Resolução do exercício 31 da ficha prática n.º 5

Consideremos a função $f(x) = \begin{cases} x e^{-1/x} & , x < 0 \\ \dfrac{1-x}{e^x} & , x \geq 0 \end{cases}$.

Domínio:

Para $x < 0$, $f(x) = f_1(x) = xe^{-1/x}$. Temos que $D_{f_1} = \{x \in IR^- : x \neq 0\} = IR^-$

Para $x \geq 0$, $f(x) = f_2(x) = \dfrac{1-x}{e^x}$. Temos que $D_{f_2} = \{x \in IR_0^+ : e^x \neq 0\} = IR_0^+$ pois $e^x > 0, \quad \forall x$.

Logo, $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} = IR^- \cup IR_0^+ = IR$.

Zeros:

Para $x < 0$, $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad xe^{-1/x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ pois $e^x > 0, \quad \forall x$.

Como $0 \notin D_{f_1}$, então f não tem zeros em IR^-.

Para $x > 0$, $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_2(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1-x}{e^x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$ pois $e^x > 0, \quad \forall x$.

Como $1 \in D_{f_2}$, então f tem um zero em $x = 1$.

Continuidade:

Para $x < 0$, $f(x) = f_1(x) = xe^{-1/x}$ é continua porque é o produto de uma função polinomial, x, pela composta da função exponencial, e^x, com uma função racional, $-\dfrac{1}{x}$.

Para $x > 0$, $f(x) = f_2(x) = \dfrac{1-x}{e^x}$ é continua porque é o quociente entre uma função polinomial, $1-x$, e a função exponencial, e^x.

Para $x=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} xe^{-1/x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{-1/x}}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-(1/x)' e^{-1/x}}{(1/x)'} = \lim\limits_{x\to 0^-} - e^{-1/x} = -\infty$. Note que no cálculo de $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ obtivemos uma indeterminação do tipo $0\times\infty$ que transformámos noutra do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ e levantámos aplicando a Regra de Cauchy. Como o limite é infinito podemos concluir imediatamente que f não é contínua em $x=0$.

Logo, f é continua em $IR\setminus\{0\}$.

<u>Assímptotas:</u>

<u>Assímptotas verticais:</u>

O único ponto onde poderá haver uma assímptota é em $x=0$, pois nos restantes pontos f é continua (esta foi uma das razões pela qual se começou por estudar a continuidade da função).

Já vimos que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$.

Logo $x=0$ é uma assímptota vertical unilateral (note que não pode ser assímptota bilateral pois da maneira como f esta definida tem que ser obrigatoriamente contínua à direita de $x=0$).

<u>Assímptotas horizontais:</u>

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty} xe^{-1/x} = -\infty$$

f não tem assímptotas horizontais quando $x\to -\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{1-x}{e^x} \underset{\substack{\text{Regra de}\\ \text{Cauchy}}}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{(1-x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-1}{e^x} = 0^-$$

Logo, $y=0$ é uma assímptota horizontal ao gráfico de f quando $x\to +\infty$.

<u>Assímptotas oblíquas:</u>

f só pode ter assímptotas oblíquas quando $x\to -\infty$ (porquê?)

$$m=\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to -\infty} e^{-1/x} = 1$$

$$b=\lim_{x\to -\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to -\infty}\left(xe^{-1/x}-x\right)=\lim_{x\to -\infty} x\left(e^{-1/x}-1\right)=\lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-1/x}-1}{1/x}=\lim_{x\to -\infty} - e^{-1/x} = -1$$

Note que no cálculo de b apareceu uma indeterminação do tipo $\infty-\infty$ que começámos por transformar noutra do tipo $0 \times \infty$ e seguidamente em $\frac{0}{0}$ o que nos permitiu usar a Regra de Cauchy.

Como m e b são valores finitos, a recta $y = x - 1$ é uma assímptota ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

<u>Cálculo da primeira derivada:</u>

Comecemos por observar que não existe $f'(0)$ pois f não é continua em $x = 0$.

Nos restantes pontos, tem-se:

$$f'(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-1/x} & se \quad x < 0 \\ \frac{x-2}{e^x} & se \quad x > 0 \end{cases}$$

<u>Nota:</u> Se f fosse contínua em $x = 0$ seria necessário averiguar a existência de $f'(0)$ o que teria de ser feito recorrendo à definição de derivada num ponto (ver apontamentos teóricos página 103), ou usando o corolário do teorema de Lagrange da pág. 115.

<u>Zeros da 1ª derivada:</u>

Para $x < 0$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-1/x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = -1$ pois $e^x > 0, \quad \forall x$.

Como $-1 < 0$, $x = -1$ é um zero de f'

Para $x > 0$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = 2$ pois $e^x > 0, \quad \forall x$.

Como $2 > 0$, $x = 2$ é um zero de f'.

<u>Pontos críticos:</u>

- $x = 0$ pois $0 \in D_f$ mas $0 \notin D_{f'}$
- $x = -1$ pois $f'(-1) = 0$
- $x = 2$ pois $f'(2) = 0$

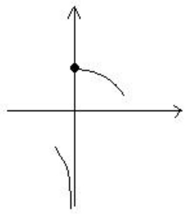
	$-\infty$	-1		0		2	$+\infty$

Sinal de f'	+	0	–	n.d.	–	0	+
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

n.d. – não definida.

Extremos relativos:

- Máximos:
  - $f(-1)$ pois f é continua em $x=-1$ e a derivada passa de positiva para negativa (ver teórica página 122)
  - $f(0)$ - note que neste ponto a função é descontinua pelo que é necessário observar o comportamento da função numa vizinhança de $x=0$. Mas por um lado $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ e f é decrescente à esquerda de $x=0$, por outro lado $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-x}{e^x} = 1$ e f é decrescente à direita de $x=0$. Logo $f(0)$ é um máximo de f pois estamos perante uma situação do tipo:



- Mínimos:
  - $f(2)$ pois f é continua em $x=2$ e a derivada passa de negativa para positiva (ver teórica página 122)

Intervalos de Monotonia:

- f é estritamente crescente se: $x \in \left]-\infty,-1\right[$ e se $x \in \left]2,+\infty\right[$;
- f é estritamente decrescente se: $x \in \left]-1,0\right[$ e se $x \in \left]0,2\right[$

  Nota: apesar da derivada ser negativa nos intervalos $\left]-1,0\right[$ e $\left]0,2\right[$ não se pode dizer que f seja estritamente negativa no intervalo $\left]-1,2\right[$ – ver o que se passa na figura perto do ponto $x=0$.

Cálculo da segunda derivada:

Depois de simplificados os cálculos tem-se:

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-1/x}}{x^3} & se \quad x<0\\ \dfrac{3-x}{e^x} & se \quad x>0\end{cases}$$

Notar que não pode está definido $f''(0)$ pois também não estava definido $f'(0)$.

Zeros da 2ª derivada:

Para $x<0$, $f''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{e^{-1/x}}{x^3}=0$ impossível pois $e^x>0, \quad \forall x$.

Logo, f'' não tem zeros em IR^-.

Para $x>0$, $f''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{3-x}{e^x}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=3$ pois $e^x>0, \quad \forall x$.

Como $3>0$, $x=3$ é um zero de f''.

Candidatos a pontos de inflexão:

- $x=0$ pois $0\in D_f$ mas $0\notin D_{f''}$
- $x=3$ pois $f''(3)=0$

	$-\infty$	0		3	$+\infty$
Sinal de f''	–	n.d.	+	0	–
f	$\cap$		$\cup$		$\cap$

n.d. – não definido

Pontos de inflexão:

$x=0$ e $x=3$ pois correspondem a pontos do domínio onde há mudança do sentido das concavidades

Concavidades:

f tem concavidade voltada para baixo se: $x\in\,]-\infty,0[$ e se $x\in\,]3,+\infty[$

f tem concavidade voltada para cima se: $x \in \left]0,3\right[$

Esboço do gráfico: