Ficha Prática nº. 5:

Derivadas de funções reais de variável real; Aplicação das derivadas ao estudo de funções e problemas de optimização.

1. Determine, utilizando a definição, a derivada das seguintes funções:

1.1. $f(x)=\dfrac{1}{x+5}$ para $x=a,\ \ a\in IR\backslash\{-5\}$;

1.2. $f(x)=\begin{cases} 1+x & se \ \ x>0 \\ \dfrac{x^2+2x}{2} & se \ \ x\le 0 \end{cases}$ para $x=0$;

1.3. $f(x)=\sqrt{x^2+x+3}$ para $x=2$.

2. Determine as primeiras derivadas das seguintes funções, utilizando as regras de derivação:

2.1. $f(x)=x^3-6x^2+7$

2.2. $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x+3}$

2.3. $f(x)=e^{\sqrt{x+2}}$

2.4. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

2.5. $f(x)=log_2\sqrt{x}$

2.6. $f(x)=cos\left(4x^2+3x\right)$

2.7. $f(x)=(tgx)^{x^2}$

3. Calcule $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ para:

3.1. $y=sen^2x$;

3.2. $y=arctg\left(x^2\right)$;

3.3. $y=\dfrac{1}{2}x^2e^x$ e verifique que satisfaz $y''-2y'+y=e^x$.

4. Determine as seguintes derivadas, utilizando a regra da cadeia:

4.1. $\dfrac{ds}{dt}(1)$ sabendo que $s=3r^2-2\sqrt{r+1}$ e $r=t^3+t^2+1$;

4.2. $\dfrac{dz}{dt}$ sabendo que $z=y^2+log\ y$ e $y=arcsen(t)$.

5. Determine a equação da recta tangente e da recta normal às seguintes curvas, nos respectivos pontos indicados:

5.1. $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ no ponto $(-2,5)$;

5.2. $2y = 1 + x^3 y$ para $x = 1$;

5.3. $y = e^{1-x^2}$ nos pontos de intersecção com a recta $y = 1$.

6. Considere a função definida por $f(x) = \sqrt{x}$. A recta tangente ao gráfico de f e paralela à recta de equação $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$ tem de equação:

a) $y = 2x$

b) $y = \frac{x+1}{2}$

c) $y = \frac{x}{2} + 1$

d) $y = -2x + 1$

Exame de 24/02/2003

7. Qual das seguintes funções admite a recta de equação $y = x$ como recta tangente nalgum ponto?

a) $f(x) = sen(x)$

b) $f(x) = cos(x)$

c) $f(x) = e^x$

d) $f(x) = ln(x)$

8. Seja g a função real de variável real definida por $g(x) = 2^x - sen^2(x)$. A tangente ao gráfico de g, no ponto de abcissa zero passa pelo ponto de coordenadas:

a) $(0;\ln 2)$;

b) $(\ln 2;\, 1-\ln 2)$;

c) $(\ln 2;\ln 2)$;

d) $(1;\, 1+\ln 2)$;

Exame de 24/01/2003

9. Diga justificando se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

9.1. Seja f :R→R definida por: $f(x) = \begin{cases} \cos(\pi - x), x < 1 \\ e^{x-1}, 1 \le x \le 2 \\ e(x-1), x > 2 \end{cases}$, $\exists\ c \in]0,1[$, tal que $f'(c)$=2;

9.2. Sendo f a função da alínea anterior, $\exists\ c \in]1,2[$, tal que $f'(c)$=e-1;

10. Mostre que a equação: $x^2 - xsen(x) - \cos(x) = 0$, tem duas e só duas soluções para $x \in [-\pi, \pi]$.

11. Determine os seguintes limites utilizando a regra de L`Hôpital:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(x)-x}{e^x+e^{-x}-2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x\,sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(2x^2+x\right)^x$ **f)** $\lim\limits_{x\to +\infty} (3x+9)^{1/x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2/(2+\ln(x))}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{sen(x)}$ **i)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{e^{1/x}}$

12. Indique o valor lógico das seguintes afirmações, justificando a sua resposta:

12.1. Se f é descontínua para $x=a$ então f tem pelo menos um assimptota vertical;

12.2. Se $f'=g'$ então $f=g$;

12.3. Se f é contínua então existe f';

12.4. Se f *é* derivável então f é contínua;

13. Seja f uma função de domínio IR, e seja g a função definida por $g(x)=f(x+1)$. A recta de equação $y=2x+4$ é a única assímptota do gráfico de f.
Qual das seguintes é a única assímptota do gráfico de g?

a) $y=2x-4$; **b)** $y=2x-6$;

c) $y=2x+6$; **d)** $y=2x+4$;

Exame de 24/01/2003

14. O gráfico da função *h*, definida por $h(x)=2x-1+\dfrac{1}{|x|-1}$:

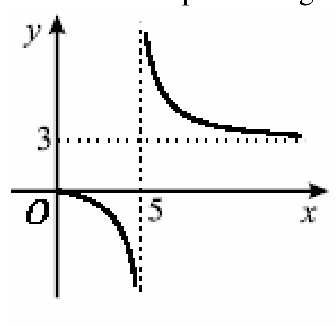
a) Não tem assimptotas verticais.

b) Tem exactamente duas assimptotas, uma vertical e uma oblíqua.

c) Tem três assimptotas, duas verticais
E uma horizontal.

d) Tem três assimptotas, duas verticais e uma oblíqua.

15. Na figura encontra-se representada parte do gráfico de uma função h, de domínio $[0,5[\cup]5,+\infty[$. As rectas de equações x=5 e y=3 são as únicas assimptotas do gráfico de h.



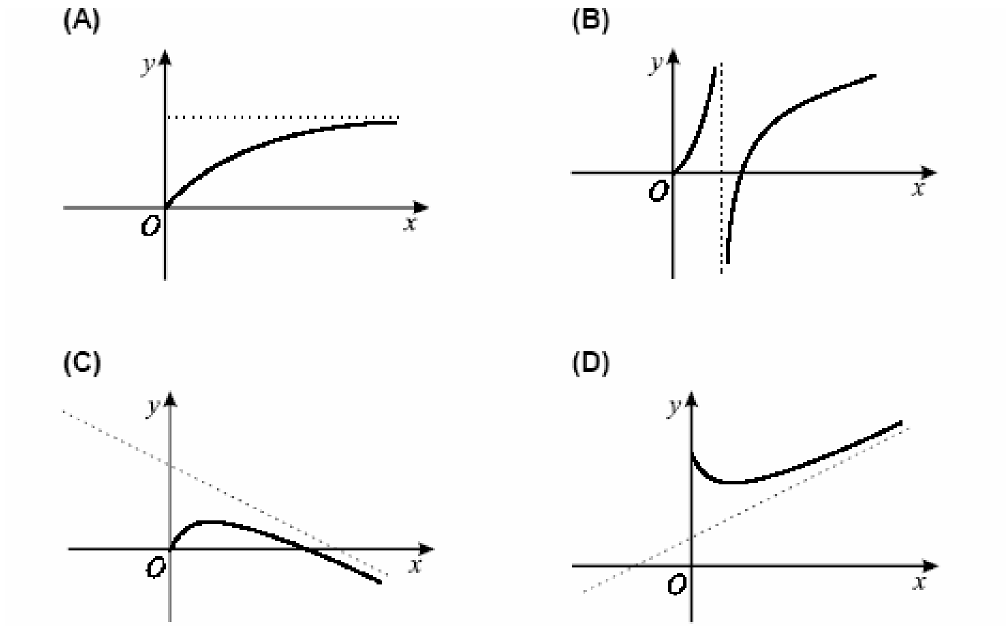
Qual o valor de:
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{3+e^{-x}}$

a) $+\infty$; **b)** 0; **c)** 1; **d)** 5;

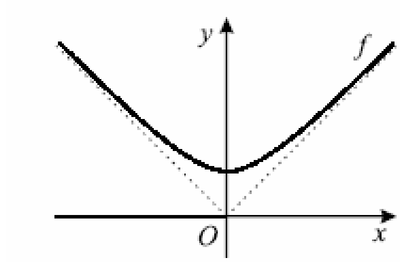
16. Considere-se uma função g, de domínio $[0,+\infty[$, contínua em todo o seu domínio. Sabe-se que:

- O gráfico de g tem uma única assimptota;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\dfrac{1}{2}$;

Quais dos seguintes gráficos poderão representar parte do gráfico da função g e, a tracejado, a sua assimptota?

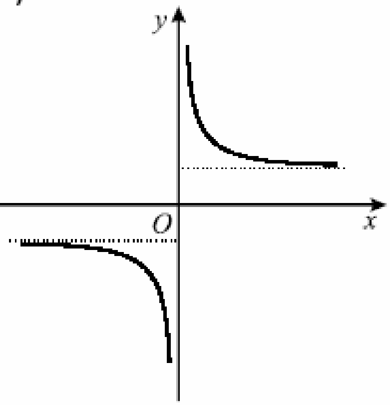


17. Na figura seguinte está representada parte do gráfico de uma função f de domínio R, contínua em todo o seu domínio. A bissectriz dos quadrantes pares e a bissectriz dos quadrantes ímpares são assimptotas do gráfico de f .

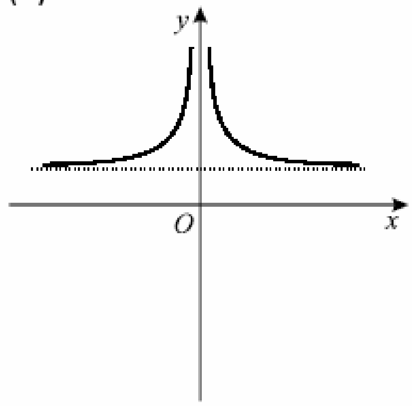


Indique dos gráficos seguintes poderá representar parte do gráfico da função g , definida por $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

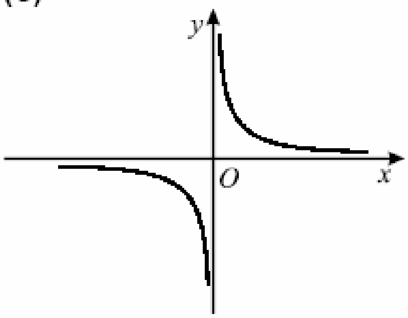
(A)



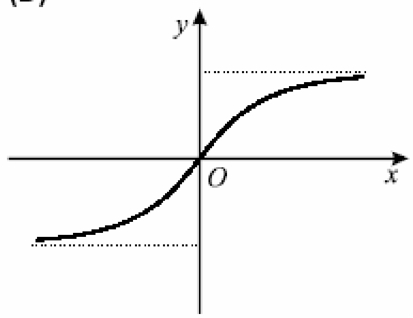
(B)



(C)



(D)

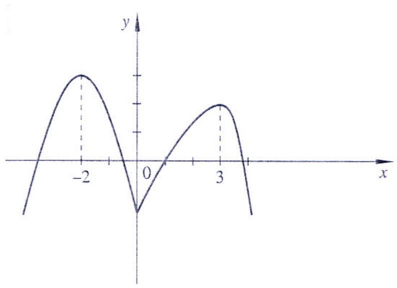


18. Considere uma função g, real de variável real, tal que:

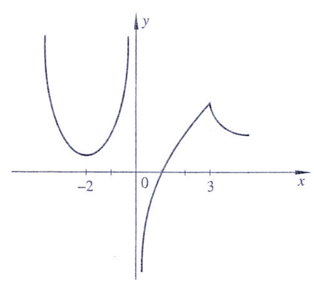
		-2		*0*		*3*	
$g'(x)\times g''(x)$	-	*0*	+	*n.d.*	+	*0*	-

Qual das seguintes representações gráficas poderá representar a função g?

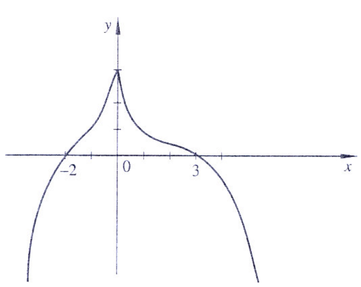
a)



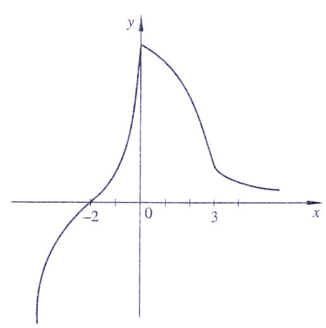
b)



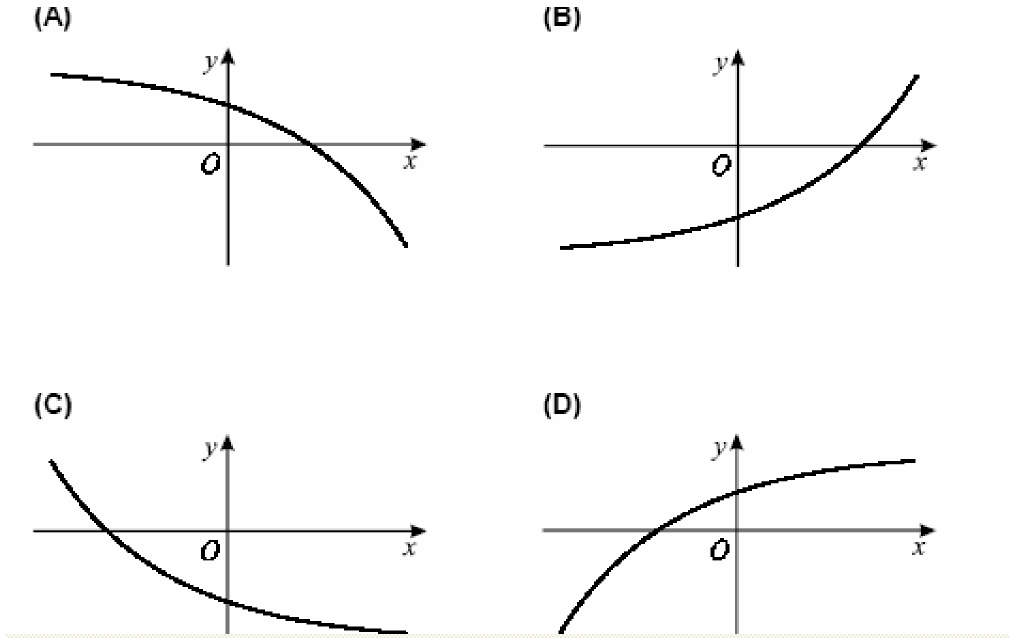
c)



d)



19. Seja f , uma função de domínio R. Sabe-se que a primeira e a segunda derivada de f são negativas em R. Quais dos seguintes gráficos poderá representar parte do gráfico de f ?



20. Seja f uma função polinomial definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, que tem um ponto de inflexão para x=3, um extremo relativo para x=1 e um zero igual a 1. Quais os valores das constantes a, b e c?

a) $a = -9\,;b = 15\,;c = 1$

b) $a = -9\,;b = 15\,;c = -7$

c) $a = 9\,;b = 15\,;c = -7$

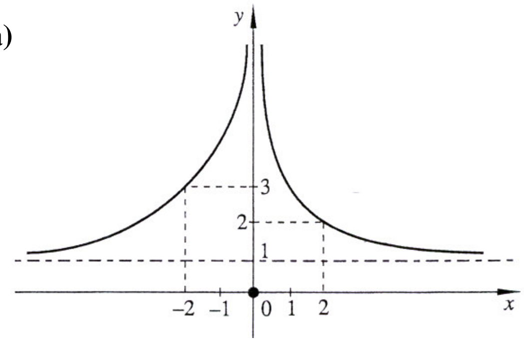
d) $a = 9\,;b = -15\,;c = 1$

21. De uma função f sabe-se que:

- f é par;
- $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$;
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$;
- $f(0) = 0$.

Então, f pode ser definida por:

a)



b) $f(x)=\dfrac{sen(x)}{x}$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}+1 & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}+1 & ,x>0\\ 0 & ,x=0\\ 1 & ,x<0\end{cases}$

22. Considere a função f definida e diferenciável em R cujo quadro de variação é o seguinte:

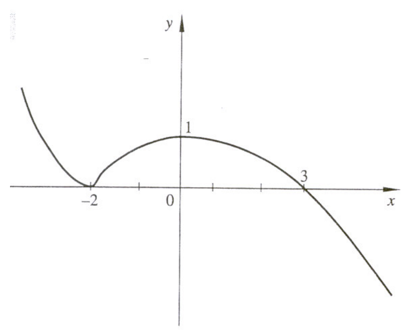
x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

Qual o número de soluções da equação $f(x)=1$?

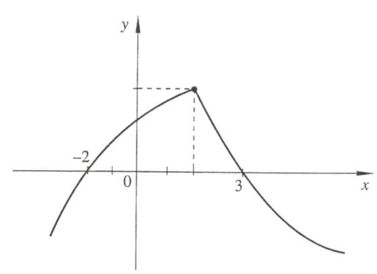
a) 1.
b) 3.
c) No mínimo 1 e no máximo 3.
d) No máximo 1.

23. Qual dos seguintes gráficos poderá ser o da primeira derivada da função do exercício 22?

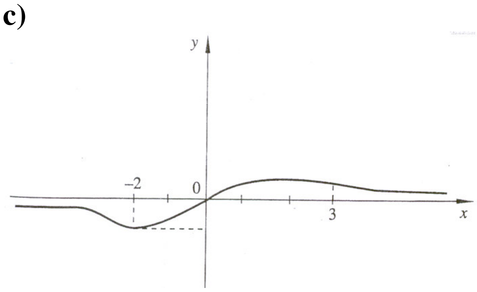
a)



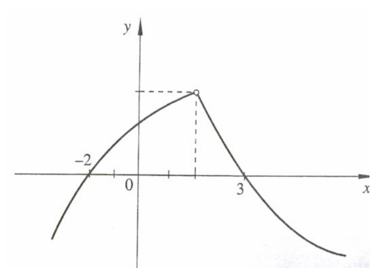
b)



c)

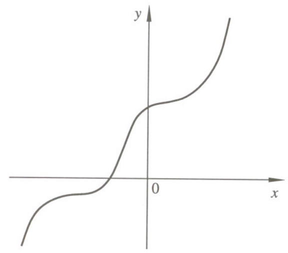


d)

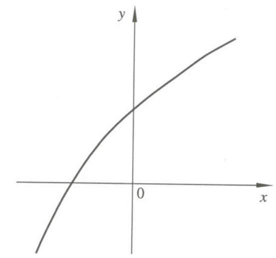


24. De uma função g, diferenciável em R, sabe-se que é crescente e que $g''(x) - g'(x) = 1$, para todo $x \in$ R. Indique qual dos gráficos seguintes representa a função g.

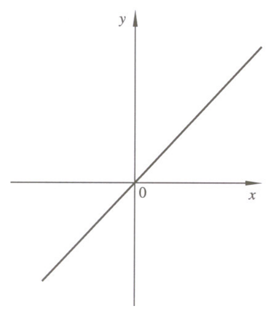
a)



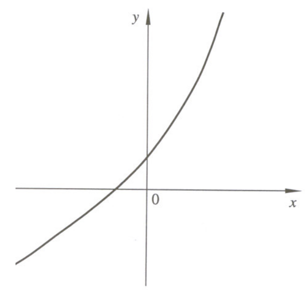
b)



c)



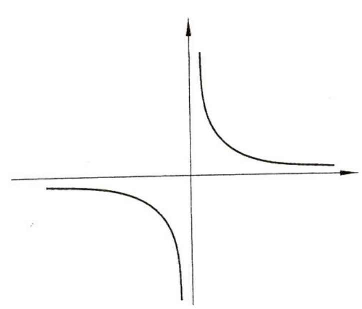
d)



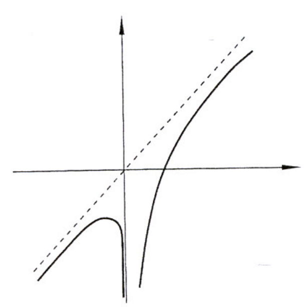
25. Considere o conjunto $A =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ e sejam $f : A \to \Re$ e $f' : A \to \Re$ duas funções diferenciáveis. Tendo em conta a tabela seguinte, indique qual dos gráficos representa a função f?

		0	
f '	-		+
f '	↘		↘

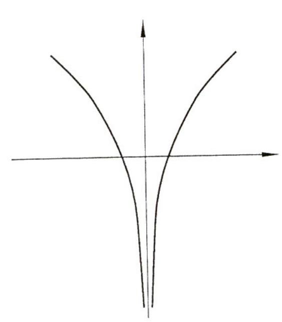
a)



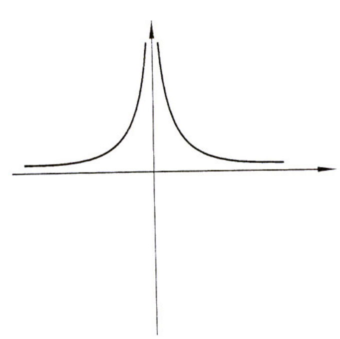
b)



c)

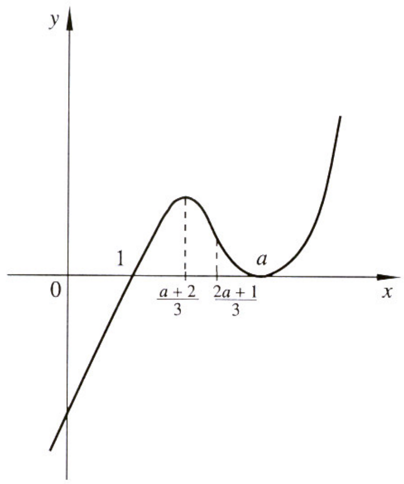


d)

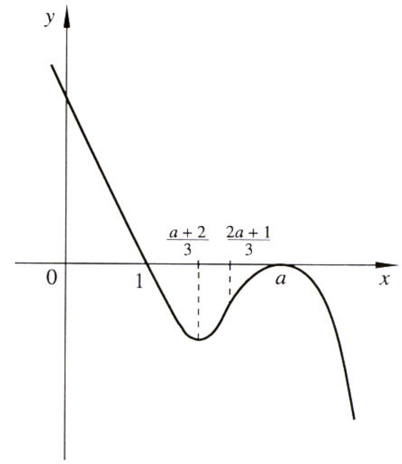


26. Seja $F : x \rightarrow (x-1)(x-a)^2$ com $a > 1$. Verifique se alguma das representações gráficas abaixo indicadas é a representação da função *F,* e em caso afirmativo indique qual.

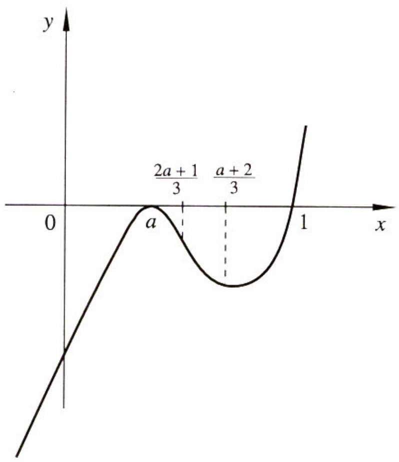
a)



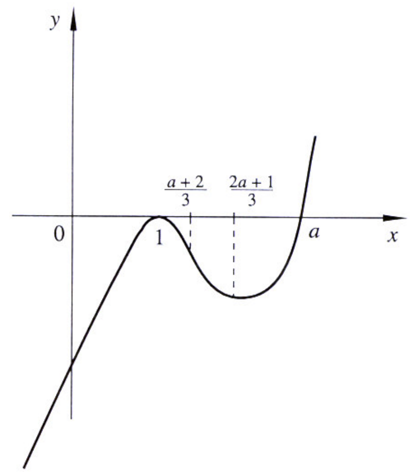
b)



c)

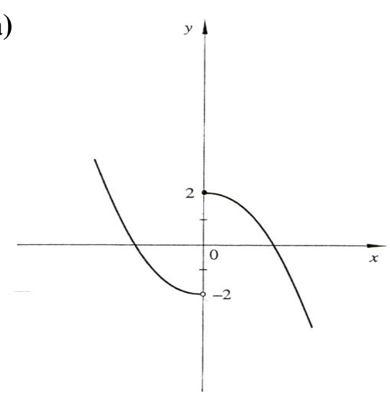


d)

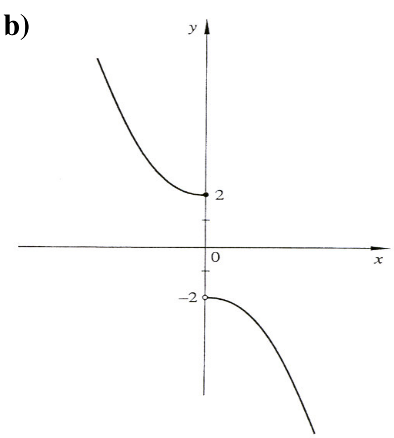


27. Seja $g : \Re \rightarrow \Re$ uma função tal que: $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$, $g(0) = 2$ e a função $|g|$ é diferenciável em $\Re$. A representação gráfica de *g* pode ser:

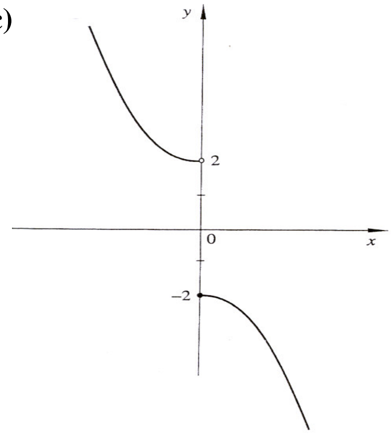
a)



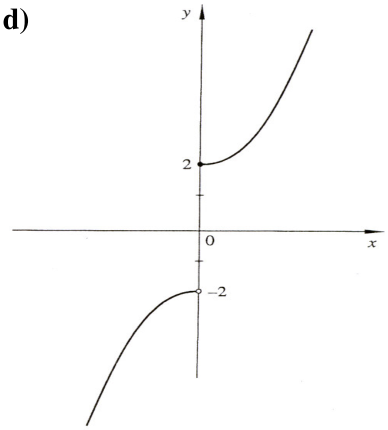
b)



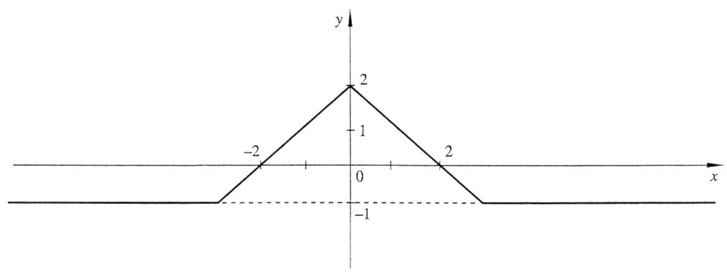
c)



d)

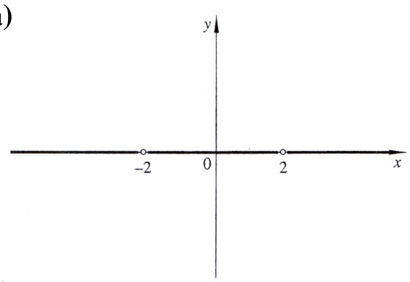


28. Considere a função real de variável real *f* cuja representação gráfica é:

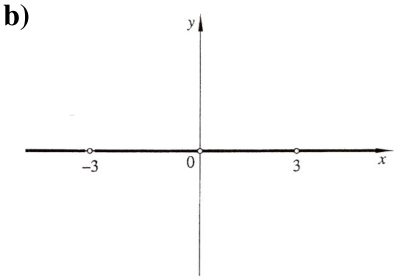


Qual dos seguintes gráficos representa $f''(x)$?

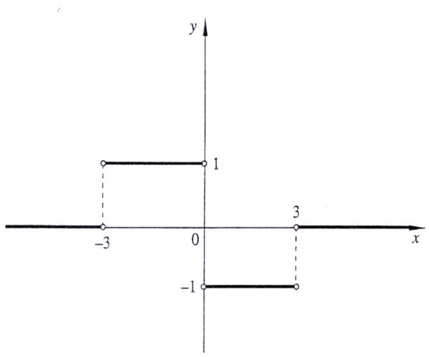
a)



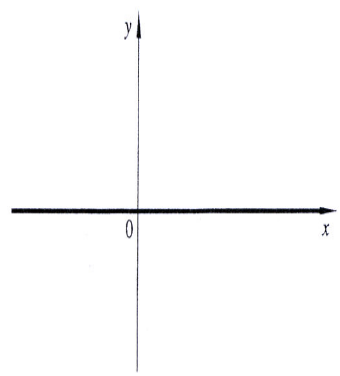
b)



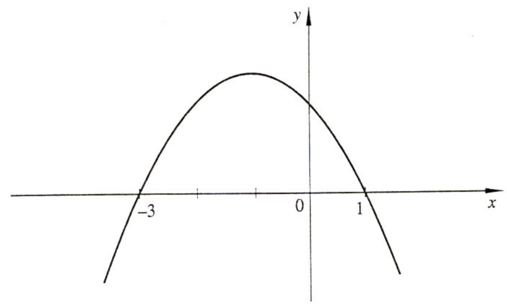
c)



d)

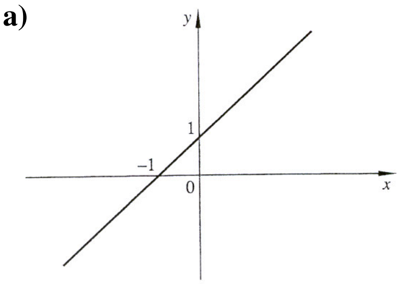


29. Sabendo que o gráfico da função derivada f' é:

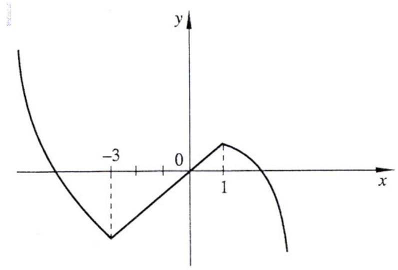


Qual dos gráficos seguintes poderá representar a função f ?

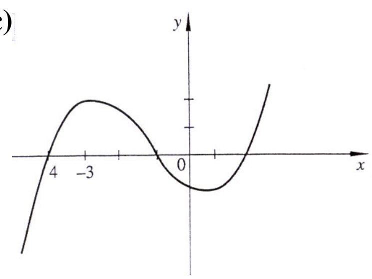
a)



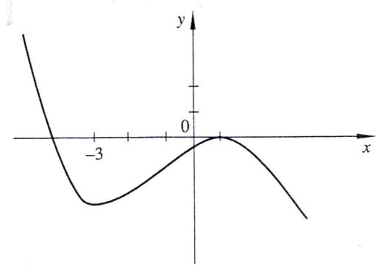
b)



c)

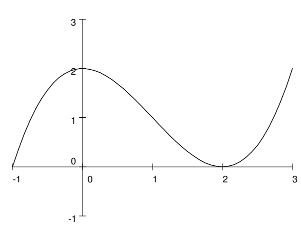


d)

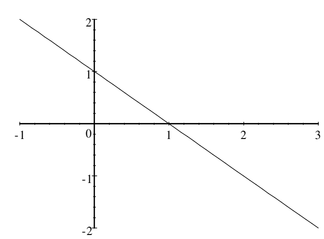


30. Seja g uma função cujo gráfico tem um ponto de inflexão de abcissa $x = 1$. Indique qual dos seguintes gráficos pode representar a segunda derivada de g , g''.

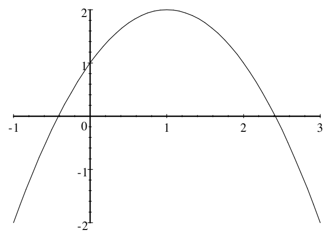
a)



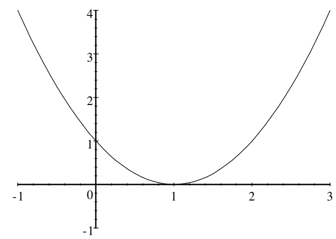
b)



c)



d)



Exame de 10/09/2003

31. Considere a função f , real de variável real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x e^{-1/x} & , x<0 \\ \dfrac{1-x}{e^{x}} & , x\geq 0 \end{cases}$$

31.1. Faça o estudo da função f , indicando: Domínio, zeros, assimptotas, pontos críticos, intervalos de monotonia, pontos de inflexão e concavidades;

31.2. Faça um esboço da função f .

32. Considere a função definida por $f(x)=xe^{-x^2/2}$ para $x\geq 0$.

32.1. Determine os pontos críticos e os intervalos de monotonia da função f .

32.2. Determine as concavidades e os pontos de inflexão da função f .

Exame de 24/01/2003

Problemas de optimização:

33. Seja a um número positivo e sejam x e y números positivos que verificam a condição: $x^2 + y^2 = a^2$. Prove que de entre todos os números x e y que verificam a condição dada, a sua soma é máxima quando $x = y$.

34. Pretende-se cortar um arame de 40 cm de comprimento em duas partes, com uma delas construir um quadrado e com a outra delas construir uma circunferência, de modo que a soma das áreas das superfícies limitadas por cada uma das duas figuras seja máxima. Como deve ser cortado o arame?

35. Considere a Elipse de equação de equação: $2x^2 + y^2 = 2$.

35.1. Prove que a área dos rectângulos inscritos na Elipse, com os lados paralelos aos eixos de simetria da elipse é dada por $A(x) = 4x\sqrt{2 - x^2}$, sendo x a abcissa do vértice do rectângulo que pertence ao 1º quadrante.

35.2. De entre a família de rectângulos mencionados na alínea anterior, determine as dimensões dos rectângulos que têm área máxima

36. Determine o raio da base e a altura de um cilindro de volume máximo que pode ser inscrito numa superfície esférica de raio 10 cm.

37. Uma folha de papel contém 400 cm^2 de texto impresso. Sabe-se, ainda, que as margens inferiores e laterais medem 2 cm cada e a margem superior mede 3 cm. Determine as dimensões da folha que levam a uma economia de papel.

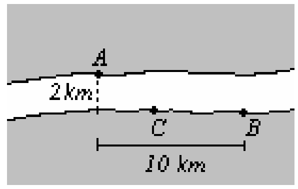
38. Pretende cortar-se uma placa laminar rectangular de um tronco de madeira de secção circular de raio $\sqrt{2}$ m. Quais as dimensões da placa de forma a que a sua área seja máxima?

39. Qual o ponto pertencente à hipérbole de equação $xy = 1$, de abcissa positiva, que está mais próximo da origem?

40. Formule matematicamente o seguinte problema, identificando:

- as variáveis,
- a função a optimizar,
- e explique como obter a localização do ponto C, **sem resolver integralmente o problema**.

"De acordo com a figura seguinte,



pretende-se construir um gasoduto de um local A para um local B que se encontram em margens opostas de um rio.

O gasoduto irá passar por baixo do rio, ligando o ponto A (numa margem) ao ponto C (na margem oposta), e seguirá pela margem do rio ligando C a B, tal como é ilustrado na figura.

Se o custo da construção do gasoduto é 5 vezes mais caro quando passa por baixo do rio, determine a localização do ponto C de modo a minimizar os custos de construção do canal."

Exame de 10/09/2003

<u>Sugestões para a resolução de mais exercícios</u>:

58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 93, 93 referentes ao capítulo 2, da sebenta da disciplina de Análise Matemática I.