Resolução de alguns exercícios da ficha n.º 2 – III parte

<u>Exercício 11:</u>

a) $sen\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad = -\frac{1}{2}$ (note que a função *seno* é ímpar)

b) $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c)

$$tg\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -tg\left(\frac{4\pi}{3}\right) \quad \textit{porque tg é uma função impar}$$

$$= -tg\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -tg\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \textit{porque } \pi \textit{ é o período da tg}$$

$$= -\sqrt{3}$$

g) $\cos ec\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{sen\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{sen\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$

h)

$$\sec\left(\frac{219\pi}{4}\right) = \sec\left(54\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \sec\left(\frac{3\pi}{4}\right) \quad \textit{porque o periodo da } \sec \textit{ é } 2\pi$$

$$= \frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = -\sqrt{2}$$

j)

$$arcsen\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = x \quad \Leftrightarrow \quad sen(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \wedge \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad sen(x) = -sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \wedge \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad sen(x) = sen\left(-\frac{\pi}{4}\right) \quad \wedge \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4}$$

Logo $arcsen\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

k)

$$arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=x \quad \Leftrightarrow \quad tg(x)=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \wedge \quad x\in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Leftrightarrow \quad tg(x)=tg\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \wedge \quad x\in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{\pi}{6}$$

Logo $arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}$

m) $$\cos ec\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)=\frac{1}{sen\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)}=\frac{1}{sen(x)}=y$$

onde

$$\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)=x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x)=-\frac{1}{4} \quad \wedge \quad x\in[0,\pi]$$

$$\Rightarrow \quad x\in 2^{\circ}\ quadrante$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria sabemos que:

$$\cos^2(x)+sen^2(x)=1 \quad \Leftrightarrow \quad sen^2(x)=1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad sen(x)=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Como $x\in 2^{\circ}$ quadrante e a função *seno* no 2º quadrante é positivo, temos que $sen(x)=\frac{\sqrt{15}}{4}$

Logo $\cos ec\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)=\frac{1}{sen\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)}=\frac{1}{sen(x)}=\frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=\frac{4}{\sqrt{15}}=\frac{4\sqrt{15}}{15}$.

o) $$sen\left(2\arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)\right)=sen(2x)=2sen(x)\cos(x)$$

onde

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)=x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x)=\frac{\sqrt{10}}{5} \quad \wedge \quad x\in[0,\pi]$$

$$\Rightarrow \quad x\in 1^{\text{o}} \; quadrante$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria sabemos que:

$$\cos^2(x)+sen^2(x)=1 \quad \Leftrightarrow \quad sen^2(x)=1-\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad sen(x)=\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$$

Como $x\in 1^{\text{o}}$ quadrante e a função *seno* no 1º quadrante é positivo, temos que $sen(x)=\frac{\sqrt{15}}{5}$

Logo $sen\left(2\arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)\right)=sen(2x)=2sen(x)\cos(x)=2\frac{\sqrt{15}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{5}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

r) $arctg\left(-2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=arctg\left(-\sqrt{3}\right)=x$

onde

$$arctg\left(-\sqrt{3}\right)=x \quad \Leftrightarrow \quad tg(x)=-\sqrt{3} \quad \wedge \quad x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Leftrightarrow \quad tg(x)=tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad \wedge \quad x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Leftrightarrow \quad x=-\frac{\pi}{3}$$

Logo $arctg\left(-2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=arctg\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$.

t)

$$tg\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)+arcsen\left(\frac{1}{2}\right)\right)=tg\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{tg(x)+tg\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1-tg(x)\cdot tg\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{tg(x)+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}tg(x)}$$

onde

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right)=x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x)=\frac{1}{3} \quad \wedge \quad x\in[0,\pi]$$

$$\Rightarrow \quad x\in 1^{o}\ quadrante$$

Usando a fórmula fundamental da trigonometria e o facto de $x\in 1^{o}\ quadrante$

podemos concluir que $sen(x)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ e portanto $tg(x)=\frac{sen(x)}{\cos(x)}=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}=2\sqrt{2}$

Logo $tg\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)+arcsen\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{tg(x)+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}tg(x)}=\frac{6\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3-2\sqrt{6}}=-\frac{38\sqrt{2}+9\sqrt{3}}{15}$

<u>Exercício 15</u>

a)

$$sen\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad sen\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad sen\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=sen\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \vee \quad 2x+\frac{\pi}{6}=\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi, \quad k\in Z$$

$$\Leftrightarrow \quad x=-\frac{\pi}{6}+k\pi \quad \vee \quad x=\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in Z$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{5\pi}{6}+k\pi \quad \vee \quad x=\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in Z$$

b)

$$tg(4x)=cotg(x)$$

Para resolver esta equação é necessário começar por escrever $cotg(x)=tg(\ldots)$ e seguidamente aplicar a fórmula. (rever relações entre tangente e co-tangente – páginas 72 e 73)

Podemos escrever $cotg(x)=tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

Logo,

$$tg(4x) = cotg(x) \Leftrightarrow tg(4x) = tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi, \quad k \in Z$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, \quad k \in Z$$

c) $\arccos(4x) = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 4x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{8}$, note que a função $\arccos(4x)$ só está definida para valores de $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ e o valor encontrado para x pertence ao domínio, logo é solução da equação.

f)

$$sen(2x) + sen(x) = 0 \Leftrightarrow sen(2x) = -sen(x)$$

$$\Leftrightarrow sen(2x) = sen(-x)$$

$$\Leftrightarrow \ldots$$

outra resolução:

$$sen(2x) + sen(x) = 0 \Leftrightarrow 2sen(x)\cos(x) + sen(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow sen(x)(2\cos(x) + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow sen(x) = 0 \quad \vee \cos(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ldots$$

i)

$$tg(\arccos(x)) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow tg(\arccos(x)) = tg\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow arctg(tg(\arccos(x))) = arctg\left(tg\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \arccos(x) = \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercício 17

a)

$sen(2x) < sen(x)$, em $[0,2\pi[$

$sen(2x) < sen(x) \quad \Leftrightarrow \quad sen(2x) - sen(x) < 0$

Cálculo auxiliar:

$$sen(2x) - sen(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad sen(2x) = sen(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x = x + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = \pi - x + 2k\pi, \quad k \in Z$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{2k+1}{3}\pi, \quad k \in Z$$

Destes valores os que pertencem a $[0,2\pi[$ são:

$x = 0$; $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \pi$ e $x = \frac{5\pi}{3}$

Vamos agora estudar o sinal da função $sen(2x) - sen(x)$ no intervalo $[0,2\pi[$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$sen(2x) - sen(x)$	0	+	0	–	0	+	0	-	Não pertence ao domínio

Logo $sen(2x) < sen(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]\frac{\pi}{3}, \pi\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right[$

c)

A função $\arccos\left(\frac{x+1}{2}\right)$ só está definida se $-1 \leq \frac{x+1}{2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leq x \leq 1$.

Portanto só faz sentido avaliar $\arccos\left(\frac{x+1}{2}\right) < \frac{2\pi}{3}$ se $x \in [-3,1]$

$\arccos\left(\frac{x+1}{2}\right) < \frac{2\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \arccos\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{2\pi}{3} < 0$

Cálculo auxiliar:

$$\arccos\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{2\pi}{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \arccos\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -2$$

Vamos agora estudar o sinal da função $\arccos\left(\frac{x+1}{2}\right)-\frac{2\pi}{3}$ no intervalo $[-3,1]$

	-3		-2		1
$\arccos\left(\frac{x+1}{2}\right)-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$-$	0	$+$	$\frac{\pi}{3}$

Logo $\arccos\left(\frac{x+1}{2}\right)<\frac{2\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x\in[-3,-2[$

Exercício 23

$$h(x)=2\pi-3\arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right)$$

a)

$$h(-x)=2\pi-3\arccos\left(\frac{1-(-x)^2}{2}\right)=2\pi-3\arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right)=h(x)$$

Logo h é uma função par.

b)

Comecemos primeiro por calcular o domínio de h.

$$D_h=\left\{x\in IR:-1\le\frac{1-x^2}{2}\le1\right\}=\left\{x\in IR:-2\le1-x^2\le2\right\}=\left\{x\in IR:-3\le-x^2\le1\right\}$$
$$=\left\{x\in IR:-1\le x^2\le3\right\}=\left\{x\in IR:x^2\le3\right\}=\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$$

Determinemos agora o contradomínio:

$$-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3} \quad\Leftrightarrow\quad 0\le x^2\le3 \quad\Leftrightarrow\quad -3\le-x^2\le0 \quad\Leftrightarrow\quad -2\le1-x^2\le1$$
$$\Leftrightarrow\quad -1\le\frac{1-x^2}{2}\le\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow\quad \arccos(-1)\ge\arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right)\ge\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{\pi}{3}\le\arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right)\le\pi$$
$$\Leftrightarrow\quad -\pi\le2\pi-3\arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right)\le\pi$$

Logo $\mathrm{Im}(h)=CD_h=[-\pi,\pi]$.

c)

O subconjunto do D_h não negativo é $D_{h^+} = \left[0, \sqrt{3}\right]$. Neste intervalo, a imagem de h é $\left[-\pi, \pi\right]$ pois já vimos na alínea *a)* que a função é par.

Determinemos a expressão analítica da inversa de h em D_{h^+} note-se que neste domínio h é uma função injectiva (verifique!!!)

$$h(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi - 3\arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right) = y \quad \Leftrightarrow \quad \arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right) = \frac{2\pi - y}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 1 - 2\cos\left(\frac{2\pi - y}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{1 - 2\cos\left(\frac{2\pi - y}{3}\right)}$$

Logo a inversa de h em D_{h^+} é:

$$\begin{aligned} h^{-1}: \quad \left[-\pi, \pi\right] &\rightarrow \left[0, \sqrt{3}\right] \\ x &\mapsto \sqrt{1 - 2\cos\left(\frac{2\pi - x}{3}\right)} \end{aligned}$$

Note-se que $h^{-1}(x) \in \left[0, \sqrt{3}\right]$ logo a inversa tem que ser definida à custa da raiz positiva.

d)

$$A = \left\{x \in D_h : h(x) \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$h(x) \leq \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad h(x) - \frac{\pi}{2} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3\pi}{2} - 3\arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right) \leq 0$$

<u>Cálculo auxiliar:</u>

$$\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-x^2}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pm 1$$

Vamos agora estudar o sinal de $\frac{\pi}{2}-\arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right)$ em $D_h=\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$

x	$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}-\arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{2}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\frac{3\pi}{2}$

Logo $h(x)\leq\frac{\pi}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x\in\left[-\sqrt{3},-1\right]\cup\left[1,\sqrt{3}\right]$

<u>Exercício 24</u>

$f(x)=\pi-2arctg(2x+1)$

a)

$D_f=\{x\in IR:2x+1\in IR\}=IR$

$2x+1\in IR \quad\Rightarrow\quad -\frac{\pi}{2}<arctg(2x+1)<\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad -\pi<-2arctg(2x+1)<\pi$

$\quad\Rightarrow\quad 0<\pi-2arctg(2x+1)<2\pi$

Logo $\mathrm{Im}(f)=\left]0,2\pi\right[$

b)

$$
\begin{aligned}
-1\leq x\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad -2\leq 2x\leq 0 \quad&\Leftrightarrow\quad -1\leq 2x+1\leq 1\\
&\Leftrightarrow\quad arctg(-1)\leq arctg(2x+1)\leq arctg(1)\\
&\Leftrightarrow\quad -\frac{\pi}{4}\leq arctg(2x+1)\leq\frac{\pi}{4}\\
&\Leftrightarrow\quad -\frac{\pi}{2}\leq -2arctg(2x-1)\leq\frac{\pi}{2}\\
&\Leftrightarrow\quad \frac{\pi}{2}\leq f(x)\leq\frac{3\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Isto prova que $\forall x\in[-1,\,0]$ tem-se $f(x)\geq\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad f(x)\neq 0$

c)

f é uma função injectiva pois é composta de funções injectivas e portanto podemos definir a sua inversa.

$$f(x)=y \quad \Leftrightarrow \quad \pi-2arctg(2x+1)=y \quad \Leftrightarrow \quad arctg(2x+1)=\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x+1=tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{-1+cotg\left(\frac{y}{2}\right)}{2}$$

Logo,

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: &]0,2\pi[& \to & IR \\ & x & \mapsto & \frac{1}{2}\left(-1+cotg\left(\frac{y}{2}\right)\right) \end{array}.$$