 1$ é solução da equação anterior, pois $2 \times 1 + 3 = 5$.

Exercícios:

Resolva as seguintes equações, em $\mathbb{R}$:

- a) $-x^2 + x - 1 = 1$
- b) $x(x - 1) = x$
- c) $x^3 + 5x^2 - x = 0$
- d) $x^2 + 5 = 0$

Resolução de inequações

Resolver uma inequação, $-2x - 3 < 1$, é determinar os valores de $x \in \mathbb{R}$ que verificam a desigualdade.

Resolução:

$$\begin{aligned} -2x - 3 < 1 &\Leftrightarrow -2x - 3 + 3 < 1 + 3 \quad \text{pela propriedade 1 das desigualdades} \\ &\Leftrightarrow -2x < 4 \\ &\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) > \left(-\frac{1}{2}\right) \times 4 \quad \text{pela propriedade 3 das desigualdades} \\ &\Leftrightarrow x > -2 \end{aligned}$$

A solução é $\{x \in \mathbb{R} : x > -2\} =]-2, +\infty[$.

Exercícios:

Resolva as seguintes inequações, em $\mathbb{R}$:

- a) $\frac{1}{3}(-x^2 + x - 2) < 0$;
- b) $\frac{x+2}{-x+1} \geq 1$.

Valor Absoluto

Seja $a \in \mathbb{R}$.

O **valor absoluto** ou **módulo** de a , denota-se por $|a|$, e representa o valor da distância (e portanto positivo) da origem (0 de recta) ao ponto a .

Define-se:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Exemplos:

$$|-1,256| = 1,256; \quad |1,256| = 1,256; \quad |-\sqrt{10}| = \sqrt{10}.$$

Propriedades do valor absoluto:

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$

1. $|a| \geq 0$; $|a| = 0$ quando e só quando (sse) $a = 0$;
2. $|a| = |-a|$; $a \leq |a|$;
3. $|a||b| = |a.b|$;
4. $|a| = |b| \Leftrightarrow a^2 = b^2$
5. $|a| > |b| \Leftrightarrow a^2 > b^2$
6. $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Inequações com módulos:

$$\begin{aligned} |f(x)| < g(x) &\Leftrightarrow f(x) < g(x) \wedge -f(x) < g(x) \\ &\Leftrightarrow f(x) < g(x) \wedge f(x) > -g(x) \end{aligned}$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} |3x-1| < 5 &\Leftrightarrow 3x-1 < 5 \wedge -(3x-1) < 5 \\ &\Leftrightarrow 3x < 5+1 \wedge 3x-1 > -5 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{6}{3} \wedge 3x > -5+1 \\ &\Leftrightarrow x < 2 \wedge x > -\frac{4}{3} \\ &\Leftrightarrow x \in]-\infty, 2[\cap]-\frac{4}{3}, +\infty[\Leftrightarrow x \in]-\frac{4}{3}, 2[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f(x)| > g(x) &\Leftrightarrow f(x) > g(x) \wedge -f(x) > g(x) \\ &\Leftrightarrow f(x) > g(x) \wedge f(x) < -g(x) \end{aligned}$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} |3x-1| \geq 5 &\Leftrightarrow 3x-1 \geq 5 \vee -(3x-1) \geq 5 \\ &\Leftrightarrow 3x \geq 5+1 \vee 3x-1 \leq -5 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{6}{3} \vee 3x \leq -5+1 \\ &\Leftrightarrow x \geq 2 \vee x \leq -\frac{4}{3} \\ &\Leftrightarrow x \in [2, +\infty[\cup]-\infty, -\frac{4}{3}] \\ &\Leftrightarrow x \in]-\infty, -\frac{4}{3}] \cup [2, +\infty[\end{aligned}$$